

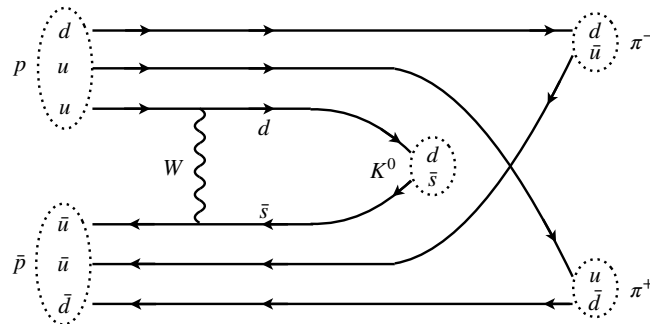
### Θέμα [03]

Θεωρήστε την αντίδραση  $p + \bar{p} \rightarrow K^0 + \pi^+ + \pi^-$ .

- α. (30%) Εξετάστε αν αυτή η αντίδραση μπορεί να πραγματοποιηθεί. Ποιοι κβαντικοί αριθμοί μεταβάλλονται στην αντίδραση;
- β. (70%) Αν είναι πραγματοποιήσιμη, σχεδιάστε το διάγραμμα Feynman χαμηλότερης τάξης που την περιγράφει και χαρακτηρίστε την αλληλεπίδραση.

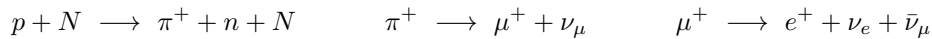
### Λύση

- α. Η αντίδραση είναι αμιγώς αδρονική. Συνεπώς οι συναφείς κβαντικοί αριθμοί είναι ο βαρυονικός και το ηλεκτρικό φορτίο. Και οι δύο διατηρούνται: είναι και οι δύο 0 και στην αρχική και στην τελική κατάσταση. Άρα η αντίδραση είναι εφικτή. Ο μόνος συναφής κβαντικός αριθμός που μεταβάλλεται είναι η παραδοξότητα, από 0 στην αρχική κατάσταση στο +1 του καονίου στην τελική.
- β. Το διάγραμμα Feynman της αντίδρασης φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Η αλληλεπίδραση είναι ασθενής.



### Θέμα [04]

Η κύρια (ανιχνεύσιμη) συνιστώσα της κοσμικής ακτινοβολίας που βομβαρδίζει τη Γη αποτελείται από ενεργητικά πρωτόνια. Αυτά δημιουργούν στην ανώτερη ατμόσφαιρα μόνια που ανιχνεύονται στην επιφάνεια της Γης και παράγονται με τις ακόλουθες αντιδράσεις:



όπου  $N$  είναι ένα νουκλεόνιο (πρωτόνιο ή νετρόνιο) σε κάποιον ελαφρό ( $A \leq 20$ ) ατομικό πυρήνα της ατμόσφαιρας.

- α. (70%) Θεωρώντας τα πρωτόνια που πέφτουν κάθετα στην ατμόσφαιρα (κατακόρυφα) και σχεδιάζονται σε ύψος 99 km από το έδαφος, βρείτε την ελάχιστη κινητική ενέργεια  $T_p^{\min}$  που πρέπει να έχουν ώστε, κατά μέσο όρο, τα μόνια

που παράγουν να φτάσουν στο έδαφος και να ανιχνευτούν. Δίνονται οι μάζες του νουκλεονίου  $m_N = 1 \text{ GeV}$ , του πιονίου  $m_\pi = 0.14 \text{ GeV}$  και του μιονίου  $m_\mu = 0.1 \text{ GeV}$ , οι μέσοι χρόνοι ζωής του πιονίου  $\tau_\pi = 26 \text{ ns}$  και του μιονίου  $\tau_\mu = 2.2 \text{ } \mu\text{s}$ , και η ταχύτητα του φωτός στο κενό  $c = 300,000 \text{ km/s}$ . **Απάντηση:**  $T_p^{\text{min}} \simeq 30.5 \text{ GeV}$ . **Υπόδειξη:** Παραλείψτε τις μάζες του πιονίου και του μιονίου, όπου επιτρέπεται, καθώς και τη διαδρομή που διανύει το πiónιο πριν διασπαστεί.

- β. (30%) Σχεδιάστε τα διαγράμματα Feynman χαμηλότερης τάξης για όλη την αλυσίδα παραγωγής και διάσπασης του μιονίου και χαρακτηρίστε τις αλληλεπιδράσεις με τις οποίες πραγματοποιούνται αυτές οι αντιδράσεις.

## Λύση

- α. Ο χρόνος ζωής του πιονίου είναι δύο τάξεις μεγέθους μικρότερος από αυτόν του μιονίου. Συνεπώς, η διαδρομή που διανύει το πiónιο στην ατμόσφαιρα πριν διασπαστεί μπορεί να παραλειφθεί σε σύγκριση με τη διαδρομή του μιονίου. Σε αυτή την προσέγγιση, το ενδιαμέσο στάδιο της παραγωγής του πιονίου μπορεί να παραλειφθεί και να μελετήσουμε την κινηματική μιας 'άμεσης' παραγωγής του μιονίου:

$$p + N \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu + n + N$$

Η διατήρηση της 4-ορμής για την αντίδραση αυτή γράφεται

$$\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_N^i = \mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu + \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_N^f$$

όπου με έντονα γράμματα συμβολίζονται 4-διανύσματα της μορφής  $(E, \vec{p})$  και ο επάνω δείκτης  $i$  ( $f$ ) δείχνει το αρχικό (τελικό) νουκλεόνιο του πυρήνα-στόχου. Τετραγωνίζουμε την τελευταία σχέση, λαμβάνοντας υπόψη ότι το αρχικό νουκλεόνιο βρίσκεται σε ηρεμία (σε σύγκριση με τις σχετικιστικές ταχύτητες που μελετάμε), ότι τα τετράγωνα των 4-ορμών είναι ίσα με τις μάζες των αντίστοιχων σωματιδίων, και συνεπώς τα τετράγωνα των 4-ορμών των δύο λεπτονίων μπορούν να παραλειφθούν, και ότι τα δύο λεπτόνια παράγονται από ένα πiónιο που επίσης παράγεται με πολύ μεγάλη ενέργεια σε σχέση με τη μάζα του, οπότε τα λεπτόνια αυτά εκπέμπονται ομοπαράλληλα δίνοντας

$$\mathbf{p}_\mu \cdot \mathbf{p}_\nu = E_\mu E_\nu - \vec{p}_\mu \cdot \vec{p}_\nu \simeq E_\mu E_\nu - E_\mu E_\nu = 0$$

Ο τετραγωνισμός λοιπόν της προηγούμενης σχέσης δίνει

$$\begin{aligned} m_N^2 + m_N^2 + 2E_p m_N &= m_N^2 + m_N^2 \\ &+ 2\mathbf{p}_\mu \cdot \mathbf{p}_n + 2\mathbf{p}_\mu \cdot \mathbf{p}_N^f + 2\mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{p}_n + 2\mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{p}_N^f + 2\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_N^f \\ \Rightarrow E_p m_N &= \mathbf{p}_\mu \cdot \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_\mu \cdot \mathbf{p}_N^f + \mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{p}_N^f + \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_N^f \end{aligned}$$

Η συντομότερη διαδρομή που μπορούν να διανύσουν τα λεπτόνια για να φτάσουν στο έδαφος είναι η κατακόρυφη, δηλαδή να εκπεμφθούν στη διεύθυνση πρόσπτωσης του κοσμικού πρωτονίου. Τότε, από τη διατήρηση της ορμής, και τα δύο νουκλεόνια της τελικής κατάστασης πρέπει να κινούνται

στην ίδια διεύθυνση, δηλαδή όλα τα σωματίδια της τελικής κατάστασης πρέπει να εκπεμφθούν ομοπαράλληλα με το κοσμικό πρωτόνιο. Επιπλέον, για να έχουν τα λεπτόνια μέγιστη εμβέλεια, πρέπει να πάρουν τη μέγιστη δυνατή ενέργεια από το κοσμικό πρωτόνιο, και συνεπώς τα τελικά νουκλεόνια την ελάχιστη δυνατή. Επειδή οι μάζες των δύο λεπτονίων είναι ίσες (κατά προσέγγιση μηδενικές και οι δύο) και οι μάζες των δύο τελικών νουκλεονίων επίσης (περίπου) ίσες, οι ενέργειες των δύο λεπτονίων πρέπει να είναι ίσες και των δύο τελικών νουκλεονίων επίσης ίσες. Άρα

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_\mu \cdot \mathbf{p}_n &= \mathbf{p}_\mu \cdot \mathbf{p}_N^f = \mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{p}_N^f = E_\mu E_N - E_\mu p_N \\ \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_N^f &= E_N \cdot E_N - p_N \cdot p_N = E_N^2 - p_N^2 = m_N^2 \\ &\Rightarrow E_p m_N = 4E_\mu(E_N - p_N) + m_N^2 \end{aligned}$$

Η διατήρηση της ενέργειας και της ορμής χωριστά για την αντίδραση 'άμεσης' παραγωγής του μιονίου που εξετάζουμε δίνει τις σχέσεις

$$\begin{aligned} E_p + m_N &= E_\mu + E_\nu + E_n + E_N \simeq 2(E_\mu + E_N) \\ &\Rightarrow E_N = \frac{E_p + m_N}{2} - E_\mu \\ p_p &= p_\mu + p_\nu + p_n + p_N \simeq 2(E_\mu + p_N) \Rightarrow p_N = \frac{p_p}{2} - E_\mu \end{aligned}$$

Επομένως

$$E_N - p_N = \frac{E_p - p_p + m_N}{2} \Rightarrow E_p m_N = 2E_\mu(E_p - p_p + m_N) + m_N^2$$

Το μόνιο ζει κατά μέσο όρο για ένα χρόνο  $\tau_\mu$  στο πλαίσιο ηρεμίας του, οπότε στο πλαίσιο αναφοράς της Γης (πλαίσιο εργαστηρίου) όπου κινείται με ταχύτητα  $(p_\mu/E_\mu)c$  ζει κατά μέσο όρο για ένα χρόνο  $\gamma\tau_\mu = (E_\mu/m_\mu)\tau_\mu$  και διανύει ένα μέσο μήκος  $(p_\mu/E_\mu)c \cdot (E_\mu/m_\mu)\tau_\mu = (p_\mu/m_\mu)\tau_\mu$  πριν διασπαστεί (Λυμένες Ασκήσεις 5.4). Η εμβέλεια του μιονίου πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με το ύψος  $h = 99$  χλμ. στο οποίο δημιουργήθηκε το μόνιο, ώστε να μην προλάβει να διασπαστεί φτάνοντας στο έδαφος. Άρα η ελάχιστη ενέργεια του κοσμικού πρωτονίου που απαιτείται για να δώσει στο μόνιο ώθηση αρκετή ώστε να φτάσει στο έδαφος αντιστοιχεί σε ένα μέσο μήκος διαδρομής του μιονίου ίσο με το ύψος  $h$ :

$$\begin{aligned} h &= \frac{p_\mu}{m_\mu} c \tau_\mu \Rightarrow E_\mu \simeq p_\mu = \frac{h m_\mu}{c \tau_\mu} \\ &\Rightarrow E_p m_N = \frac{2 h m_\mu}{c \tau_\mu} (E_p - p_p + m_N) + m_N^2 \\ &\Rightarrow \frac{2 h}{c \tau_\mu} m_\mu p_p = \left( \frac{2 h}{c \tau_\mu} - m_N \right) E_p + \left( \frac{2 h}{c \tau_\mu} m_\mu + m_N \right) m_N \end{aligned}$$

Θέτοντας  $\rho = 2h/(c\tau_\mu) = 2 \times 99000 \text{ m} / 660 \text{ m} = 300$  και τετραγωνίζοντας καταλήγουμε στη συνθήκη

$$\begin{aligned} \rho^2 m_\mu^2 p_p^2 &= \rho^2 m_\mu^2 (E_p^2 - m_N^2) = [(\rho m_\mu - m_N) E_p + (\rho m_\mu + m_N) m_N]^2 \\ &\Rightarrow \rho^2 m_\mu^2 E_p^2 - \rho^2 m_\mu^2 m_N^2 = (\rho m_\mu - m_N)^2 E_p^2 + (\rho m_\mu + m_N)^2 m_N^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2(\rho^2 m_\mu^2 - m_N^2)m_N E_p \\
\Rightarrow & m_N(m_N - 2\rho m_\mu)E_p^2 - 2(m_N^2 - \rho^2 m_\mu^2)m_N E_p \\
& + \underbrace{2\rho^2 m_\mu^2 m_N^2 + 2\rho m_\mu m_N^3 + m_N^4}_{= m_N^2 [\rho^2 m_\mu^2 + (\rho m_\mu + m_N)^2]} = 0 \\
\Rightarrow & (2\rho m_\mu - m_N)E_p^2 - 2[(\rho m_\mu)^2 - m_N^2]E_p \\
& - m_N[(\rho m_\mu)^2 + (\rho m_\mu + m_N)^2] = 0
\end{aligned}$$

Εφόσον  $\rho m_\mu = 30 \text{ GeV} \gg m_N = 1 \text{ GeV}$ , η τελευταία εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί:

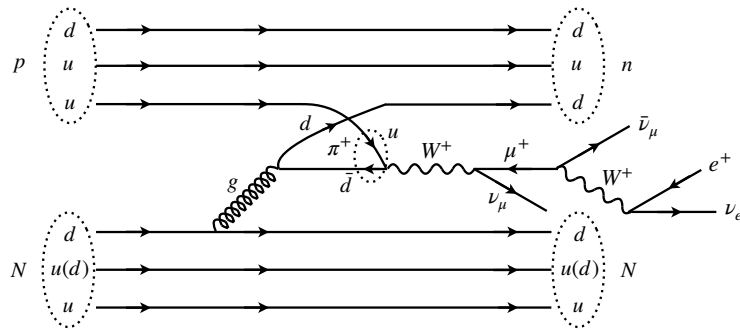
$$\begin{aligned}
2\rho m_\mu E_p^2 - 2(\rho m_\mu)^2 E_p - 2m_N(\rho m_\mu)^2 &\simeq 0 \\
\Rightarrow E_p^2 - \rho m_\mu E_p - \rho m_\mu m_N &= 0
\end{aligned}$$

με θετική λύση

$$E_p = \frac{1}{2} \left[ \rho m_\mu + \sqrt{\rho m_\mu (\rho m_\mu + 4m_N)} \right] \simeq \rho m_\mu = 30 \text{ GeV}$$

οπότε η ελάχιστη απαιτούμενη κινητική ενέργεια του κοσμικού πρωτονίου είναι  $T_p^{\min} = E_p - m_N = 29 \text{ GeV}$ . Αν δεν παραλείψουμε την  $m_N$  σε σύγκριση με την  $\rho m_\mu$  στην παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς  $E_p$ , τότε η λύση έχει την ακριβέστερη τιμή  $E_p = 31.5 \text{ GeV}$  και η ελάχιστη απαιτούμενη κινητική ενέργεια του κοσμικού πρωτονίου είναι  $T_p^{\min} = 30.5 \text{ GeV}$ . **Παρατήρηση:** Η ελάχιστη ενέργεια που χρειάζεται κατά μέσο όρο το μόνιο για να φτάσει στο έδαφος, όπως δείξαμε παραπάνω, είναι  $E_\mu = (hm_\mu)/(c\tau_\mu) = (\rho/2)m_\mu = 15 \text{ GeV}$ . Την ίδια ενέργεια παίρνει και το νετρίνο, που είναι κινηματικά συμμετρικό με το μόνιο στο υπερ-σχετικιστικό όριο των αμελητέων μαζών, όταν τα δύο λεπτόνια εκπέμπονται ομοπαράλληλα με το κοσμικό πρωτόνιο. Το άθροισμα των δύο αυτών ενεργειών είναι η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να μεταφερθεί από το κοσμικό πρωτόνιο στα λεπτόνια. Σε αυτήν προστίθεται και μια ελάχιστη κινητική ενέργεια ανάκρουσης των δύο τελικών νουκλεονίων, περίπου μισό  $\text{GeV}$ , οπότε εξηγείται το κατώφλι  $T_p^{\min} = 30.5 \text{ GeV}$  που βρήκαμε. Σε αυτή την ανάλυση, το πόνιο παίζει το ρόλο του βραχύβιου 'μεσάζοντα' μεταξύ του αρχικού αδρονικού και του τελικού λεπτονικού συστήματος και δεν επηρεάζει την κινηματική της διαδικασίας.

- β. Το διάγραμμα Feynman της αντίδρασης φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Η παραγωγή του πιονίου είναι ισχυρή, ενώ οι διασπάσεις του πιονίου και του μιονίου είναι ασθενείς.



Το παραπάνω σύνθετο διάγραμμα, που περιγράφει όλη την αλυσίδα παραγωγής-διάσπασης, μπορεί να αναλυθεί στα τρία ακόλουθα διαγράμματα, που περιγράφουν τις τρεις αντιδράσεις χωριστά. Στο διάγραμμα παραγωγής του πιονίου,  $q$  είναι οποιοδήποτε κουάρκ του νουκλεονίου-στόχου. **Παρατηρήσεις:** Στο πρώτο διάγραμμα διατηρείται ο βαρυονικός αριθμός, ενώ στα άλλα δύο διατηρείται ο λεπτονικός αριθμός: της μιονικής γεύσης στο δεύτερο και της ηλεκτρονικής γεύσης στο τρίτο. Σε όλα τα διαγράμματα διατηρείται το ηλεκτρικό φορτίο. Η μεταφορά ορμής από το αδρονικό στο λεπτονικό σύστημα γίνεται μέσω του κουάρκ  $u$  του κοσμικού πρωτονίου στο πρώτο διάγραμμα και του μποζονίου  $W$  στο δεύτερο διάγραμμα. Προσέξτε ότι, ενώ η ορμή του (εικονικού)  $W$  στο δεύτερο διάγραμμα είναι  $30 \text{ GeV}$ , η μάζα του είναι ίση με τη μάζα του πιονίου,  $0.14 \text{ GeV}$ .

