ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2021 – 2022

«ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ & ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ»

Κ. ΒΕΛΛΙΔΗΣ - Θ. ΜΕΡΤΖΙΜΕΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΑΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ
20 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΘΕΜΑ Σ1

Δίνονται οι ακόλουθοι κινηματικά εφικτοί τρόποι διάσπασης του ουδέτερου πιονίου $\pi^0\left(|u\bar{u}-d\bar{d}\rangle/\sqrt{2}\right)$:

$$
\begin{aligned}
\pi^0 &\longrightarrow 2\gamma \\
\pi^0 &\longrightarrow \gamma + e^+ + e^- \\
\pi^0 &\longrightarrow e^+ + e^- \\
\pi^0 &\longrightarrow 2e^+ + 2e^- \\
\pi^0 &\longrightarrow \nu + \bar{\nu} \\
\pi^0 &\longrightarrow 3\gamma \\
\pi^0 &\longrightarrow \mu^+ + e^-,\ \mu^- + e^+
\end{aligned}
$$

1. Εξετάστε ποιοι από αυτούς επιτρέπονται από το Καθιερωμένο Πρότυπο και δικαιολογήστε την απάντησή σας.
2. Για όλους τους τρόπους που επιτρέπονται από το Καθιερωμένο Πρότυπο, σχεδιάστε το διάγραμμα ή τα διαγράμματα Feynman χαμηλότερης τάξης που τους περιγράφουν σε επίπεδο στοιχειωδών σωματιδίων και από τα διαγράμματα προσδιορίστε με ποια ή ποιες αλληλεπιδράσεις μπορεί ο κάθε τρόπος να πραγματοποιηθεί.

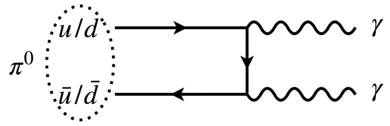
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Ελέγχουμε τη διατήρηση όλων των κβαντικών αριθμών για κάθε τρόπο διάσπασης:
   i) Το **ηλεκτρικό φορτίο** διατηρείται σε όλους τους τρόπους.
   ii) Δεν υπάρχουν βαρυόνια σε κανέναν τρόπο, άρα **δεν ελέγχουμε τον βαρυονικό αριθμό**.
   iii) Ο **λεπτονικός αριθμός** διατηρείται σε όλους τους τρόπους, πλην του $\pi^0 \longrightarrow \mu^{\pm}e^{\mp}$, ο οποίος συνεπώς απαγορεύεται.
   iv) Η **ομοτιμία** του π^0 είναι -1 (ανήκει στην ομάδα των ψευδοβαθμωτών μεσονίων), ενώ στην τελική κατάσταση εξαρτάται από την σχετική τροχιακή στροφορμή των προϊόντων που δεν είναι ορισμένη (μπορεί να πάρει τιμές 1, 2, 3, … ανάλογα με την κινητική ενέργεια που προκύπτει από τις διαφορές μαζών μητρικού και θυγατρικών σωματιδίων), οπότε μπορεί να είναι -1 σε όλους τους τρόπους και άρα να διατηρείται, γι΄ αυτό και δεν την εξετάζουμε.
   v) Για την **συζυγία**, έχουμε στην αρχική κατάσταση $\hat{C}|\pi^0\rangle = \hat{C}|u\bar{u}-d\bar{d}\rangle/\sqrt{2} = (-1)^{L+S}|u\bar{u}-d\bar{d}\rangle/\sqrt{2} = (-1)^{0+0}|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle$, δηλαδή η συζυγία του π^0 είναι $+1$ (η συνολική τροχιακή στροφορμή L και το συνολικό σπιν S του ζεύγους κουάρκ-αντικουάρκ μέσα σε ένα ψευδοβαθμωτό μεσόνιο όπως το π^0 είναι 0). Η συζυγία της τελικής κατάστασης σε όλους τους τρόπους διάσπασης που περιλαμβάνουν ένα ζεύγος λεπτονίου-αντιλεπτονίου περιέχει έναν παράγοντα $(-1)^{L+S}$ (όπως στην περίπτωση του ζεύγους κουάρκ-αντικουάρκ μέσα στα μεσόνια). Αυτός ο παράγοντας εξαρτάται από τη σχετική τροχιακή στροφορμή L του ζεύγους που δεν είναι ορισμένη (εξαρτάται από τη σχετική κινητική τους ενέργεια), οπότε η συζυγία της τελικής κατάστασης μπορεί πάντα να είναι $+1$, όπως της αρχικής. Οι τρόποι που δεν περιλαμβάνουν ζεύγος λεπτονίου-αντιλεπτονίου είναι ο $\pi^0 \longrightarrow 2\gamma$, όπου η συζυγία της τελικής κατάστασης είναι $C(\gamma)^2 = (-1)^2 = +1$

και άρα ο τρόπος αυτός επιτρέπεται, και ο $\pi^0 \longrightarrow 3\gamma$, όπου η συζυγία της τελικής κατάστασης είναι $C(\gamma)^3 = (-1)^3 = -1$ και συνεπώς ο τρόπος αυτός απαγορεύεται.

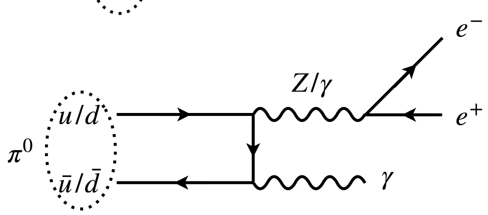
2. Συνοψίζοντας τα προηγούμενα συμπεράσματα, οι μόνοι τρόποι διάσπασης που απαγορεύονται είναι ο $\pi^0 \longrightarrow 3\gamma$ και ο $\pi^0 \longrightarrow \mu^\pm e^\mp$. Για την περιγραφή των υπόλοιπων τρόπων, χρειαζόμαστε διαγράμματα Feynman που να συνδέουν μια αρχική κατάσταση που περιλαμβάνει κουάρκ με μια τελική κατάσταση που δεν περιλαμβάνει κουάρκ, άρα οι φορείς αλληλεπίδρασης δεν μπορούν να είναι γλουόνια. Επίσης, σε κανέναν τρόπο δεν έχουμε αλλαγή γεύσης είτε κάποιου κουάρκ είτε κάποιου λεπτονίου, έχουμε μόνο εξαΰλωση των κουάρκ ίδιας γεύσης μέσα στο π^0 ή/και δίδυμη γένεση λεπτονίου-αντιλεπτονίου ίδιας γεύσης, άρα οι φορείς αλληλεπίδρασης δεν μπορούν να είναι μποζόνια W. Μένουν λοιπόν μόνο τα φωτόνια και τα μποζόνια Z που και τα δύο αλληλεπιδρούν τόσο με τα κουάρκ όσο και με τα λεπτόνια μέσω της ηλεκτρομαγνητικής (φωτόνια) και της ασθενούς (Z) αλληλεπίδρασης. Επομένως, τα διαγράμματα χαμηλότερης τάξης, τα οποία περιγράφουν και την αλληλεπίδραση που προκαλεί τη διάσπαση, είναι τα εξής:

$\pi^0 \longrightarrow 2\gamma$



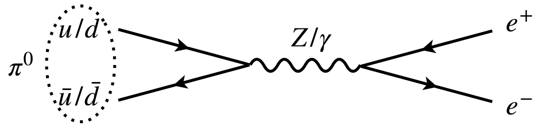
Ηλεκτρομαγνητική

$\pi^0 \longrightarrow \gamma e^+ e^-$



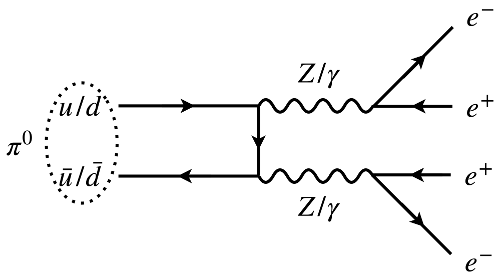
Ηλεκτρομαγνητική + ασθενής

$\pi^0 \longrightarrow e^+ e^-$



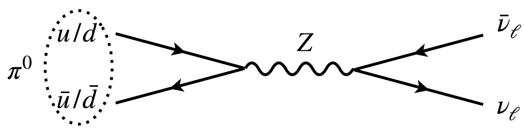
Ηλεκτρομαγνητική + ασθενής

$\pi^0 \longrightarrow 2e^+ 2e^-$



Ηλεκτρομαγνητική + ασθενής

$\pi^0 \longrightarrow \nu_\ell \bar{\nu}_\ell$



Ασθενής

Στα παραπάνω διαγράμματα το σύμβολο u/d σημαίνει είτε το κουάρκ u είτε το κουάρκ d, το σύμβολο Z/γ σημαίνει είτε το μποζόνιο Z είτε το φωτόνιο και ο δείκτης $\ell = e, \mu, \tau$ στο τελευταίο διάγραμμα δείχνει τη γεύση του νετρίνου (πρέπει να είναι η ίδια για το νετρίνο και το αντινετρίνο ώστε να διατηρείται ο λεπτονικός αριθμός).

<u>ΘΕΜΑ Σ2</u>

Η κυματοσυνάρτηση σπιν-γεύσης του βαρυονίου Δ^+ στην κατάσταση με τρίτη προβολή του σπιν $+1/2$ είναι

$$
\begin{aligned}
|\,\Delta^+\uparrow\,\rangle = \big(\,&|\,u\uparrow u\uparrow d\downarrow\,\rangle + |\,u\uparrow u\downarrow d\uparrow\,\rangle + |\,u\downarrow u\uparrow d\uparrow\,\rangle + \\
&|\,u\uparrow d\downarrow u\uparrow\,\rangle + |\,u\uparrow d\uparrow u\downarrow\,\rangle + |\,u\downarrow d\uparrow u\uparrow\,\rangle + \\
&|\,d\downarrow u\uparrow u\uparrow\,\rangle + |\,d\uparrow u\uparrow u\downarrow\,\rangle + |\,d\uparrow u\downarrow u\uparrow\,\rangle\big)/3
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή μαγνητικής διπολικής ροπής των κουάρκ $\hat{\mu}_z = q/(2m)\,\hat{S}_z$ συναρτήσει του τελεστή τρίτης προβολής του σπιν $\hat{S}_z$, όπου q το φορτίο και $m = 338$ MeV η μάζα των κουάρκ πρώτης γενιάς "ντυμένη" με την ενέργεια αλληλεπίδρασής τους, υπολογίστε τη μαγνητική ροπή αυτού του βαρυονίου

$$\mu_{\Delta^+\uparrow} = 2\,\langle \Delta^+\uparrow|\,(\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_3)_z\,|\Delta^+\uparrow\,\rangle$$

σε μονάδες μαγνητόνης $\mu_N = e/(2m_N)$, όπου $m_N = 939$ MeV είναι η μάζα του νουκλεονίου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρούμε ότι η κυματοσυνάρτηση του δοθέντος βαρυονίου αποτελείται από τρεις τριάδες όρων, η καθεμιά από τις οποίες είναι ίδια με τις άλλες μετά από μετάθεση του κουάρκ d και συνεπώς κάθε τριάδα έχει την ίδια συνεισφορά. Άρα:

$$
\begin{aligned}
\mu_{\Delta^+\uparrow} = 3\times\frac{2}{3^3}\Bigg[&\langle u\uparrow u\uparrow d\downarrow|\left(\frac{q_1}{2m}\hat{S}_{z1} + \frac{q_2}{2m}\hat{S}_{z2} + \frac{q_3}{2m}\hat{S}_{z3}\right)|\,u\uparrow u\uparrow d\downarrow\,\rangle + \\
&\langle u\uparrow u\downarrow d\uparrow|\left(\frac{q_1}{2m}\hat{S}_{z1} + \frac{q_2}{2m}\hat{S}_{z2} + \frac{q_3}{2m}\hat{S}_{z3}\right)|\,u\uparrow u\downarrow d\uparrow\,\rangle + \\
&\langle u\downarrow u\uparrow d\uparrow|\left(\frac{q_1}{2m}\hat{S}_{z1} + \frac{q_2}{2m}\hat{S}_{z2} + \frac{q_3}{2m}\hat{S}_{z3}\right)|\,u\downarrow u\uparrow d\uparrow\,\rangle\Bigg]
\end{aligned}
$$

Ο παράγοντας $1/3^2$ προέρχεται από τον συντελεστή κανονικοποίησης $1/3$ της κυματοσυνάρτησης που εμφανίζεται και στο $\langle \Delta^+\uparrow|$ και στο $|\,\Delta^+\uparrow\,\rangle$ στη μέση τιμή $\langle \Delta^+\uparrow|\,\hat{\mu}_z\,|\Delta^+\uparrow\,\rangle$ της μαγνητικής ροπής. Άρα, βγάζοντας κοινό παράγοντα το κλάσμα $1/(2m)$,

$$
\begin{aligned}
\mu_{\Delta^+\uparrow} = \frac{1}{3m}\Big[&\langle u\uparrow u\uparrow d\downarrow|\left(q_1\hat{S}_{z1} + q_2\hat{S}_{z2} + q_3\hat{S}_{z3}\right)|\,u\uparrow u\uparrow d\downarrow\,\rangle + \\
&\langle u\uparrow u\downarrow d\uparrow|\left(q_1\hat{S}_{z1} + q_2\hat{S}_{z2} + q_3\hat{S}_{z3}\right)|\,u\uparrow u\downarrow d\uparrow\,\rangle + \\
&\langle u\downarrow u\uparrow d\uparrow|\left(q_1\hat{S}_{z1} + q_2\hat{S}_{z2} + q_3\hat{S}_{z3}\right)|\,u\downarrow u\uparrow d\uparrow\,\rangle\Big]
\end{aligned}
$$

Οι καταστάσεις των κουάρκ παραγοντοποιούνται,

$$|\,u\uparrow u\uparrow d\downarrow\,\rangle = |\,u\uparrow\,\rangle|\,u\uparrow\,\rangle|\,d\downarrow\,\rangle \;\text{ κλπ.}$$

και είναι ορθοκανονικές, δηλαδή

$$\langle u\uparrow u\uparrow d\downarrow|\,\hat{S}_{z1}\,|\,u\uparrow u\uparrow d\downarrow\,\rangle = \langle u\uparrow|\,\hat{S}_{z1}\,|\,u\uparrow\,\rangle\langle u\uparrow|\,u\uparrow\,\rangle\langle d\downarrow|\,d\downarrow\,\rangle = \langle u\uparrow|\,\hat{S}_{z1}\,|\,u\uparrow\,\rangle \;\text{ κλπ.}$$

οπότε:

$$
\begin{aligned}
\mu_{\Delta^+\uparrow} = \frac{1}{3m}\Big(&q_1\langle u\uparrow|\,\hat{S}_{z1}\,|\,u\uparrow\,\rangle + q_2\langle u\uparrow|\,\hat{S}_{z2}\,|\,u\uparrow\,\rangle + q_3\langle d\downarrow|\,\hat{S}_{z3}\,|\,d\downarrow\,\rangle \\
&q_1\langle u\uparrow|\,\hat{S}_{z1}\,|\,u\uparrow\,\rangle + q_2\langle u\downarrow|\,\hat{S}_{z2}\,|\,u\downarrow\,\rangle + q_3\langle d\uparrow|\,\hat{S}_{z3}\,|\,d\uparrow\,\rangle \\
&q_1\langle u\downarrow|\,\hat{S}_{z1}\,|\,u\downarrow\,\rangle + q_2\langle u\uparrow|\,\hat{S}_{z2}\,|\,u\uparrow\,\rangle + q_3\langle d\uparrow|\,\hat{S}_{z3}\,|\,d\uparrow\,\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας τα φορτία που αντιστοιχούν στο κουάρκ 1 (u), στο 2 (u) και στο 3 (d),

$$\mu_{\Delta^+\uparrow} = \frac{1}{3m}\Big(q_u\langle u\uparrow|\hat{S}_z|u\uparrow\rangle + q_u\langle u\uparrow|\hat{S}_z|u\uparrow\rangle + q_d\langle d\downarrow|\hat{S}_z|d\downarrow\rangle$$
$$q_u\langle u\uparrow|\hat{S}_z|u\uparrow\rangle + q_u\langle u\downarrow|\hat{S}_z|u\downarrow\rangle + q_d\langle d\uparrow|\hat{S}_z|d\uparrow\rangle$$
$$q_u\langle u\downarrow|\hat{S}_z|u\downarrow\rangle + q_u\langle u\uparrow|\hat{S}_z|u\uparrow\rangle + q_d\langle d\uparrow|\hat{S}_z|d\uparrow\rangle\Big) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \mu_{\Delta^+\uparrow} = \frac{1}{3m}\left(4q_u\langle u\uparrow|\hat{S}_z|u\uparrow\rangle + 2q_u\langle u\downarrow|\hat{S}_z|u\downarrow\rangle + 2q_d\langle d\uparrow|\hat{S}_z|d\uparrow\rangle + q_d\langle d\downarrow|\hat{S}_z|d\downarrow\rangle\right)$$

Η κατάσταση σπιν-γεύσης καθενός κουάρκ επίσης παραγοντοποιείται,

$$|u\uparrow\rangle = |u\rangle|\uparrow\rangle \;\text{ κλπ.}$$

και οι παράγοντες είναι ορθοκανονικοί,

$$\langle u|u\rangle = \langle d|d\rangle = 1,\ \langle u|d\rangle = \langle d|u\rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle\uparrow|\uparrow\rangle = \langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1,\ \langle\uparrow|\downarrow\rangle = \langle\downarrow|\uparrow\rangle = 0$$

οπότε

$$\begin{aligned}\mu_{\Delta^+\uparrow} &= \frac{1}{3m}\left(4q_u\langle u|u\rangle\langle\uparrow|\hat{S}_z|\uparrow\rangle + 2q_u\langle u|u\rangle\langle\downarrow|\hat{S}_z|\downarrow\rangle + 2q_d\langle d|d\rangle\langle\uparrow|\hat{S}_z|\uparrow\rangle + q_d\langle d|d\rangle\langle\downarrow|\hat{S}_z|\downarrow\rangle\right)\\ &= \frac{1}{3m}\left(4q_u\langle\uparrow|\hat{S}_z|\uparrow\rangle + 2q_u\langle\downarrow|\hat{S}_z|\downarrow\rangle + 2q_d\langle\uparrow|\hat{S}_z|\uparrow\rangle + q_d\langle\downarrow|\hat{S}_z|\downarrow\rangle\right)\end{aligned}$$

Οι μέσες τιμές του τελεστή τρίτης προβολής του σπιν προκύπτουν άμεσα από τις ιδιοτιμές του,

$$\hat{S}_z|\uparrow\rangle = +\frac{1}{2}|\uparrow\rangle \;\Rightarrow\; \langle\uparrow|\hat{S}_z|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\hat{S}_z|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}|\downarrow\rangle \;\Rightarrow\; \langle\downarrow|\hat{S}_z|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}\langle\downarrow|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}$$

και τα φορτία των κουάρκ είναι $q_u = (2/3)e$ και $q_d = -(1/3)e$, όπου $e > 0$ το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο, συνεπώς:

$$\begin{aligned}\mu_{\Delta^+\uparrow} &= \frac{e}{3m}\left[4\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\\ &= \frac{e}{3m}\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{e}{3m}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{e}{3m}\times\frac{1}{2} = \frac{e}{6m} = \frac{m_N}{3m}\times\frac{e}{2m_N} = \frac{m_N}{3m}\mu_N\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $m = 338$ MeV και $m_N = 939$ MeV, βρίσκουμε $\mu_{\Delta^+\uparrow} = 0.926\,\mu_N$. Παρατηρούμε ότι η μαγνητική ροπή του Δ^+ είναι το 1/3 της μαγνητικής ροπής $(m_N/m)\mu_N$ του πρωτονίου, λόγω της συμμετρικότερης δομής σπιν-γεύσης που έχει το βαρυόνιο Δ^+ σε σχέση με το πρωτόνιο.