ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2021 — 2022

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ & ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ

ΤΜΗΜΑ Β΄ Κ. ΒΕΛΛΙΔΗΣ — Θ. ΜΕΡΤΖΙΜΕΚΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΗΝ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

5.1 Ένα σωματίδιο A μάζας m_A και συνολικής ενέργειας E_A χτυπά σωματίδιο μάζας m_B σε ηρεμία και παράγονται σωματίδια C_1, C_2, … , C_n μάζας m_1, m_2, … , m_n, αντίστοιχα: $A + B \rightarrow C_1 + C_2 + \ldots + C_n$. Υπολογίστε το ενεργειακό κατώφλι (δηλαδή την ελάχιστη τιμή της E_A) αυτής της αντίδρασης συναρτήσει των μαζών των σωματιδίων.

Ο μετασχηματισμός προώθησης της αντίδρασης από το εργαστήριο στο πλαίσιο κέντρου μάζας (ΚΜ) είναι:

$E^* = \gamma(E - \beta p)$ όπου $E = E_A + m_B$ η συνολική ενέργεια στο εργαστήριο

$p^* = \gamma(p - \beta E) = 0 \;\Rightarrow\; \beta = \dfrac{p}{E}$ όπου $p = \left|\vec{p}_A\right|$ η συνολική ορμή στο εργαστήριο

Άρα: $$\beta = \frac{\left|\vec{p}_A\right|}{E_A + m_B} = \frac{\sqrt{E_A^2 - m_A^2}}{E_A + m_B}$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 = 1 - \frac{E_A^2 - m_A^2}{\left(E_A + m_B\right)^2} = \frac{\left(E_A + m_B\right)^2 - E_A^2 + m_A^2}{\left(E_A + m_B\right)^2} = \frac{\cancel{E_A^2} + 2E_A m_B + m_B^2 - \cancel{E_A^2} + m_A^2}{\left(E_A + m_B\right)^2} \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{E_A + m_B}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}}$$

Επομένως:

$$E^* = \frac{E_A + m_B}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}} \left(E_A + m_B - \frac{\sqrt{E_A^2 - m_A^2}}{E_A + m_B} \sqrt{E_A^2 - m_A^2} \right)$$

$$= \frac{E_A + m_B}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}} \left(E_A + m_B - \frac{E_A^2 - m_A^2}{E_A + m_B} \right)$$

$$= \frac{\left(E_A + m_B\right)^2 - \left(E_A^2 - m_A^2\right)}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}}$$

$$= \frac{\cancel{E_A^2} + 2E_A m_B + m_B^2 - \cancel{E_A^2} + m_A^2}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}} = \frac{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}} = \sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B}$$

$$\Rightarrow \; m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B = E^{*2} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right)^2$$

επειδή η ελάχιστη ενέργεια ΚΜ αντιστοιχεί στην παραγωγή όλων των προϊόντων χωρίς κινητική ενέργεια. Συνεπώς:

$$E_A \geq \frac{1}{2m_B} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right)^2 - m_A^2 - m_B^2 \right]$$

5.2 Σωματίδιο A σε ηρεμία διασπάται στα σωματίδια B και C: $A \to B + C$. Βρείτε (α) την ενέργεια και (β) το μέτρο της ορμής των προϊόντων διάσπασης συναρτήσει των μαζών των σωματιδίων.

Διατήρηση ενέργειας: $m_A = E_B + E_C$

Διατήρηση ορμής: $\vec{0} = \vec{p}_B + \vec{p}_C \;\Rightarrow\; \vec{p}_B = -\vec{p}_C \equiv \vec{p}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} m_A^2 &= E_B^2 + E_C^2 + 2E_BE_C \\ 0 &= \vec{p}_B^{\,2} + \vec{p}_C^{\,2} + 2\vec{p}_B\cdot\vec{p}_C \;\Rightarrow\; \vec{p}_B = -\vec{p}_C \equiv \vec{p} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_B^2 - \vec{p}_B^{\,2} + E_C^2 - \vec{p}_C^{\,2} + 2\left(E_BE_C - \vec{p}_B\cdot\vec{p}_C\right) = m_A^2$$

$$\Rightarrow m_B^2 + m_C^2 + 2\left(\vec{p}^{\,2} + \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_B^2}\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_C^2}\right) = m_A^2$$

$$\Rightarrow \vec{p}^{\,2} + \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_B^2}\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_C^2} = \frac{1}{2}\left(m_A^2 - m_B^2 - m_C^2\right) \equiv \mu^2$$

$$\Rightarrow \left(\vec{p}^{\,2} + m_B^2\right)\left(\vec{p}^{\,2} + m_C^2\right) = \left(\mu^2 - \vec{p}^{\,2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{\vec{p}^{\,4}} + \left(m_B^2 + m_C^2\right)\vec{p}^{\,2} + \left(m_Bm_C\right)^2 = \mu^4 - 2\mu^2\vec{p}^{\,2} + \cancel{\vec{p}^{\,4}}$$

$$\Rightarrow \left(2\mu^2 + m_B^2 + m_C^2\right)\vec{p}^{\,2} = \mu^4 - \left(m_Bm_C\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(m_A^2 \cancel{- m_B^2 - m_C^2} + \cancel{m_B^2 + m_C^2}\right)\vec{p}^{\,2} = \mu^4 - \left(m_Bm_C\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}^{\,2} = \frac{\mu^4 - \left(m_B m_C\right)^2}{m_A^2}$$

$$= \frac{\left(m_A^2 - m_B^2 - m_C^2\right)^2 - \left(2m_B m_C\right)^2}{\left(2m_A\right)^2}$$

$$= \frac{\left(m_A^2 - m_B^2 - m_C^2 - 2m_B m_C\right)\left(m_A^2 - m_B^2 - m_C^2 + 2m_B m_C\right)}{\left(2m_A\right)^2}$$

$$= \frac{\left[m_A^2 - \left(m_B + m_C\right)^2\right]\left[m_A^2 - \left(m_B - m_C\right)^2\right]}{\left(2m_A\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{p}\right| = \frac{\sqrt{\left[m_A^2 - \left(m_B + m_C\right)^2\right]\left[m_A^2 - \left(m_B - m_C\right)^2\right]}}{2m_A} = \left|\vec{p}_B\right| = \left|\vec{p}_C\right|$$

$$E_B^2 = \vec{p}_B^{\,2} + m_B^2$$

$$= \frac{\left(m_A^2 - m_B^2 - m_C^2\right)^2 - \left(2m_B m_C\right)^2 + \left(2m_A m_B\right)^2}{\left(2m_A\right)^2}$$

$$= \frac{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 + 2m_B^2 m_C^2 - 4m_B^2 m_C^2 + 4m_A^2 m_B^2}{\left(2m_A\right)^2}$$

$$\Rightarrow \; E_B^2 = \frac{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 + 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2}{\left(2m_A\right)^2} = \left(\frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A}\right)^2 \; \Rightarrow \; E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A}$$

Το πρόβλημα είναι συμμετρικό σε εναλλαγή του B με το C, άρα:

$$E_C = \frac{m_A^2 + m_C^2 - m_B^2}{2m_A}$$

5.3 Ένα πιόνιο σε ηρεμία διασπάται σε ένα μιόνιο και ένα νετρίνο: $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Κατά μέσο όρο, πόσο μακριά θα ταξιδέψει το μιόνιο πριν διασπαστεί, δεδομένου ότι ο χρόνος ζωής του είναι 2.2 μs; Δίνονται οι μάζες του φορτισμένου πιονίου $m_\pi = 139.57$ MeV/c^2 και του μιονίου $m_\mu = 105.66$ MeV/c^2 και η ταχύτητα του φωτός στο κενό 3×10^{-8} m/s.

Από το πρόβλημα **5.2**, βρίσκουμε την ορμή και την ενέργεια του μιονίου, θεωρώντας πάντα τη μάζα του νετρίνου αμελητέα:

$$p_\mu = \frac{\sqrt{\left[m_\pi^2 - (m_\mu + m_\nu)^2\right]\left[m_\pi^2 - (m_\mu - m_\nu)^2\right]}}{2m_\pi} = \frac{\sqrt{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}}{2m_\pi} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \qquad E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2 - m_\nu^2}{2m_\pi} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi}$$

Το μιόνιο ζει κατά μέσο όρο ένα χρόνο $\tau = 2.2$ μs στο πλαίσιο ηρεμίας του. Άρα, στο πλαίσιο ηρεμίας του πιονίου, όπου κινείται με ταχύτητα βc, ζει κατά μέσο όρο ένα χρόνο:

$$t = \gamma\tau = \frac{E_\mu}{m_\mu}\tau = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi m_\mu}\tau$$

διανύοντας έτσι μια μέση απόσταση:

$$l = \beta c t = \frac{p_\mu}{m_\mu}ct = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi m_\mu}ct = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)(m_\pi^2 - m_\mu^2)}{(2m_\pi m_\mu)^2}c\tau = \frac{m_\pi^4 - m_\mu^4}{(2m_\pi m_\mu)^2}c\tau \simeq 0.3 \times 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1} \times 2.2 \times 10^{-6} \text{ s} \simeq 193 \text{ m}$$

5.4 Σωματίδιο A σε ηρεμία διασπάται σε τρία ή περισσότερα σωματίδια: $A \to B + C + D + \cdots$. **(a)** Υπολογίστε τη μέγιστη και την ελάχιστη ενέργεια του B συναρτήσει των μαζών των σωματιδίων. **(b)** Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη ενέργεια του ηλεκτρονίου στη διάσπαση του μιονίου $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. Δίνονται οι μάζες του μιονίου $m_\mu = 105.66$ MeV/c^2 και του ηλεκτρονίου $m_e = 0.51$ MeV/c^2.

(a) Χειριζόμαστε το πρόβλημα σαν ισοδύναμη διάσπαση σε δύο προϊόντα σωματίδια: $A \to B + (C + D + \cdots)$ ή $A \to B + X$, όπου το X διασπάται στη συνέχεια στα $C, D, \ \ldots$: $X \to C + D + \cdots$. Άρα, από το πρόβλημα **5.2**:

$$\left|\vec{p}_B\right| = \frac{\sqrt{\left[m_A^2 - \left(m_B + m_X\right)^2\right]\left[m_A^2 - \left(m_B - m_X\right)^2\right]}}{2m_A} \qquad E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_X^2}{2m_A} \qquad \text{όπου} \quad m_X^2 = \left(p_C + p_D + \cdots\right)^2$$

Το εύρος διακύμανσης της ενέργειας E_B προσδιορίζεται από το εύρος διακύμανσης της μεταβλητής μάζας m_X :

$$m_C + m_D + \cdots \leq m_X \leq m_A - m_B$$

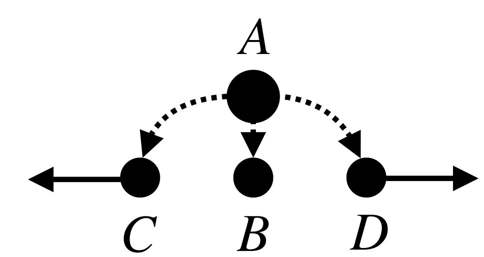
όπου το κάτω όριο αντιστοιχεί στο κατώφλι παραγωγής των σωματιδίων $C, D, \ \ldots$ (η ελάχιστη ενέργεια που απαιτεί η παραγωγή τους είναι το άθροισμα των μαζών τους) και το επάνω όριο αντιστοιχεί στο κατώφλι παραγωγής του σωματιδίου B (η μέγιστη ενέργεια που απομένει από την παραγωγή του B είναι η διαφορά της μάζας του από τη μάζα του μητρικού σωματιδίου A, όταν το B δεν έχει καθόλου κινητική ενέργεια). Επομένως:

$$\left(m_C+m_D+\cdots\right)^2 \le m_X^2 \le \left(m_A-m_B\right)^2 \;\Rightarrow\; m_A^2+m_B^2-\left(m_C+m_D+\cdots\right)^2 \ge m_A^2+m_B^2-m_X^2 \ge m_A^2+m_B^2-\left(m_A-m_B\right)^2$$

$$\Rightarrow\; \frac{m_A^2+m_B^2-\left(m_C+m_D+\cdots\right)^2}{2m_A} \ge E_B \ge \frac{m_A^2+m_B^2-\left(m_A-m_B\right)^2}{2m_A}$$

$$= \frac{\cancel{m_A^2+m_B^2}-\cancel{m_A^2-m_B^2}+2m_Am_B}{2m_A}$$

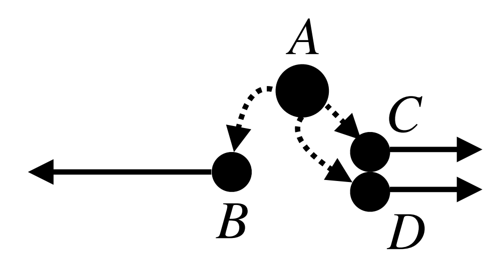
$$\Rightarrow\; \frac{m_A^2+m_B^2-\left(m_C+m_D+\cdots\right)^2}{2m_A} \ge E_B \ge m_B$$



$E_B = m_B$

Στο κάτω όριο της E_B (επάνω όριο της m_X) το $\left|\vec{p}_B\right|$ και το $\left|\vec{p}_X\right|$ μηδενίζονται:

$$E_B = m_B \;\Rightarrow\; m_X = m_A - m_B \;\Rightarrow\; m_B + m_X = m_A \;\Rightarrow\; \left|\vec{p}_B\right| = \left|\vec{p}_X\right| = 0$$



Δηλαδή, υποθέτοντας τρία τελικά προϊόντα, τα σωματίδια C και D παράγονται αντιγραμμικά:

$$\left.\begin{aligned}\vec{p}_X &= \vec{p}_C + \vec{p}_D = \vec{0}\\ \vec{p}_A &= \vec{p}_B + \vec{p}_X = \vec{0}\end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \vec{p}_B = \vec{0}$$

$$E_B = \frac{m_A^2+m_B^2-\left(m_C+m_D\right)^2}{2m_A}$$

Το επάνω όριο της E_B (κάτω όριο της m_X) αντιστοιχεί στην περίπτωση που τα σωματίδια $C, D, \ldots$ παράγονται όλα συγγραμικά. Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε εργαζόμενοι αντίστροφα με τρία τελικά σωματίδια, δηλαδή δείχνοντας ότι όταν τα σωματίδια C και D παράγονται συγγραμικά, τότε ισχύει $m_X = m_C + m_D$.

$$\left.\begin{array}{c}\beta_C=\beta_D \Rightarrow \dfrac{1}{\gamma_C\beta_C}=\dfrac{1}{\gamma_D\beta_D} \Rightarrow \dfrac{m_C}{\left|\overrightarrow{p}_C\right|}=\dfrac{m_D}{\left|\overrightarrow{p}_D\right|} \Rightarrow \left(\dfrac{m_C}{\left|\overrightarrow{p}_C\right|}-\dfrac{m_D}{\left|\overrightarrow{p}_D\right|}\right)^2=0 \Rightarrow \dfrac{m_C^2}{\left|\overrightarrow{p}_C\right|^2}+\dfrac{m_D^2}{\left|\overrightarrow{p}_D\right|^2}=2\dfrac{m_C}{\left|\overrightarrow{p}_C\right|}\dfrac{m_D}{\left|\overrightarrow{p}_D\right|} \\ \theta_{CD}=\cos^{-1}\dfrac{\overrightarrow{p}_C\cdot\overrightarrow{p}_D}{\left|\overrightarrow{p}_C\right|\left|\overrightarrow{p}_D\right|}=0 \Rightarrow \cos\theta_{CD}=1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1+\frac{m_C^2}{\left|\overrightarrow{p}_C\right|^2}+\frac{m_D^2}{\left|\overrightarrow{p}_D\right|^2}=\cos^2\theta_{CD}+2\frac{m_C}{\left|\overrightarrow{p}_C\right|}\frac{m_D}{\left|\overrightarrow{p}_D\right|}\cos\theta_{CD}$$

$$\Rightarrow\ \left|\overrightarrow{p}_C\right|^2\left|\overrightarrow{p}_D\right|^2+\left|\overrightarrow{p}_C\right|^2 m_D^2+m_C^2\left|\overrightarrow{p}_D\right|^2=\left|\overrightarrow{p}_C\right|^2\left|\overrightarrow{p}_D\right|^2\cos^2\theta_{CD}+2\left|\overrightarrow{p}_C\right|\left|\overrightarrow{p}_D\right|m_Cm_D\cos\theta_{CD}$$

$$\Rightarrow\ \left|\overrightarrow{p}_C\right|^2\left|\overrightarrow{p}_D\right|^2+\left|\overrightarrow{p}_C\right|^2 m_D^2+m_C^2\left|\overrightarrow{p}_D\right|^2+m_C^2m_D^2=\left|\overrightarrow{p}_C\right|^2\left|\overrightarrow{p}_D\right|^2\cos^2\theta_{CD}+2m_Cm_D\left|\overrightarrow{p}_C\right|\left|\overrightarrow{p}_D\right|\cos\theta_{CD}+m_C^2m_D^2$$

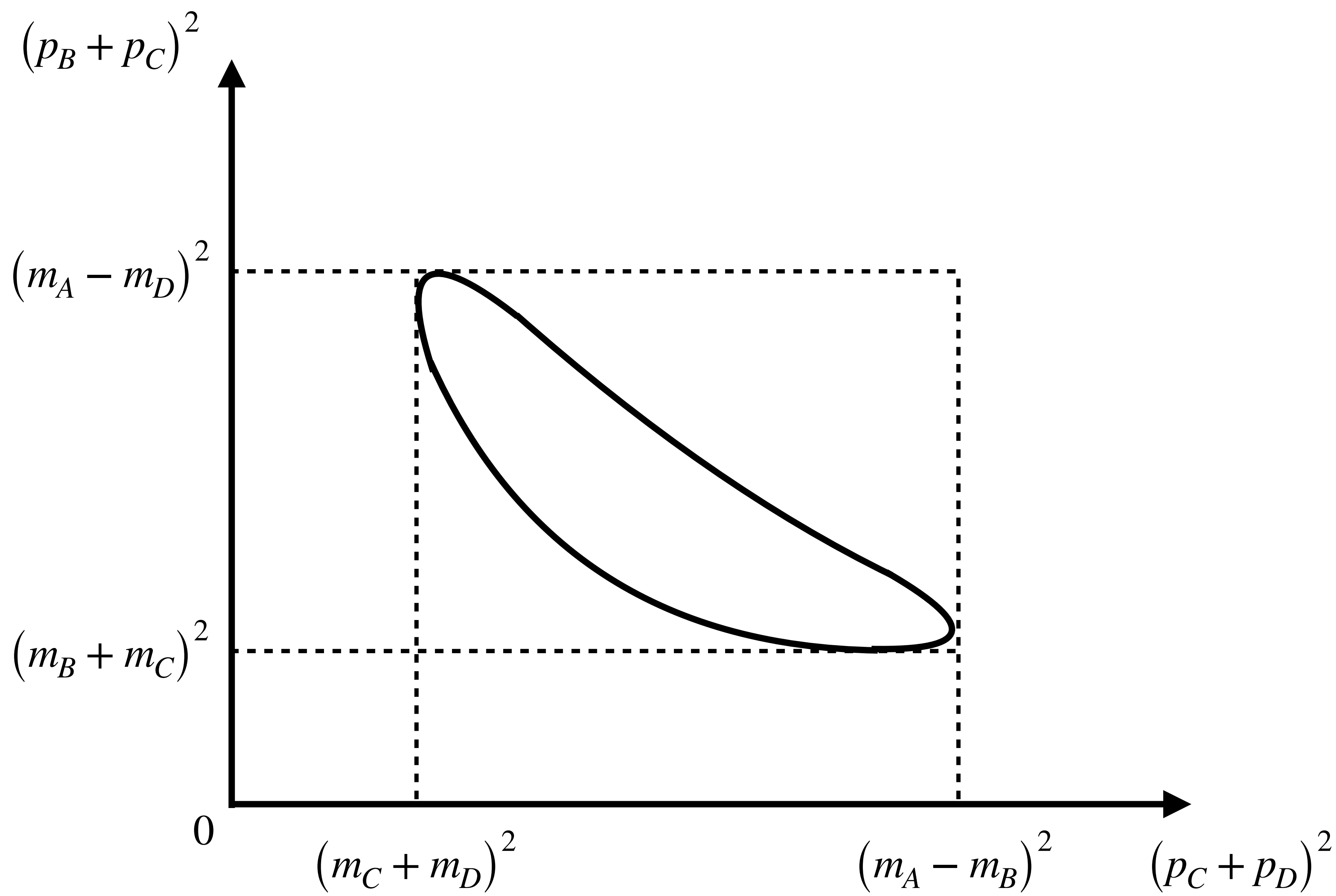
$$\Rightarrow\ \left(\left|\overrightarrow{p}_C\right|^2+m_C^2\right)\left(\left|\overrightarrow{p}_D\right|^2+m_D^2\right)=\left(\overrightarrow{p}_C\cdot\overrightarrow{p}_D\right)^2+2m_Cm_D\overrightarrow{p}_C\cdot\overrightarrow{p}_D+\left(m_Cm_D\right)^2$$

$$\Rightarrow\ \left(E_CE_D\right)^2=\left(\overrightarrow{p}_C\cdot\overrightarrow{p}_D+m_Cm_D\right)^2\ \Rightarrow\ E_CE_D=\overrightarrow{p}_C\cdot\overrightarrow{p}_D+m_Cm_D$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow E_CE_D-\overrightarrow{p}_C\cdot\overrightarrow{p}_D=p_C\cdot p_D=m_Cm_D \\ m_X^2=p_X^2=\left(p_C+p_D\right)^2=p_C^2+p_D^2+2p_C\cdot p_D=m_C^2+m_D^2+2p_C\cdot p_D\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ m_X^2=m_C^2+m_D^2+2m_Cm_D=\left(m_C+m_D\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ m_X=m_C+m_D$$

Τα όρια διακύμανσης των κινηματικών μεταβλητών σε διασπάσεις $1 \rightarrow 3$ σωματιδίων παριστάνονται γραφικά με τα διαγράμματα Dalitz:



(b) Για τη διάσπαση του μιονίου, έχουμε:

$$\frac{m_\mu^2 + m_e^2 - \left(m_{\nu_e} + m_{\nu_\mu}\right)^2}{2m_\mu} \geq E_e \geq m_e \quad \Rightarrow \quad \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2m_\mu} \geq E_e \geq m_e \quad \Rightarrow \quad \underbrace{52.83\ \text{MeV}}_{\simeq \frac{1}{2} m_\mu c^2} \geq E_e \geq 0.51\ \text{MeV}$$

Στο κάτω όριο: $$E_e = 0.51\ \text{MeV} \quad \Rightarrow \quad p_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{p}_{\bar{\nu}_e} \uparrow\downarrow \overrightarrow{p}_{\nu_\mu} \quad \Rightarrow \quad p_{\bar{\nu}_e} = p_{\nu_\mu} = \frac{m_\mu - E_e}{2} = 52.27\ \text{MeV}$$

Στο επάνω όριο: $$E_e = 52.83\ \text{MeV} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{p}_{\bar{\nu}_e} \uparrow\uparrow \overrightarrow{p}_{\nu_\mu} \quad \Rightarrow \quad p_{\bar{\nu}_e} = p_{\nu_\mu} = \frac{m_\mu - E_e}{2} = 26.41\ \text{MeV}$$

Δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις τα νετρίνα μοιράζονται τη διαφορά μεταξύ της μάζας του μιονίου και της ενέργειας του ηλεκτρονίου, αλλά στο επάνω όριο εκπέμπονται συγγραμικά (έχουν ομόρροπες ορμές) ενώ στο κάτω όριο εκπέμπονται αντιγραμμικά (έχουν αντίρροπες ορμές).