ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2023 — 2024

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ & ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ

Κ. ΒΕΛΛΙΔΗΣ — Θ. ΜΕΡΤΖΙΜΕΚΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ

3.1 Δείξτε ότι οποιαδήποτε βαθμωτή συνάρτηση $f(x, y, z)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα μιας ιδιοσυνάρτησης $f_+(x, y, z)$ της ομοτιμίας με ιδιοτιμή +1 και μιας ιδιοσυνάρτησης $f_-(x, y, z)$ της ομοτιμίας με ιδιοτιμή -1. Βρείτε τις f_+ και f_- συναρτήσει της f.

Από την f και εφαρμόζοντας μόνο χωρική ανάκλαση, μπορούμε να φτιάξουμε μόνο δύο ανεξάρτητους γραμμικούς συνδυασμούς:

$$\frac{1}{2}\left[f(\vec{r}) + f(-\vec{r})\right] = f_+(\vec{r})$$
$$\frac{1}{2}\left[f(\vec{r}) - f(-\vec{r})\right] = f_-(\vec{r})$$

όπου $\vec{r} = (x, y, z)$, οι οποίοι είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή ομοτιμίας $\hat{P}$ με τις ζητούμενες ιδιοτιμές +1 και -1, αντίστοιχα:

$$\hat{P}f_+(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left[\hat{P}f(\vec{r}) + \hat{P}f(-\vec{r})\right] = \frac{1}{2}\left[f(-\vec{r}) + f(\vec{r})\right] = f_+(\vec{r})$$
$$\hat{P}f_-(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left[\hat{P}f(\vec{r}) - \hat{P}f(-\vec{r})\right] = \frac{1}{2}\left[f(-\vec{r}) - f(\vec{r})\right] = -f_-(\vec{r})$$

Η τυχαία βαθμωτή συνάρτηση f είναι πράγματι το άθροισμα των f_+ και f_- :

$$f_+(\vec{r}) + f_-(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left[f(\vec{r}) + \cancel{f(-\vec{r})} + f(\vec{r}) - \cancel{f(-\vec{r})}\right] = f(\vec{r})$$

3.2 Δείξτε ότι στην “πρωτογενή” β-διάσπαση $n \to p + e^-$ παραβιάζεται η διατήρηση της στροφορμής. Αν ήσαστε ο Pauli και προτείνατε ως πραγματική β-διάσπαση την αντίδραση $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ χωρίς να γνωρίζετε τίποτε για το νετρίνο, τι σπιν θα του αποδίδατε;

Στο ΚΜ της διάσπασης $n \to p + e^-$ (πλαίσιο ηρεμίας του νετρονίου), η στροφορμή της αρχικής κατάστασης είναι $J_n = 1/2$ και της τελικής J_{p+e^-} με $|L - S| \leq J_{p+e^-} \leq L + S$, όπου $S = 0$ ή 1 είναι το άθροισμα των σπιν του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου και $L = 0,1,2,\ldots$ είναι η σχετική τροχιακή στροφορμή του ζεύγους. Άρα, η J_{p+e^-} μπορεί να πάρει μόνο ακέραιες τιμές από 0 μέχρι $L + 1$, δηλαδή δεν μπορεί να είναι ίση με 1/2, οπότε η στροφορμή δεν διατηρείται.

Για να διατηρείται η στροφορμή θα πρέπει η στροφορμή της τελικής κατάστασης να παίρνει ημιακέραιες τιμές, οπότε το άθροισμα S των σπιν των τριών προϊόντων διάσπασης θα πρέπει να είναι ημιακέραιο. Επειδή $|S_{p+e^-} - S_{\bar{\nu}_e}| \leq S \leq S_{p+e^-} + S_{\bar{\nu}_e}$ και $S_{p+e^-} = 0,1$, το σπιν του νετρίνου θα πρέπει να είναι 1/2, δίνοντας $J_{p+e^-+\bar{\nu}_e} = 1/2$ όταν $S = 1/2$ (ένα σωματίδιο έχει σπιν αντιπαράλληλο με τα άλλα δύο) και η συνολική τροχιακή στροφορμή είναι $L = 0$ ή όταν $S = 3/2$ (και τα τρία σωματίδια έχουν παράλληλα σπιν) και $L = 1$ ή 2.

3.3 Στη διάσπαση $\Delta^{++} \to p + \pi^+$, ποιες είναι οι δυνατές τιμές του κβαντικού αριθμού l της τροχιακής στροφορμής της τελικής κατάστασης στο ΚΜ αν γνωρίζουμε ότι το σπιν του βαρυονίου Δ^{++} είναι 3/2;

Επειδή το πρωτόνιο έχει σπιν 1/2 και το πιόνιο έχει σπιν 0, το άθροισμα των δύο σπιν πρέπει να είναι 1/2. Από τη διατήρηση της στροφορμής, η στροφορμή στην τελική κατάσταση είναι $J = 3/2$, οπότε $|l - 1/2| \leq 3/2 \leq l + 1/2$. Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται από τις τιμές $l = 1$, που αντιστοιχεί σε $J = l + 1/2$, και $l = 2$, που αντιστοιχεί σε $J = l - 1/2$. Στη φασματοσκοπία μιλάμε αντίστοιχα για p-καταστάσεις και d-καταστάσεις (ή p-κύματα και d-κύματα).

3.4 Είναι το νετρίνο ιδιοκατάσταση της ομοτιμίας; Αν ναι, ποια είναι η ιδιο-ομοτιμία του (intrinsic parity);

Η χωρική ανάκλαση μετασχηματίζει ένα αριστερόστροφο σωματίδιο σε δεξιόστροφο και αντίστροφα. Όμως, δεξιόστροφα νετρίνα δεν παρατηρούνται, συνεπώς το νετρίνο δεν είναι ιδιοκατάσταση της ομοτιμίας.

3.5 Για να μεταπίπτουν δύο αδρόνια το ένα στο άλλο, $A \longleftrightarrow B$, είναι απαραίτητο να έχουν την ίδια μάζα (που στην πράξη σημαίνει ότι πρέπει να είναι αντισωματίδια το ένα του άλλου), το ίδιο φορτίο και τον ίδιο βαρυονικό αριθμό. Δείξτε ότι, με αυτές τις συνθήκες, τα A και B πρέπει να είναι ουδέτερα μεσόνια και ταυτοποιήστε τα δυνατά ενδεχόμενα για το περιεχόμενό τους σε κουάρκ. Ποια είναι αυτά τα μεσόνια; Γιατί το νετρόνιο δεν αναμιγνύεται με το αντινετρόνιο, με τον ίδιο τρόπο που τα μεσόνια K^0 και $\bar{K}^0$ αναμιγνύονται για να δώσουν τις (προσεγγιστικές) ιδιοκαταστάσεις K_1 και K_2 του τελεστή CP; Γιατί δεν βλέπουμε μίξη των διανυσματικών μεσονίων K^{*0} και $\bar{K}^{*0}$;

Εφόσον τα δύο αδρόνια πρέπει να έχουν ακριβώς την ίδια μάζα, ώστε να επιτρέπεται ενεργειακά η αυθόρμητη μετάπτωσή τους, πρέπει να είναι αντισωματίδια το ένα του άλλου. Δεν γνωρίζουμε κανένα είδος αδρονίων πλήρως εκφυλισμένων (δηλαδή με ακριβώς την ίδια μάζα) με κάποιο άλλο είδος.

Για να διατηρείται το φορτίο στη μετάπτωση, θα πρέπει τα δύο αδρόνια να έχουν το ίδιο φορτίο. Εφόσον όμως είναι αντισωματίδια το ένα του άλλου, τα φορτία τους πρέπει να είναι αντίθετα. Συνεπώς, πρέπει και τα δύο να έχουν μηδενικό φορτίο, δηλαδή να είναι ηλεκτρικά ουδέτερα.

Για να διατηρείται ο βαρυονικός αριθμός στη μετάπτωση, θα πρέπει να είναι ο ίδιος και για τα δύο αδρόνια. Αλλά επειδή είναι και αντισωματίδια το ένα του άλλου, θα πρέπει να είναι και αντίθετος για τα δύο αδρόνια. Επομένως, πρέπει να είναι μηδέν, δηλαδή τα δύο αδρόνια να είναι μεσόνια.

Τα ουδέτερα μεσόνια αποτελούνται από ένα ζεύγος κουάρκ-αντικουάρκ αντίθετου φορτίου, δηλαδή και τα δύο είναι ‘επάνω’ ή και τα δύο ‘κάτω’ γεύσεις. Για να είναι το μεσόνιο και το αντι-μεσόνιο διακριτές αδρονικές καταστάσεις, πρέπει οι δύο γεύσεις να είναι διαφορετικές. Με τις 6 διαθέσιμες γεύσεις του Καθιερωμένου Προτύπου, και δεδομένου ότι η κορυφαία γεύση δεν αδρονοποιείται, οι δυνατοί συνδυασμοί είναι $|d\bar{s}\rangle = |K^0\rangle$, $|u\bar{c}\rangle = |D^0\rangle$ και $|d\bar{b}\rangle = |B_d^0\rangle$ ή $|s\bar{b}\rangle = |B_s^0\rangle$.

Το νετρόνιο έχει βαρυονικό αριθμό +1 και το αντινετρόνιο -1, άρα δεν μπορούν να αναμιχθούν.

Το διανυσματικό μεσόνιο K^{*0} με μάζα 892 MeV/c^2 έχει κβαντικούς αριθμούς $L = 0$ και $S = 1$, με τα σπιν των δύο κουάρκ παράλληλα. Επομένως, $P|K^{*0}\rangle = -|K^{*0}\rangle$, $C|K^{*0}\rangle = (-1)^{L+S}|\bar{K}^{*0}\rangle = -|\bar{K}^{*0}\rangle$ και συνεπώς $CP|K^{*0}\rangle = |\bar{K}^{*0}\rangle$. Δηλαδή, οι δύο ιδιοκαταστάσεις CP έχουν τις αντίθετες ιδιοτιμές από τις αντίστοιχες του K^0:

$$\left.\begin{aligned} |K_1^*\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^{*0}\rangle - |\bar{K}^{*0}\rangle\right) \\ |K_2^*\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^{*0}\rangle + |\bar{K}^{*0}\rangle\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} CP|K_1^*\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^{*0}\rangle - |\bar{K}^{*0}\rangle\right) = -|K_1^*\rangle \\ CP|K_2^*\rangle &= +\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^{*0}\rangle + |\bar{K}^{*0}\rangle\right) = +|K_2^*\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} K_1^* \to 3\pi \\ K_2^* \to 2\pi \end{cases}$$

Τώρα όμως ο διαθέσιμος φασικός χώρος είναι πολύ μεγάλος και για τους δύο τρόπους διάσπασης: ~620 MeV για 2 πιόνια και ~480 MeV για 3 πιόνια. Και στους δύο τρόπους, η μέση κινητική ενέργεια ανά πιόνιο είναι μεγαλύτερη από τη μάζα του πιονίου. Άρα, και οι δύο ιδιοκαταστάσεις CP έχουν πολύ μικρούς χρόνους ζωής, μικρότερους από τους χρόνους ζωής των K_S, οπότε αυτή η μίξη δεν μπορεί να παρατηρηθεί.

3.6 Βρείτε τις ιδιοτιμές της ομοτιμίας P και της συζυγίας C για τη θεμελιώδη κατάσταση ($L = 0,\ S = 0$) του μεσονίου π και για την πρώτη του διεγερμένη κατάσταση ($L = 0,\ S = 1$), το μεσόνιο ρ. Γιατί το π έχει μεγαλύτερο χρόνο ζωής από το ρ; Εξηγήστε γιατί παρατηρείται η διάσπαση $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$, ενώ δεν παρατηρείται η διάσπαση $\rho^0 \to \pi^0\pi^0$.

Τα δύο μεσόνια, π και ρ, έχουν την ίδια δομή κουάρκ στις τρεις καταστάσεις φορτίου τους:

$$\left(\pi^+, \pi^0, \pi^-\right) \ \sim\ \left(\rho^+, \rho^0, \rho^-\right) \ \sim\ \Big(|u\bar{d}\rangle,\ |u\bar{u} - d\bar{d}\rangle/\sqrt{2},\ |\bar{u}d\rangle\Big)$$

Επίσης, έχουν και τα δύο μηδενική τροχιακή στροφορμή των κουάρκ ($L = 0$). Η διαφορά τους οφείλεται στο γεγονός ότι το κουάρκ και το αντικουάρκ έχουν αντιπαράλληλα σπιν στο π ($S = 0 \Rightarrow J = 0$), αλλά ομοπαράλληλα στο ρ ($S = 1 \Rightarrow J = 1$). Επομένως, και τα δύο μεσόνια έχουν ομοτιμία

$$P(q)P(\bar{q})(-1)^L = (+1)(-1)(+1) = -1$$

Η συζυγία των μεσονίων που περιέχουν γεύσεις πρώτης γενιάς δίνεται από τη σχέση

$$C\,|q_1\bar{q}_2\rangle = (-1)^{I_1+I_2-I}(-1)^{L+S}\,|\bar{q}_1 q_2\rangle$$

όπου I_1 και I_2 είναι τα ισοσπίν των δύο κουάρκ q_1 και q_2 και I το ισοσπίν του μεσονίου. Για τα μεσόνια π και ρ:

$$\begin{aligned} C\,|\pi\rangle &= (-1)^{1/2+1/2-1}(-1)^{0+0} = |\pi\rangle \\ C\,|\rho\rangle &= (-1)^{1/2+1/2-1}(-1)^{0+1} = -\,|\rho\rangle \end{aligned}$$

Δηλαδή, τα δύο μεσόνια έχουν την ίδια ομοτιμία (αρνητική), αλλά αντίθετη συζυγία (θετική το π και αρνητική το ρ). Γράφουμε συμβολικά $J^{PC}(\pi) = 0^{-+}$ και $J^{PC}(\rho) = 1^{--}$.

Ο κυρίαρχος τρόπος διάσπασης του μεσονίου ρ είναι σε δύο πιόνια: $\rho^{\pm} \to \pi^{\pm}\pi^{0}$, $\rho^{0} \to \pi^{+}\pi^{-}$. Αυτή η διάσπαση πραγματοποιείται με την ισχυρή αλληλεπίδραση. Αντίθετα, το ουδέτερο πιόνιο διασπάται κυρίως σε δύο φωτόνια, $\pi^{0} \to \gamma\gamma$, που γίνεται με την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση, και το φορτισμένο πιόνιο διασπάται κυρίως σε μιόνιο και νετρίνο, $\pi^{\pm} \to \mu^{\pm}\overset{(-)}{\nu}_{\mu}$, που γίνεται με την ασθενή αλληλεπίδραση. Συνεπώς, το ρ διασπάται πολύ πιο γρήγορα από το πιόνιο.

Από τη διατήρηση της στροφορμής στη διάσπαση του ρ συνεπάγεται ότι τα δύο πιόνια στην τελική κατάσταση πρέπει να έχουν σχετική τροχιακή στροφορμή $L = 1$, εφόσον έχουν μηδενικό σπιν το καθένα. Η γενική διάσπαση $\rho \to \pi\pi$ διατηρεί και την ομοτιμία, εφόσον

$$P(\pi\pi) = P(\pi)P(\pi)(-1)^{1} = (-1)(-1)(-1) = -1 = P(\rho)$$

Εντούτοις, η διάσπαση $\rho^{0} \to \pi^{0}\pi^{0}$ απαγορεύεται, επειδή τα δύο πιόνια είναι μποζόνια και η κατάσταση του ζεύγους πρέπει να είναι συμμετρική κάτω από την ανταλλαγή τους, ενώ η κατάσταση ζεύγους ταυτοτικών σωματιδίων με $L = 1$ (γενικότερα, με κάθε περιττό L) είναι αντισυμμετρική κάτω από την ανταλλαγή τους, που ισοδυναμεί με χωρική ανάκλαση, επειδή έχει ομοτιμία -1.

3.7 Θεωρήστε την αντίδραση $\pi^- + d \to n + n$, όπου το δευτέριο d είναι η δέσμια κατάσταση ενός πρωτονίου κι ενός νετρονίου με συνολικό σπιν $S = 1$ και σχετική τροχιακή στροφορμή $L = 0$. Υποθέτοντας πως το αρνητικό πιόνιο βρίσκεται σε ηρεμία ως προς το δευτέριο, βρείτε την ομοτιμία του πιονίου.

Η ομοτιμία του δευτερίου είναι

$$P(d) = P(p)P(n)(-1)^L = (+1)(+1)(-1)^0 = +1$$

Η αντίδραση γίνεται στο πλαίσιο κέντρου μάζας (ΚΜ), εφόσον το πιόνιο είναι ακίνητο ως προς το δευτέριο. Σε αυτό το πλαίσιο, τα δύο τελικά νετρόνια, ως ταυτοτικά φερμιόνια, δεν μπορούν να παράγονται με παράλληλα σπιν, σύμφωνα με την αρχή του Pauli. Άρα, με αντιπαράλληλα σπιν, έχουν συνολικό σπιν 0. Από τη διατήρηση της συνολικής στροφορμής, θα πρέπει η σχετική τροχιακή στροφορμή τους να είναι $l = S = 1$. Συνεπώς, η ομοτιμία της τελικής κατάστασης είναι

$$P(nn) = P(n)P(n)(-1)^l = (+1)(+1)(-1)^1 = -1$$

Εφόσον η ισχυρή αλληλεπίδραση με την οποία πραγματοποιείται η αντίδραση διατηρεί την ομοτιμία, έχουμε:

$$P(\pi^- d) = P(\pi^-)P(d) = P(nn) \quad \Rightarrow \quad P(\pi^-)(+1) = -1 \quad \Rightarrow \quad P(\pi^-) = -1$$

3.8 Το μεσόνιο η είναι μια κατάσταση κουάρκ $(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$ με ισοσπίν 0, σπιν 0 και ομοτιμία -1 ("ισοβαθμωτό-ψευδοβαθμωτό" μεσόνιο). Οι κυρίαρχοι τρόποι διάσπασής του είναι

$$\eta \to 2\gamma \ (39\%) \qquad \eta \to 3\pi \ (55\%) \qquad \eta \to \pi\pi\gamma \ (5\%)$$

Το η χαρακτηρίζεται "σταθερό" σωματίδιο, επομένως κανένας από αυτούς τους τρόπους διάσπασης δεν οφείλεται στην ισχυρή αλληλεπίδραση. Εντούτοις, με μάζα 549 MeV/c^2, το η έχει αρκετή ενέργεια για να διασπαστεί με ισχυρή αλληλεπίδραση σε 2π ή σε 3π. **(α)** Εξηγήστε γιατί ο τρόπος διάσπασης $\eta \to 2\pi$ απαγορεύεται και στην ισχυρή και στην ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση. **(β)** Εξηγήστε γιατί ο τρόπος διάσπασης $\eta \to 3\pi$ απαγορεύεται στην ισχυρή, αλλά επιτρέπεται στην ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση.

(α) Στη διάσπαση $\eta \to 2\pi$, η αρχική κατάσταση έχει σπιν 0, επομένως και η τελική κατάσταση πρέπει να έχει στροφορμή $J = 0$. Επειδή οι ομοτιμίες και του η και του πιονίου είναι -1, οι ομοτιμίες αρχικής και τελικής κατάστασης είναι αντίθετες:

$$P(\eta) = -1 \neq P(\pi)P(\pi)(-1)^J = (-1)(-1)(-1)^0 = +1$$

Όμως και η ισχυρή και η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση διατηρούν την ομοτιμία. Επομένως, αυτός ο τρόπος διάσπασης απαγορεύεται και στις δύο αλληλεπιδράσεις.

(β) Στη διάσπαση $\eta \to 3\pi$, η αρχική κατάσταση είναι μια "ισοτοπική απλή" (έχει ισοσπίν 0). Ωστόσο, υπάρχουν δύο δυνατές τελικές καταστάσεις με διαφορετικούς συνδυασμούς φορτίων, $\pi^+\pi^-\pi^0$ και $\pi^0\pi^0\pi^0$, επομένως η τελική κατάσταση δεν μπορεί να είναι "ισο-απλή" (έχει ισοσπίν > 0). Δηλαδή, η αρχική και η τελική κατάσταση έχουν διαφορετικό ισοσπίν. Όμως, η ισχυρή αλληλεπίδραση διατηρεί το ισοσπίν, ενώ η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση όχι. Άρα, αυτός ο τρόπος διάσπασης απαγορεύεται στην ισχυρή αλληλεπίδραση, αλλά επιτρέπεται στην ηλεκτρομαγνητική.

3.9 Δείξτε ότι η αντίδραση $\pi^- + d \to n + n + \pi^0$ δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί “στο κατώφλι” (π^- σε ηρεμία στο πλαίσιο ΚΜ). Δίνονται οι μάζες $m_{\pi^-} = 139.6$ MeV/c², $m_d = 1875.6$ MeV/c², $m_n = 939.6$ MeV/c² και $m_{\pi^0} = 135.0$ MeV/c². Υπενθυμίζεται ότι το σπιν του δευτερίου d είναι 1.

Η αντίδραση αυτή επιτρέπεται ενεργειακά στο κατώφλι, με $Q = (m_{\pi^-} + m_d - 2m_n - m_{\pi^0})c^2 = +1$ MeV. Άρα, χρειάζεται να εξετάσουμε ποιες θεμελιώδεις συμμετρίες ενδεχομένως παραβιάζει. Η αντίδραση περιλαμβάνει ένα πιόνιο κι ένα ζεύγος νουκλεονίων που στην αρχική κατάσταση είναι δέσμιο (δευτέριο) και στην τελική ελεύθερο (δύο ελεύθερα νετρόνια). Εξετάζουμε πρώτα το σύστημα των δύο νουκλεονίων.

Υποθέτοντας ισοτοπική συμμετρία, η οποία ισχύει για την ισχυρή αλληλεπίδραση με την οποία πραγματοποιείται η αντίδραση, η κυματοσυνάρτηση του δευτερίου πρέπει να είναι συνολικά αντισυμμετρική κάτω από ανταλλαγή των δύο νουκλεονίων, $(|pn\rangle - |np\rangle)/\sqrt{2}$, επειδή αυτά είναι δύο ταυτοτικά (για την ισχυρή αλληλεπίδραση) φερμιόνια. Γνωρίζοντας ότι δεν υπάρχουν δέσμιες καταστάσεις δύο πρωτονίων ή δύο νετρονίων, το δευτέριο πρέπει να είναι μια “ισο-απλή” με $(I, I_3) = (0,0)$. Εφόσον στον ισοτοπικό χώρο η κυματοσυνάρτηση του δευτερίου είναι αντισυμμετρική, στο χώρο θέσης-σπιν πρέπει να είναι συμμετρική, δηλαδή η ομοτιμία της πρέπει να είναι

$$P(d) = P(p)P(n)(-1)^L = (+1)(+1)(-1)^L = +1$$

ώστε να παραμένει συνολικά αντισυμμετρική κάτω από χωρική ανάκλαση, η οποία εναλλάσσει τα δύο νουκλεόνια. Η συνθήκη αυτή επιβάλλει ο ακέραιος L να είναι άρτιος. Στη χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη, που είναι η θεμελιώδης κατάσταση του δευτερίου, $L = 0$. Εφόσον το σπιν του δευτερίου είναι 1, τα δύο νουκλεόνια πρέπει να έχουν ομοπαράλληλα σπιν. Η κατάσταση με ομοπαράλληλα σπιν είναι η ενεργειακά ευνοϊκότερη κατάσταση των δύο δέσμιων νουκλεονίων.

Στην τελική κατάσταση, το σύστημα των δύο νουκλεονίων ανήκει σε μια συμμετρική “ισο-τριπλή”:

$$
\begin{aligned}
|pp\rangle &= |I=1,\, I_3=+1\rangle \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|pn\rangle + |np\rangle\big) &= |I=1,\, I_3=0\rangle \\
|nn\rangle &= |I=1,\, I_3=-1\rangle
\end{aligned}
$$

Άρα, η κυματοσυνάρτηση του ζεύγους στην τελική κατάσταση πρέπει να είναι αντισυμμετρική στο χώρο θέσης-σπιν, ώστε να παραμένει συνολικά αντισυμμετρική κάτω από ανταλλαγή των δύο νουκλεονίων. Συνεπώς, η ομοτιμία της πρέπει να είναι

$$P(nn) = P(n)P(n)(-1)^L = (+1)(+1)(-1)^L = -1$$

δηλαδή ο L πρέπει να είναι περιττός. Στη χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση, είναι $L=1$ και, για να διατηρείται η συνολική στροφορμή των δύο νουκλεονίων, το συνολικό τους σπιν πρέπει να είναι μηδέν, δηλαδή τα δύο νουκλεόνια πρέπει να έχουν αντιπαράλληλα σπιν.

Στο κατώφλι της αντίδρασης, η συνολικά διαθέσιμη ενέργεια δεν επιτρέπει μη μηδενική σχετική τροχιακή στροφορμή l ανάμεσα στο πιόνιο και στο σύστημα των δύο νουκλεονίων. Συνεπώς, η συνολική ομοτιμία της αρχικής κατάστασης είναι

$$P(\pi^-)P(d)(-1)^l = (-1)(+1)(-1)^0 = -1$$

Από την άλλη μεριά, η ομοτιμία της τελικής κατάστασης είναι

$$P(nn)P(\pi^0)(-1)^l = (-1)(-1)(-1)^0 = +1$$

Άρα, στο κατώφλι, η ομοτιμία αναγκαστικά αλλάζει από την αρχική στην τελική κατάσταση. Αλλά η ισχυρή αλληλεπίδραση διατηρεί την ομοτιμία. Επομένως, η αντίδραση δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί στο κατώφλι, όπου το πιόνιο είναι ακίνητο ως προς το δευτέριο. Χρειάζεται κάποια κινητική ενέργεια που θα επιτρέψει μη μηδενική σχετική τροχιακή στροφορμή πιονίου-δευτερίου, η οποία θα αλλάξει την ομοτιμία της αρχικής κατάστασης, ώστε να είναι η ίδια με την ομοτιμία της τελικής κατάστασης. Στη φασματοσκοπία λέμε ότι αυτή η αντίδραση δεν πραγματοποιείται με s-κύματα πιονίου $(l = 0)$, τα οποία είναι τα μόνα που μπορούν συνεισφέρουν στο κατώφλι (δηλαδή, χωρίς κινητική ενέργεια). Χρειάζονται $p, d, \ldots$-κύματα $(l = 1,2,\ldots)$.

5.1 Ένα σωματίδιο A μάζας m_A και συνολικής ενέργειας E_A χτυπά σωματίδιο μάζας m_B σε ηρεμία και παράγονται σωματίδια C_1, C_2, … , C_n μάζας m_1, m_2, … , m_n, αντίστοιχα: $A + B \rightarrow C_1 + C_2 + \ldots + C_n$. Υπολογίστε το ενεργειακό κατώφλι (δηλαδή την ελάχιστη τιμή της E_A) αυτής της αντίδρασης συναρτήσει των μαζών των σωματιδίων.

Ο μετασχηματισμός προώθησης της αντίδρασης από το εργαστήριο στο πλαίσιο κέντρου μάζας (ΚΜ) είναι:

$E^* = \gamma(E - \beta p)$ όπου $E = E_A + m_B$ η συνολική ενέργεια στο εργαστήριο

$p^* = \gamma(p - \beta E) = 0 \;\Rightarrow\; \beta = \dfrac{p}{E}$ όπου $p = \left|\vec{p}_A\right|$ η συνολική ορμή στο εργαστήριο

Άρα: $$\beta = \frac{\left|\vec{p}_A\right|}{E_A + m_B} = \frac{\sqrt{E_A^2 - m_A^2}}{E_A + m_B}$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 = 1 - \frac{E_A^2 - m_A^2}{\left(E_A + m_B\right)^2} = \frac{\left(E_A + m_B\right)^2 - E_A^2 + m_A^2}{\left(E_A + m_B\right)^2} = \frac{\cancel{E_A^2} + 2E_A m_B + m_B^2 - \cancel{E_A^2} + m_A^2}{\left(E_A + m_B\right)^2} \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{E_A + m_B}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}}$$

Επομένως: $$E^* = \frac{E_A + m_B}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}} \left(E_A + m_B - \frac{\sqrt{E_A^2 - m_A^2}}{E_A + m_B} \sqrt{E_A^2 - m_A^2} \right)$$

$$= \frac{E_A + m_B}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}} \left(E_A + m_B - \frac{E_A^2 - m_A^2}{E_A + m_B} \right)$$

$$= \frac{\left(E_A + m_B\right)^2 - \left(E_A^2 - m_A^2\right)}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}}$$

$$= \frac{\cancel{E_A^2} + 2E_A m_B + m_B^2 - \cancel{E_A^2} + m_A^2}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}} = \frac{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}} = \sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}$$

$$\Rightarrow \; m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B = E^{*2} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right)^2$$

επειδή η ελάχιστη ενέργεια ΚΜ αντιστοιχεί στην παραγωγή όλων των προϊόντων χωρίς κινητική ενέργεια. Συνεπώς:

$$E_A \geq \frac{1}{2m_B} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right)^2 - m_A^2 - m_B^2 \right]$$

5.2 Η πρώτη παραγωγή του βαρυονίου Ω^- στο εργαστήριο πραγματοποιήθηκε βομβαρδίζοντας ένα σταθερό στόχο πρωτονίου (υδρογόνου) με πρωτόνια ψηλής ενέργειας και παράγοντας έτσι ένα ζεύγος K^+/K^-: $p + p \ \rightarrow \ p + p + K^+ + K^-$. Στη συνέχεια το K^- χτυπούσε έναν άλλο στόχο πρωτονίου παράγοντας το Ω^-: $K^- + p \ \rightarrow \ \Omega^- + K^0 + K^+$. Να υπολογιστεί η ελάχιστη κινητική ενέργεια της δέσμης των αρχικών πρωτονίων, που απαιτείται ώστε να παραχθεί το Ω^-, συναρτήσει των μαζών όλων των εμπλεκόμενων σωματιδίων: $m_p = 938\ \mathrm{MeV}$, $m_{K^0} = 498\ \mathrm{MeV}$, $m_{K^\pm} = 494\ \mathrm{MeV}$, $m_{\Omega^-} = 1672\ \mathrm{MeV}$.

Εφόσον και τα δύο πρωτόνια-στόχοι στις δύο διαδοχικές αντιδράσεις βρίσκονται σε ηρεμία, μπορούμε να τα θεωρήσουμε σαν έναν ακίνητο στόχο με μάζα διπλάσια του πρωτονίου και να προσθέσουμε τις δύο αντιδράσεις σε μία απαλείφοντας το ενδιάμεσο K^-:

$$\left.\begin{array}{rcl} p + p & \rightarrow & p + p + K^+ + K^- \\ K^- + p & \rightarrow & \Omega^- + K^0 + K^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \ p + 2p \ \rightarrow \ p + p + K^+ + K^0 + K^+ + \Omega^0$$

Εφαρμόζουμε τώρα τη συνθήκη του προβλήματος **5.1**, με μάζα σωματιδίων δέσμης $m_A = m_p$ και μάζα στόχου $m_B = 2m_p$:

$$E_p \geq \frac{(2m_p + 2m_{K^+} + m_{K^0} + m_{\Omega^-})^2 - m_p^2 - (2m_p)^2}{2(2m_p)}$$

$$\Rightarrow \ T_p + m_p \geq \left[2m_{K^+} + m_{K^0} + m_{\Omega^-} + \frac{(2m_{K^+} + m_{K^0} + m_{\Omega^-})^2}{4m_p} - \frac{m_p}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \ T_p \geq \frac{(2m_{K^+} + m_{K^0} + m_{\Omega^-})(4m_p + 2m_{K^+} + m_{K^0} + m_{\Omega^-})}{4m_p} - \frac{5}{4}m_p = T_p^{\min}$$

$$\Rightarrow \ T_p^{\min} = 4.64\ \mathrm{GeV}$$

5.3 Σωματίδιο A σε ηρεμία διασπάται στα σωματίδια B και C: $A \to B + C$. Βρείτε (α) την ενέργεια και (β) το μέτρο της ορμής των προϊόντων διάσπασης συναρτήσει των μαζών των σωματιδίων.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Διατήρηση ενέργειας:} & m_A = E_B + E_C \\ \text{Διατήρηση ορμής:} & \vec{0} = \vec{p}_B + \vec{p}_C \;\Rightarrow\; \vec{p}_B = -\vec{p}_C \equiv \vec{p}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} m_A^2 = E_B^2 + E_C^2 + 2E_BE_C \\ \;0 = \vec{p}_B^2 + \vec{p}_C^2 + 2\vec{p}_B\cdot\vec{p}_C \;\Rightarrow\; \vec{p}_B = -\vec{p}_C \equiv \vec{p}\end{cases}\right\} \Rightarrow E_B^2 - \vec{p}_B^2 + E_C^2 - \vec{p}_C^2 + 2\left(E_BE_C - \vec{p}_B\cdot\vec{p}_C\right) = m_A^2$$

$$\Rightarrow m_B^2 + m_C^2 + 2\left(\vec{p}^2 + \sqrt{\vec{p}^2 + m_B^2}\sqrt{\vec{p}^2 + m_C^2}\right) = m_A^2$$

$$\Rightarrow \vec{p}^2 + \sqrt{\vec{p}^2 + m_B^2}\sqrt{\vec{p}^2 + m_C^2} = \frac{1}{2}\left(m_A^2 - m_B^2 - m_C^2\right) \equiv \mu^2$$

$$\Rightarrow \left(\vec{p}^2 + m_B^2\right)\left(\vec{p}^2 + m_C^2\right) = \left(\mu^2 - \vec{p}^2\right)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{\vec{p}^4} + \left(m_B^2 + m_C^2\right)\vec{p}^2 + \left(m_Bm_C\right)^2 = \mu^4 - 2\mu^2\vec{p}^2 + \cancel{\vec{p}^4}$$

$$\Rightarrow \left(2\mu^2 + m_B^2 + m_C^2\right)\vec{p}^2 = \mu^4 - \left(m_Bm_C\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(m_A^2 \cancel{- m_B^2 - m_C^2} + \cancel{m_B^2 + m_C^2}\right)\vec{p}^2 = \mu^4 - \left(m_Bm_C\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}^2 = \frac{\mu^4 - \left(m_B m_C\right)^2}{m_A^2}$$

$$= \frac{\left(m_A^2 - m_B^2 - m_C^2\right)^2 - \left(2m_B m_C\right)^2}{\left(2m_A\right)^2}$$

$$= \frac{\left(m_A^2 - m_B^2 - m_C^2 - 2m_B m_C\right)\left(m_A^2 - m_B^2 - m_C^2 + 2m_B m_C\right)}{\left(2m_A\right)^2}$$

$$= \frac{\left[m_A^2 - \left(m_B + m_C\right)^2\right]\left[m_A^2 - \left(m_B - m_C\right)^2\right]}{\left(2m_A\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{p}\right| = \frac{\sqrt{\left[m_A^2 - \left(m_B + m_C\right)^2\right]\left[m_A^2 - \left(m_B - m_C\right)^2\right]}}{2m_A} = \left|\vec{p}_B\right| = \left|\vec{p}_C\right|$$

$$E_B^2 = \vec{p}_B^2 + m_B^2$$

$$= \frac{\left(m_A^2 - m_B^2 - m_C^2\right)^2 - \left(2m_B m_C\right)^2 + \left(2m_A m_B\right)^2}{\left(2m_A\right)^2}$$

$$= \frac{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 + 2m_B^2 m_C^2 - 4m_B^2 m_C^2 + 4m_A^2 m_B^2}{\left(2m_A\right)^2}$$

$$\Rightarrow \; E_B^2 = \frac{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 + 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2}{\left(2m_A\right)^2} = \left(\frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A}\right)^2 \; \Rightarrow \; E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A}$$

Το πρόβλημα είναι συμμετρικό σε εναλλαγή του B με το C, άρα:

$$E_C = \frac{m_A^2 + m_C^2 - m_B^2}{2m_A}$$

5.4 Ένα πιόνιο σε ηρεμία διασπάται σε ένα μιόνιο και ένα νετρίνο: $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Κατά μέσο όρο, πόσο μακριά θα ταξιδέψει το μιόνιο πριν διασπαστεί, δεδομένου ότι ο χρόνος ζωής του είναι 2.2 μs; Δίνονται οι μάζες του φορτισμένου πιονίου $m_\pi = 139.57$ MeV/c² και του μιονίου $m_\mu = 105.66$ MeV/c² και η ταχύτητα του φωτός στο κενό 3×10^{-8} m/s.

Από το πρόβλημα **5.3**, βρίσκουμε την ορμή και την ενέργεια του μιονίου, θεωρώντας πάντα τη μάζα του νετρίνου αμελητέα:

$$p_\mu = \frac{\sqrt{\left[m_\pi^2 - (m_\mu + m_\nu)^2\right]\left[m_\pi^2 - (m_\mu - m_\nu)^2\right]}}{2m_\pi} = \frac{\sqrt{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}}{2m_\pi} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \qquad E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2 - m_\nu^2}{2m_\pi} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi}$$

Το μιόνιο ζει κατά μέσο όρο ένα χρόνο $\tau = 2.2$ μs στο πλαίσιο ηρεμίας του. Άρα, στο πλαίσιο ηρεμίας του πιονίου, όπου κινείται με ταχύτητα βc, ζει κατά μέσο όρο ένα χρόνο:

$$t = \gamma\tau = \frac{E_\mu}{m_\mu}\tau = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi m_\mu}\tau$$

διανύοντας έτσι μια μέση απόσταση:

$$l = \beta c t = \frac{p_\mu}{m_\mu}ct = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi m_\mu}ct = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)(m_\pi^2 - m_\mu^2)}{(2m_\pi m_\mu)^2}c\tau = \frac{m_\pi^4 - m_\mu^4}{(2m_\pi m_\mu)^2}c\tau \simeq 0.3 \times 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1} \times 2.2 \times 10^{-6} \text{ s} \simeq 193 \text{ m}$$

5.5 Σωματίδιο A σε ηρεμία διασπάται σε τρία ή περισσότερα σωματίδια: $A \to B + C + D + \cdots$. **(a)** Υπολογίστε τη μέγιστη και την ελάχιστη ενέργεια του B συναρτήσει των μαζών των σωματιδίων. **(b)** Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη ενέργεια του ηλεκτρονίου στη διάσπαση του μιονίου $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. Δίνονται οι μάζες του μιονίου $m_\mu = 105.66$ MeV/c² και του ηλεκτρονίου $m_e = 0.51$ MeV/c².

(a) Χειριζόμαστε το πρόβλημα σαν ισοδύναμη διάσπαση σε δύο προϊόντα σωματίδια: $A \to B + (C + D + \cdots)$ ή $A \to B + X$, όπου το X διασπάται στη συνέχεια στα $C, D, \ \ldots$: $X \to C + D + \cdots$. Άρα, από το πρόβλημα **5.3**:

$$\left|\vec{p}_B\right| = \frac{\sqrt{\left[m_A^2 - \left(m_B + m_X\right)^2\right]\left[m_A^2 - \left(m_B - m_X\right)^2\right]}}{2m_A} \qquad E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_X^2}{2m_A} \qquad \text{όπου} \quad m_X^2 = \left(p_C + p_D + \cdots\right)^2$$

Το εύρος διακύμανσης της ενέργειας E_B προσδιορίζεται από το εύρος διακύμανσης της μεταβλητής μάζας m_X :

$$m_C + m_D + \cdots \leq m_X \leq m_A - m_B$$

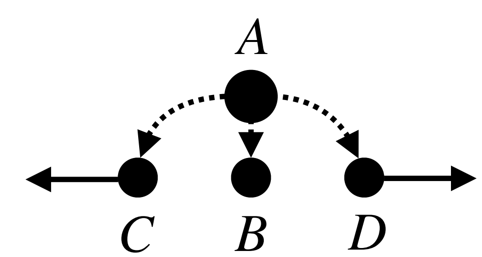
όπου το κάτω όριο αντιστοιχεί στο κατώφλι παραγωγής των σωματιδίων $C, D, \ \ldots$ (η ελάχιστη ενέργεια που απαιτεί η παραγωγή τους είναι το άθροισμα των μαζών τους) και το επάνω όριο αντιστοιχεί στο κατώφλι παραγωγής του σωματιδίου B (η μέγιστη ενέργεια που απομένει από την παραγωγή του B είναι η διαφορά της μάζας του από τη μάζα του μητρικού σωματιδίου A, όταν το B δεν έχει καθόλου κινητική ενέργεια). Επομένως:

$$\left(m_C+m_D+\cdots\right)^2 \le m_X^2 \le \left(m_A-m_B\right)^2 \;\Rightarrow\; m_A^2+m_B^2-\left(m_C+m_D+\cdots\right)^2 \ge m_A^2+m_B^2-m_X^2 \ge m_A^2+m_B^2-\left(m_A-m_B\right)^2$$

$$\Rightarrow\; \frac{m_A^2+m_B^2-\left(m_C+m_D+\cdots\right)^2}{2m_A} \ge E_B \ge \frac{m_A^2+m_B^2-\left(m_A-m_B\right)^2}{2m_A}$$

$$= \frac{\cancel{m_A^2+m_B^2}-\cancel{m_A^2-m_B^2}+2m_Am_B}{2m_A}$$

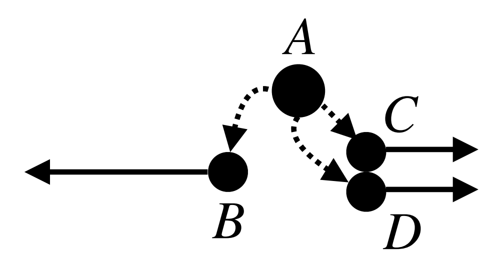
$$\Rightarrow\; \frac{m_A^2+m_B^2-\left(m_C+m_D+\cdots\right)^2}{2m_A} \ge E_B \ge m_B$$



$E_B = m_B$

Στο κάτω όριο της E_B (επάνω όριο της m_X) το $\left|\vec{p}_B\right|$ και το $\left|\vec{p}_X\right|$ μηδενίζονται:

$$E_B=m_B \;\Rightarrow\; m_X=m_A-m_B \;\Rightarrow\; m_B+m_X=m_A \;\Rightarrow\; \left|\vec{p}_B\right| = \left|\vec{p}_X\right| = 0$$



Δηλαδή, υποθέτοντας τρία τελικά προϊόντα, τα σωματίδια C και D παράγονται αντιγραμμικά:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{p}_X=\vec{p}_C+\vec{p}_D=\vec{0}\\ \vec{p}_A=\vec{p}_B+\vec{p}_X=\vec{0}\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \vec{p}_B=\vec{0}$$

$$E_B=\frac{m_A^2+m_B^2-\left(m_C+m_D\right)^2}{2m_A}$$

Το επάνω όριο της E_B (κάτω όριο της m_X) αντιστοιχεί στην περίπτωση που τα σωματίδια $C, D, \ldots$ παράγονται όλα συγγραμμικά. Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε εργαζόμενοι αντίστροφα με τρία τελικά σωματίδια, δηλαδή δείχνοντας ότι όταν τα σωματίδια C και D παράγονται συγγραμμικά, τότε ισχύει $m_X = m_C + m_D$.

$$\left.\begin{array}{r}\beta_C=\beta_D \Rightarrow \dfrac{1}{\gamma_C\beta_C}=\dfrac{1}{\gamma_D\beta_D} \Rightarrow \dfrac{m_C}{\left|\vec{p}_C\right|}=\dfrac{m_D}{\left|\vec{p}_D\right|} \Rightarrow \left(\dfrac{m_C}{\left|\vec{p}_C\right|}-\dfrac{m_D}{\left|\vec{p}_D\right|}\right)^2=0 \Rightarrow \dfrac{m_C^2}{\left|\vec{p}_C\right|^2}+\dfrac{m_D^2}{\left|\vec{p}_D\right|^2}=2\dfrac{m_C}{\left|\vec{p}_C\right|}\dfrac{m_D}{\left|\vec{p}_D\right|} \\ \theta_{CD}=\cos^{-1}\dfrac{\vec{p}_C\cdot\vec{p}_D}{\left|\vec{p}_C\right|\,\left|\vec{p}_D\right|}=0 \Rightarrow \cos\theta_{CD}=1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1+\frac{m_C^2}{\left|\vec{p}_C\right|^2}+\frac{m_D^2}{\left|\vec{p}_D\right|^2}=\cos^2\theta_{CD}+2\frac{m_C}{\left|\vec{p}_C\right|}\frac{m_D}{\left|\vec{p}_D\right|}\cos\theta_{CD}$$

$$\Rightarrow\ \left|\vec{p}_C\right|^2\left|\vec{p}_D\right|^2+\left|\vec{p}_C\right|^2 m_D^2+m_C^2\left|\vec{p}_D\right|^2=\left|\vec{p}_C\right|^2\left|\vec{p}_D\right|^2\cos^2\theta_{CD}+2\left|\vec{p}_C\right|\,\left|\vec{p}_D\right| m_C m_D\cos\theta_{CD}$$

$$\Rightarrow\ \left|\vec{p}_C\right|^2\left|\vec{p}_D\right|^2+\left|\vec{p}_C\right|^2 m_D^2+m_C^2\left|\vec{p}_D\right|^2+m_C^2m_D^2=\left|\vec{p}_C\right|^2\left|\vec{p}_D\right|^2\cos^2\theta_{CD}+2m_Cm_D\left|\vec{p}_C\right|\,\left|\vec{p}_D\right|\cos\theta_{CD}+m_C^2m_D^2$$

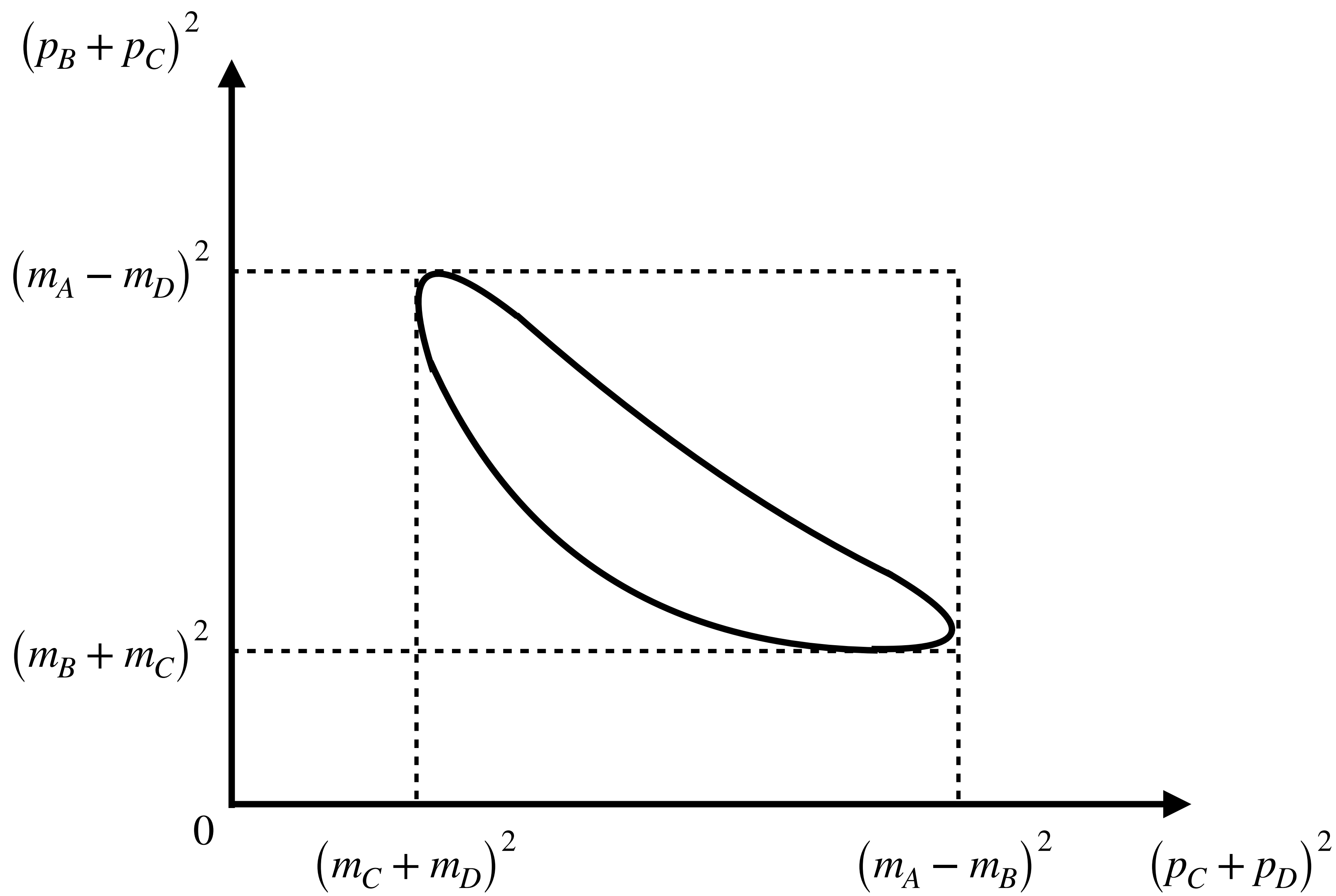
$$\Rightarrow\ \left(\left|\vec{p}_C\right|^2+m_C^2\right)\left(\left|\vec{p}_D\right|^2+m_D^2\right)=\left(\vec{p}_C\cdot\vec{p}_D\right)^2+2m_Cm_D\vec{p}_C\cdot\vec{p}_D+\left(m_Cm_D\right)^2$$

$$\Rightarrow\ \left(E_CE_D\right)^2=\left(\vec{p}_C\cdot\vec{p}_D+m_Cm_D\right)^2\ \Rightarrow\ E_CE_D=\vec{p}_C\cdot\vec{p}_D+m_Cm_D$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow E_CE_D-\vec{p}_C\cdot\vec{p}_D=p_C\cdot p_D=m_Cm_D \\ \quad m_X^2=p_X^2=\left(p_C+p_D\right)^2=p_C^2+p_D^2+2p_C\cdot p_D=m_C^2+m_D^2+2p_C\cdot p_D\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ m_X^2=m_C^2+m_D^2+2m_Cm_D=\left(m_C+m_D\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ m_X=m_C+m_D$$

Τα όρια διακύμανσης των κινηματικών μεταβλητών σε διασπάσεις $1 \to 3$ σωματιδίων παριστάνονται γραφικά με τα διαγράμματα Dalitz:



(b) Για τη διάσπαση του μιονίου, έχουμε:

$$\frac{m_\mu^2 + m_e^2 - \left(m_{\nu_e} + m_{\nu_\mu}\right)^2}{2m_\mu} \geq E_e \geq m_e \quad \Rightarrow \quad \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2m_\mu} \geq E_e \geq m_e \quad \Rightarrow \quad \underbrace{52.83 \text{ MeV}}_{\simeq \frac{1}{2} m_\mu c^2} \geq E_e \geq 0.51 \text{ MeV}$$

Στο κάτω όριο: $E_e = 0.51 \text{ MeV} \quad \Rightarrow \quad p_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\bar{\nu}_e} \uparrow \downarrow \vec{p}_{\nu_\mu} \quad \Rightarrow \quad p_{\bar{\nu}_e} = p_{\nu_\mu} = \dfrac{m_\mu - E_e}{2} = 52.27 \text{ MeV}$

Στο επάνω όριο: $E_e = 52.83 \text{ MeV} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\bar{\nu}_e} \uparrow \uparrow \vec{p}_{\nu_\mu} \quad \Rightarrow \quad p_{\bar{\nu}_e} = p_{\nu_\mu} = \dfrac{m_\mu - E_e}{2} = 26.41 \text{ MeV}$

Δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις τα νετρίνα μοιράζονται τη διαφορά μεταξύ της μάζας του μιονίου και της ενέργειας του ηλεκτρονίου, αλλά στο επάνω όριο εκπέμπονται συγγραμικά (έχουν ομόρροπες ορμές) ενώ στο κάτω όριο εκπέμπονται αντιγραμμικά (έχουν αντίρροπες ορμές).