ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2021 — 2022

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ & ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ

ΤΜΗΜΑ Β΄ Κ. ΒΕΛΛΙΔΗΣ — Θ. ΜΕΡΤΖΙΜΕΚΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΟ ΣΤΑΤΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΩΝ ΚΟΥΑΡΚ

4.1 Πόσες διακριτές καταστάσεις μεσονίων μπορείτε να φτιάξετε με 1, 2, 3, 4, 5, και 6 διακριτές γεύσεις κουάρκ; Ποιος είναι ο γενικός τύπος του αριθμού διακριτών μεσονικών καταστάσεων για n διακριτές γεύσεις;

Από τη σύνθεση των σπιν κουάρκ-αντικουάρκ έχουμε δύο κατηγορίες μεσονικών καταστάσεων με φυσική ομοτιμία, τα ψευδοβαθμωτά ($J^P = 0^-$) και τα διανυσματικά ($J^P = 1^-$), για κάθε αριθμό διακριτών γεύσεων.

Με n γεύσεις μπορούμε να φτιάξουμε n^2 διακριτούς συνδυασμούς κουάρκ-αντικουάρκ.

Άρα, μπορούμε γενικά να φτιάξουμε $2n^2$ διακριτές θεμελιώδεις μεσονικές καταστάσεις από n διακριτές γεύσεις: n^2 ψευδοβαθμωτά και n^2 διανυσματικά μεσόνια.

ισοδιανυσματικά μεσόνια

$\uparrow$

Π.χ. $n = 2$ (u, d) Γεύση: $2 \otimes \bar{2} = 3 \oplus 1 \rightarrow$ ισοβαθμωτά μεσόνια

Σπιν: $2 \otimes \bar{2} = 3 \oplus 1$

διανυσματικά μεσόνια $\swarrow$ $\searrow$ ψευδοβαθμωτά μεσόνια

Τα 3 ισοδιανυσματικά μεσόνια (3 καταστάσεις φορτίου) και το ισοβαθμωτό είναι διακριτά $\Rightarrow$ 4 διακριτά μεσόνια σε 2 οικογένειες ($J^P = 0^-$ και $J^P = 1^-$) $\Rightarrow$ σύνολο $= 2 \times 4 = 8$ διακριτά μεσόνια

$n = 3$ (u, d, s) Γεύση: $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$

Σπιν: $2 \otimes \bar{2} = 3 \oplus 1$

διανυσματικά μεσόνια $\swarrow$ $\searrow$ ψευδοβαθμωτά μεσόνια

Σύνολο $= 2 \times 9 = 18$ διακριτά μεσόνια

4.2 Το ίδιο πρόβλημα για τις καταστάσεις βαρυονίων.

Για τα βαρυόνια, έχουμε δύο θεμελιώδεις οικογένειες με διακριτές καταστάσεις σπιν-ομοτιμίας, $J^P = 1/2^+$ και $J^P = 3/2^+$, για κάθε αριθμό διακριτών γεύσεων.

Στην περίπτωση των βαρυονίων, η συμμετρία της κυματοσυνάρτησης σπιν-γεύσης δεσμεύει τους επιτρεπτούς συνδυασμούς παραγόντων γεύσης με παράγοντες σπιν. Για δύο κουάρκ από n διαθέσιμες γεύσεις, η κυματοσυνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε $n(n+1)/2$ συμμετρικούς και $n(n-1)/2$ αντισυμμετρικούς συνδυασμούς:

Άρα, με τρία κουάρκ:

$$\begin{array}{ccc} n \otimes n & = & \underbrace{\frac{n(n+1)}{2} \oplus \frac{n(n-1)}{2}} \\ \downarrow & & \\ n^2 & = & \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \\ \text{συνδυασμοί} & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} n \otimes n \otimes n = & \left(n \otimes \frac{n(n+1)}{2}\right) & \oplus & \left(n \otimes \frac{n(n-1)}{2}\right) \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & \text{πλήρως συμμετρικοί + μικτά συμμετρικοί συνδυασμοί} & & \text{μικτά συμμετρικοί συνδυασμοί} \end{array}$$

Για το σπιν:

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = 2 \otimes (3 \oplus 1) = (2 \otimes 3) \oplus (2 \otimes 1) = \underset{\swarrow \atop \text{πλήρως συμμετρικοί συνδυασμοί}}{4} \oplus \underbrace{2 \oplus 2}_{\searrow \atop \text{μικτά συμμετρικοί συνδυασμοί}}$$

Οι πλήρως συμμετρικοί συνδυασμοί γεύσης συνδυάζονται με τους πλήρως συμμετρικούς συνδυασμούς σπιν (αντίστοιχους σε $J^P = 3/2^+$) και οι συνδυασμοί μικτής συμμετρίας γεύσης συνδυάζονται με τους συνδυασμούς μικτής συμμετρίας σπιν (αντίστοιχους σε $J^P = 1/2^+$), έτσι ώστε το γινόμενο να είναι πάντα συμμετρικό. Επομένως, ο αριθμός των διακριτών θεμελιωδών βαρυονίων προσδιορίζεται μόνο από τον παράγοντα γεύσης που περιέχει τους πλήρως συμμετρικούς συνδυασμούς και είναι $n^2(n+1)/2$.

$$4 \oplus 2 = 6 \text{ βαρυόνια (4 Δ + 2 N)}$$

Π.χ. $n = 2$ (u, d)

Γεύση: $2 \otimes 2 \otimes 2 = \boxed{(2 \otimes 3)} \oplus (2 \otimes 1) = \boxed{4} \oplus \boxed{2 \oplus 2}$

Σπιν: $2 \otimes 2 \otimes 2 = (2 \otimes 3) \oplus (2 \otimes 1) = \boxed{4} \oplus \boxed{2 \oplus 2}$

$J^P = \frac{3}{2}^+$ $\qquad$ $J^P = \frac{1}{2}^+$

$$10 \oplus 8 = 18 \text{ βαρυόνια (10άδα + 8άδα)}$$

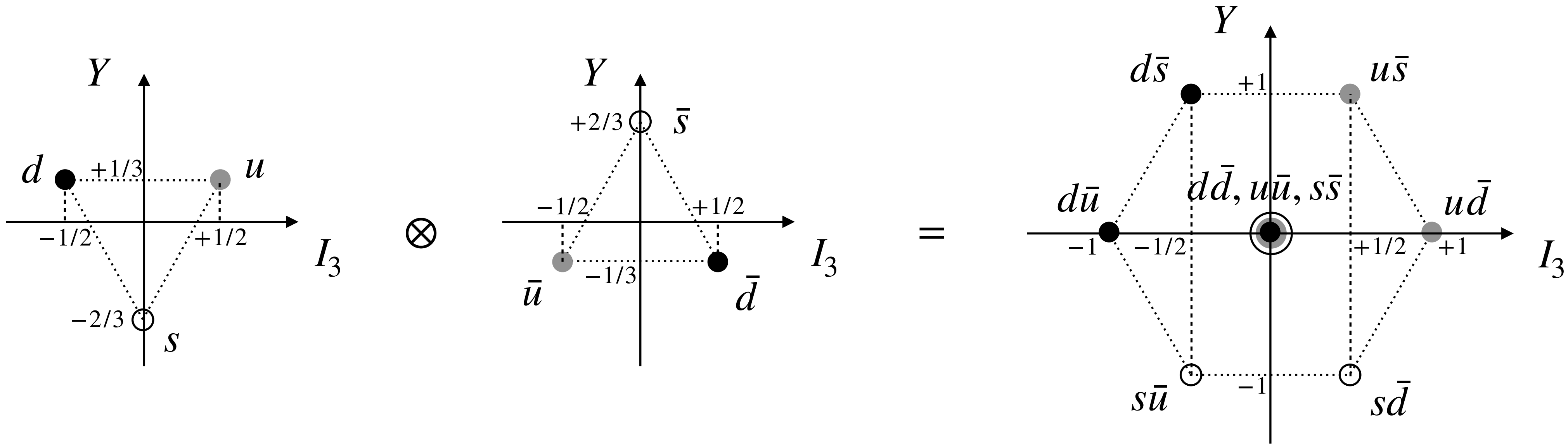
$n = 3$ (u, d, s)

Γεύση: $3 \otimes 3 \otimes 3 = \boxed{(3 \otimes 6)} \oplus (3 \otimes 3) = \boxed{10} \oplus \boxed{8 \oplus 8 \oplus 1}$

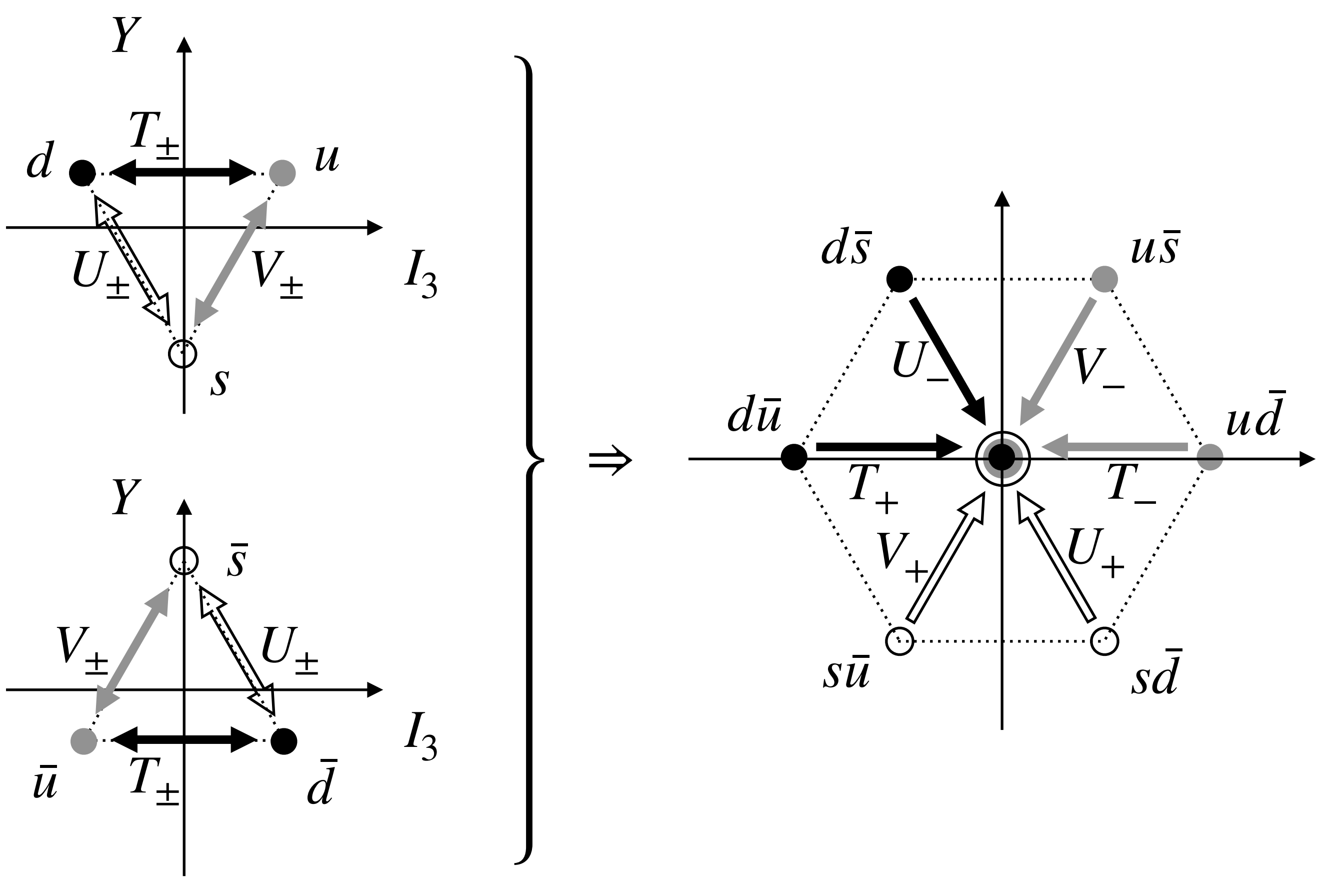
Σπιν: $2 \otimes 2 \otimes 2 = (2 \otimes 3) \oplus (2 \otimes 1) = \boxed{4} \oplus \boxed{2 \oplus 2}$

$J^P = \frac{3}{2}^+$ $\qquad$ $J^P = \frac{1}{2}^+$

4.3 Χρησιμοποιώντας τους τελεστές κλίμακας, βρείτε τις φυσικές καταστάσεις μεσονίων με τις τρεις ελαφρότερες γεύσεις u, d, s.



Οι τρεις κεντρικές καταστάσεις με $Y = 0,\ I_3 = 0$ μπορούν να κατασκευαστούν με τους τελεστές κλίμακας και τη συνθήκη ορθογωνιότητας. Στο διάγραμμα $(I_3\,,Y)$, ξεκινώντας από τις κορυφές του εξάγωνου, μπορούμε να πάμε στο κέντρο με 6 τρόπους:



$$T_+|d\bar{u}\rangle = |(T_+d)\bar{u}\rangle + |d(T_+\bar{u})\rangle = |u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle$$

$$T_-|u\bar{d}\rangle = |(T_-u)\bar{d}\rangle + |u(T_-\bar{d})\rangle = |d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle = -T_+|d\bar{u}\rangle$$

$$V_+|s\bar{u}\rangle = |(V_+s)\bar{u}\rangle + |s(V_+\bar{u})\rangle = |u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle$$

$$V_-|u\bar{s}\rangle = |(V_-u)\bar{s}\rangle + |u(V_-\bar{s})\rangle = |s\bar{s}\rangle - |u\bar{u}\rangle = -V_+|s\bar{u}\rangle$$

$$U_+|s\bar{d}\rangle = |(U_+s)\bar{d}\rangle + |s(U_+\bar{d})\rangle = |d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle$$

$$U_-|d\bar{s}\rangle = |(U_-d)\bar{s}\rangle + |d(U_-\bar{s})\rangle = |s\bar{s}\rangle - |d\bar{d}\rangle = -U_+|s\bar{d}\rangle$$

Μόνο δύο από τις έξι κεντρικές καταστάσεις που κατασκευάστηκαν με τους τελεστές κλίμακας είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Υπάρχουν όμως τρεις καταστάσεις με $Y = 0,\ I_3 = 0$. Άρα, μία κατάσταση δεν είναι μέλος της ίδιας πολλαπλής και δεν μπορεί να κατασκευαστεί με τους τελεστές κλίμακας.

Κατασκευάζουμε πρώτα τις δύο γραμμικά ανεξάρτητες καταστάσεις από τους τρεις συνδυασμούς που βρήκαμε με τους τελεστές κλίμακας:

$$|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle \qquad |u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle \qquad |d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle$$

Ταυτοποιούμε μία κατάσταση με το μέλος $I_3 = 0$ της ισοτριπλής που είχαμε κατασκευάσει με δύο γεύσεις, u και d:

$$|\pi^0\rangle = |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle\right)$$

Η δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη κατάσταση κατασκευάζεται παίρνοντας το γραμμικό συνδυασμό των άλλων δύο καταστάσεων που βρήκαμε με τους τελεστές κλίμακας:

$$|\psi_2\rangle = \alpha\left(|u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle\right) + \beta\left(|d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle\right)$$

και απαιτώντας να είναι κι αυτός κανονικοποιημένος στη μονάδα και ορθογώνιος στην $|\psi_1\rangle$:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0 \qquad \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1$$

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \alpha\left(\langle u\bar{u}| - \langle d\bar{d}|\right)\left(|u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle\right) + \beta\left(\langle u\bar{u}| - \langle d\bar{d}|\right)\left(|d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle\right) = 0$$
$$\Rightarrow\; \alpha\langle u\bar{u}|u\bar{u}\rangle - \beta\langle d\bar{d}|d\bar{d}\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \alpha - \beta = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \beta$$

$$\langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1 \;\Rightarrow\; \alpha^2\left(\langle u\bar{u}| - \langle s\bar{s}|\right)\left(|u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle\right) + 2\alpha\beta\left(\langle u\bar{u}| - \langle s\bar{s}|\right)\left(|d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle\right) + \beta^2\left(\langle d\bar{d}| - \langle s\bar{s}|\right)\left(|d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle\right) = 1$$
$$\Rightarrow\; \alpha^2\left(\langle u\bar{u}|u\bar{u}\rangle + \langle s\bar{s}|s\bar{s}\rangle\right) + 2\alpha\beta\langle s\bar{s}|s\bar{s}\rangle + \beta^2\left(\langle d\bar{d}|d\bar{d}\rangle + \langle s\bar{s}|s\bar{s}\rangle\right) = 1$$
$$\Rightarrow\; 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 = 1 \;\Rightarrow\; 2\alpha^2 + 2\alpha^2 + 2\alpha^2 = 1 \;\Rightarrow\; 6\alpha^2 = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$$
$$\Rightarrow\; |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle + |d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle\right)$$

Η τρίτη κατάσταση με $Y = 0,\ I_3 = 0$ δεν είναι μέλος της ίδιας πολλαπλής, άρα είναι μόνη της μια απλή, και κατασκευάζεται με ένα στοιχειώδη γραμμικό συνδυασμό, απαιτώντας να είναι κανονικοποιημένος στη μονάδα και ορθογώνιος στις $|\psi_1\rangle$ και $|\psi_2\rangle$:

$$|\psi_3\rangle = \kappa|u\bar{u}\rangle + \lambda|d\bar{d}\rangle + \mu|s\bar{s}\rangle \qquad \langle\psi_1|\psi_3\rangle = 0 \qquad \langle\psi_2|\psi_3\rangle = 0 \qquad \langle\psi_3|\psi_3\rangle = 1$$

$$\langle\psi_1|\psi_3\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \kappa\left(\langle u\bar{u}| - \langle d\bar{d}|\right)|u\bar{u}\rangle + \lambda\left(\langle u\bar{u}| - \langle d\bar{d}|\right)|d\bar{d}\rangle + \mu\left(\langle u\bar{u}| - \langle d\bar{d}|\right)|s\bar{s}\rangle = 0$$
$$\Rightarrow\; \kappa\langle u\bar{u}|u\bar{u}\rangle - \lambda\langle d\bar{d}|d\bar{d}\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \kappa - \lambda = 0 \;\Rightarrow\; \kappa = \lambda$$

$$\langle\psi_2|\psi_3\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \kappa\left(\langle u\bar{u}| + \langle d\bar{d}| - 2\langle s\bar{s}|\right)|u\bar{u}\rangle + \lambda\left(\langle u\bar{u}| + \langle d\bar{d}| - 2\langle s\bar{s}|\right)|d\bar{d}\rangle + \mu\left(\langle u\bar{u}| + \langle d\bar{d}| - 2\langle s\bar{s}|\right)|s\bar{s}\rangle = 0$$
$$\Rightarrow\; \kappa\langle u\bar{u}|u\bar{u}\rangle + \lambda\langle d\bar{d}|d\bar{d}\rangle - 2\mu\langle s\bar{s}|s\bar{s}\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \kappa + \lambda - 2\mu = 0 \;\Rightarrow\; 2\kappa = 2\mu \;\Rightarrow\; \kappa = \lambda = \mu$$

$$\langle\psi_3|\psi_3\rangle = 1 \;\Rightarrow\; \kappa^2\left(\langle u\bar{u}| + \langle d\bar{d}| + \langle s\bar{s}|\right)\left(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle\right) = 1$$
$$\Rightarrow\; \kappa^2\left(\langle u\bar{u}|u\bar{u}\rangle + \langle d\bar{d}|d\bar{d}\rangle + \langle s\bar{s}|s\bar{s}\rangle\right) = 1 \;\Rightarrow\; 3\kappa^2 = 1 \;\Rightarrow\; \kappa = \frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle\right)$$

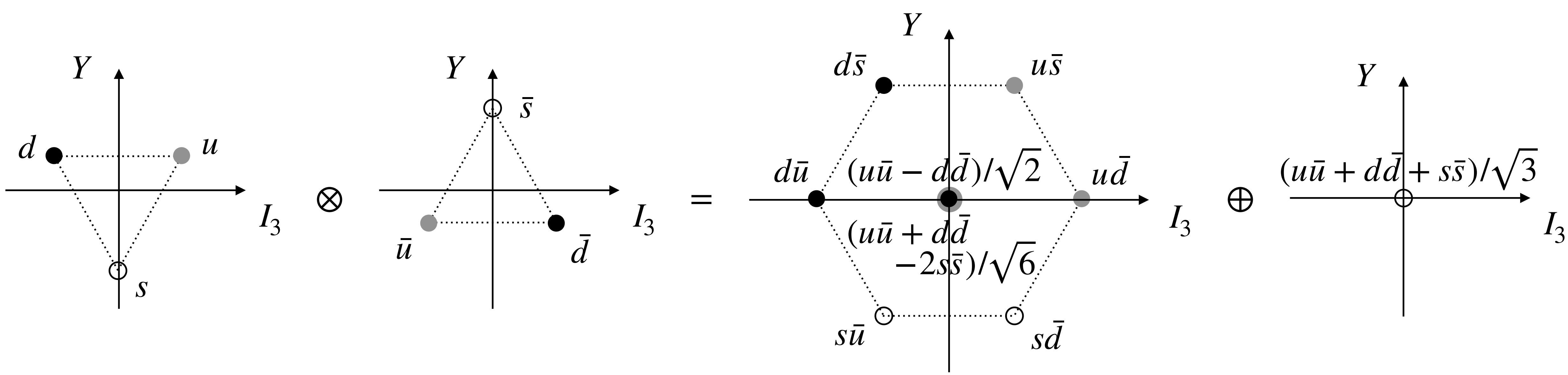
Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η κατάσταση $|\psi_3\rangle$ είναι όντως μια "άγευστη" απλή χρησιμοποιώντας τους τελεστές κλίμακας:

$$T_+|\psi_3\rangle = \frac{|u(T_+\bar{u})\rangle + |(T_+d)\bar{d}\rangle}{\sqrt{3}} = \frac{-|u\bar{d}\rangle + |u\bar{d}\rangle}{\sqrt{3}} = 0 \qquad T_-|\psi_3\rangle = \frac{|(T_-u)\bar{u}\rangle + |d(T_-\bar{d})\rangle}{\sqrt{3}} = \frac{|d\bar{u}\rangle - |d\bar{u}\rangle}{\sqrt{3}} = 0$$

$$V_+|\psi_3\rangle = \frac{|u(V_+\bar{u})\rangle + |(V_+s)\bar{s}\rangle}{\sqrt{3}} = \frac{-|u\bar{s}\rangle + |u\bar{s}\rangle}{\sqrt{3}} = 0 \qquad V_-|\psi_3\rangle = \frac{|(V_-u)\bar{u}\rangle + |s(V_-\bar{s})\rangle}{\sqrt{3}} = \frac{|s\bar{u}\rangle - |s\bar{u}\rangle}{\sqrt{3}} = 0$$

$$U_+|\psi_3\rangle = \frac{|d(U_+\bar{d})\rangle + |(U_+s)\bar{s}\rangle}{\sqrt{3}} = \frac{-|d\bar{s}\rangle + |d\bar{s}\rangle}{\sqrt{3}} = 0 \qquad U_-|\psi_3\rangle = \frac{|(U_-d)\bar{d}\rangle + |s(U_-\bar{s})\rangle}{\sqrt{3}} = \frac{|s\bar{d}\rangle - |s\bar{d}\rangle}{\sqrt{3}} = 0$$

Επομένως, ο συνδυασμός ενός κουάρκ (τριπλή) κι ενός αντικουάρκ (αντιτριπλή) δημιουργούν εννέα καταστάσεις που ομαδοποιούνται σε οκτώ (οκταπλή) και μία (απλή):



$3 \otimes \bar{3}$ $\qquad$ $8 \oplus 1$

Η συμμετρία γεύσης SU(3) θα ήταν ακριβής αν όλα τα κουάρκ των τριών ελαφρότερων γεύσεων είχαν την ίδια μάζα. Γνωρίζουμε όμως ότι το κουάρκ s είναι σημαντικά βαρύτερο από τα κουάρκ u και d. Περιμένουμε συνεπώς η συμμετρία γεύσης SU(3) να είναι μόνο προσεγγιστική, οπότε οι φυσικές καταστάσεις μεσονίων θα είναι μίγματα των καταστάσεων γεύσης της ομάδας SU(3). Πειραματικά βρίσκουμε ότι για τα ψευδοβαθμωτά μεσόνια:

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$
$$\eta \approx \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$$
$$\eta' \approx \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

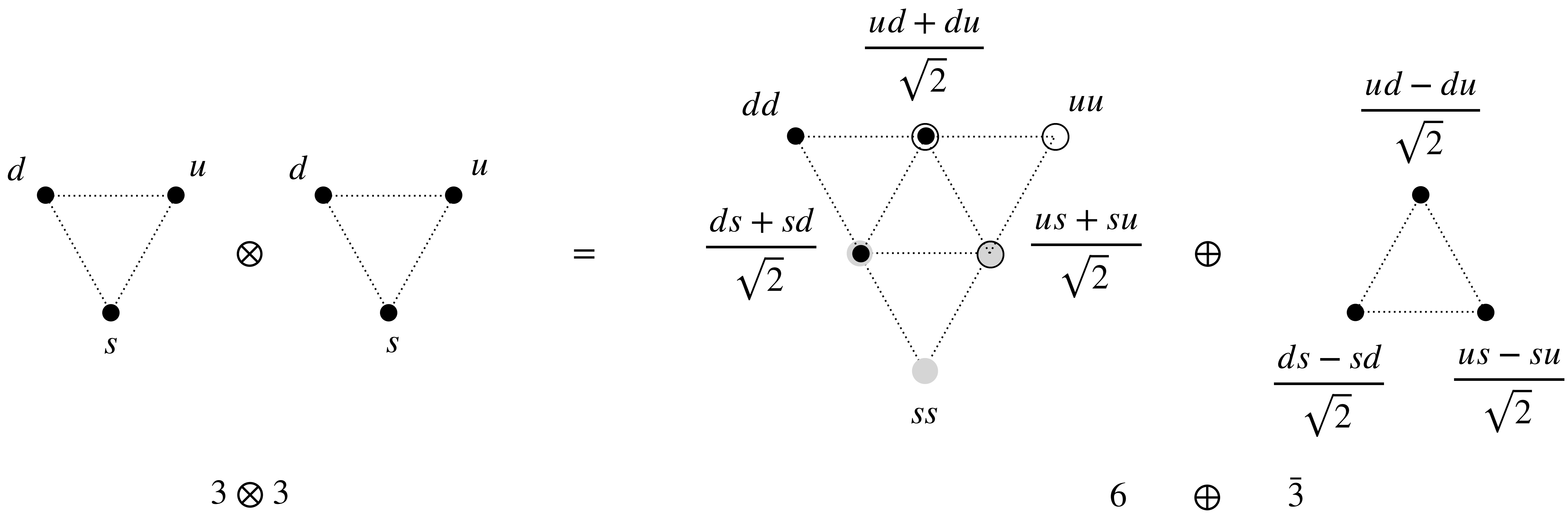
Για τα διανυσματικά μεσόνια βρίσκουμε ότι είναι κατά προσέγγιση “ιδανικά αναμεμιγμένα”:

$$\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$
$$\omega \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$$
$$\phi \approx s\bar{s}$$

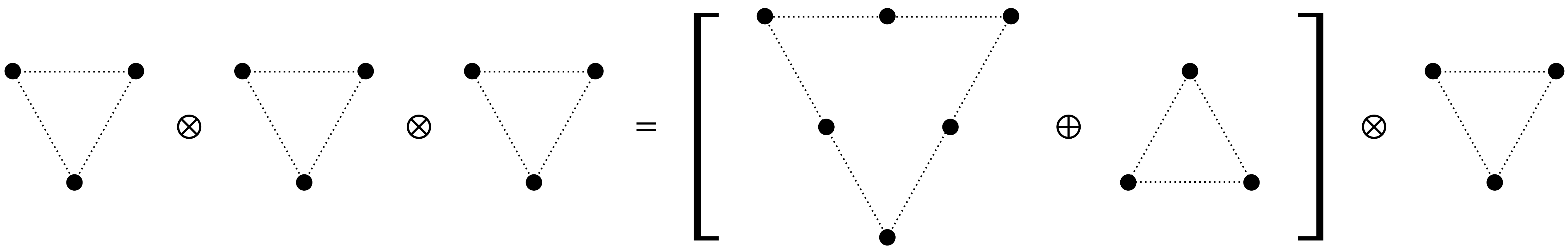
4.4 Φτιάξτε τις κυματοσυναρτήσεις σπιν-γεύσης του βαρυονίου $\Sigma^+(J^P = 1/2^+)$ με (τρίτη προβολή του) σπιν επάνω και του βαρυονίου $\Lambda(J^P = 1/2^+)$ με σπιν κάτω.

Και τα δύο βαρυόνια είναι μέλη της βαρυονικής οκτάδας με παραδοξότητα -1. Επομένως, πρέπει να δούμε πώς κατασκευάζονται οι κυματοσυναρτήσεις τις οκτάδας. Η σύνθεση των σπιν από τρεις διπλές της SU(2) είναι γνωστή, αλλά χρειάζεται η σύνθεση των γεύσεων από τρεις τριπλές της SU(3). Ένας κομψός και εύχρηστος τρόπος είναι με τη γραφική αναπαράσταση στης άλγεβρας SU(3).

Η σύνθεση δύο τριπλών γεύσης δίνει μια συμμετρική εξαπλή και μια αντισυμμετρική τριπλή:

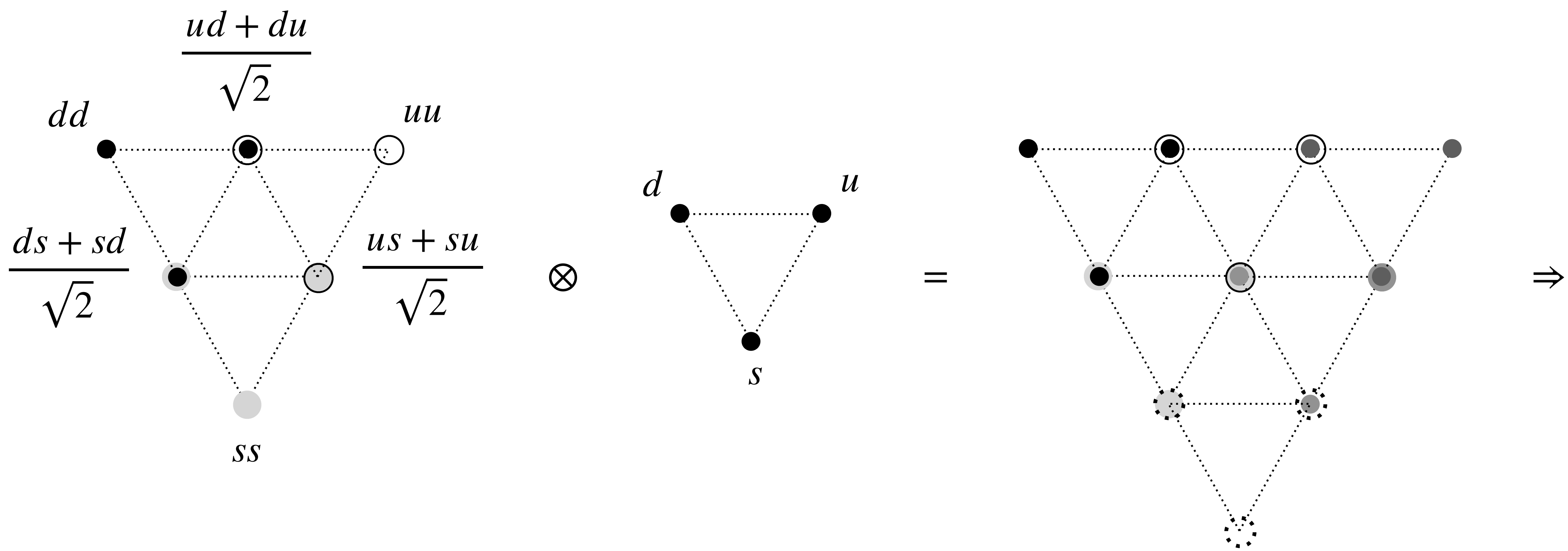


Προσθήκη άλλης μιας τριπλής:

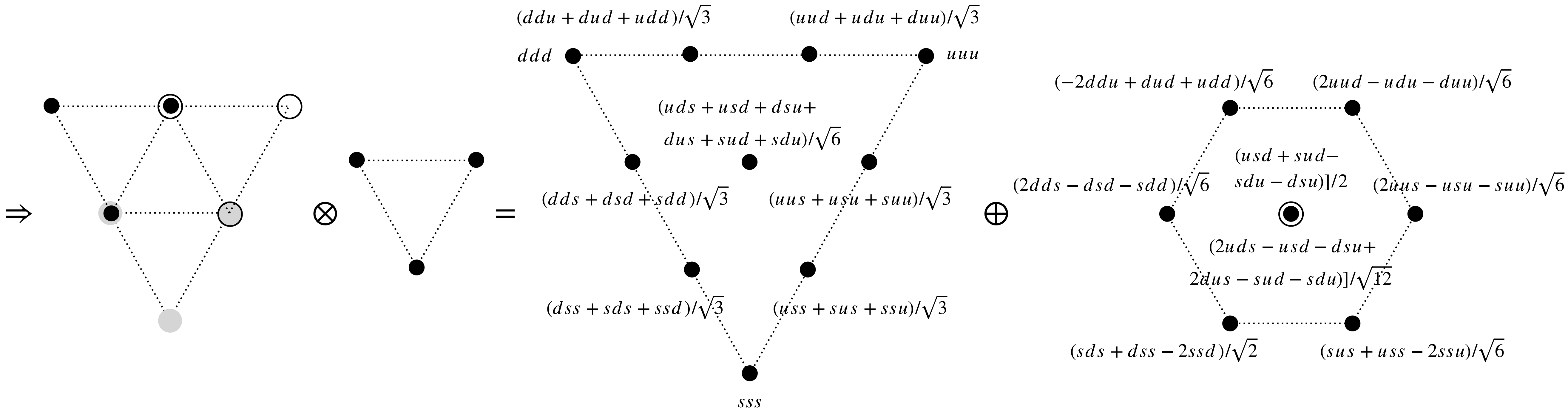


$3 \otimes 3 \otimes 3 \qquad\qquad [\,6 \oplus \bar{3}\,] \otimes 3$

Σύνθεση της τρίτης τριπλής με τη συμμετρική εξαπλή:



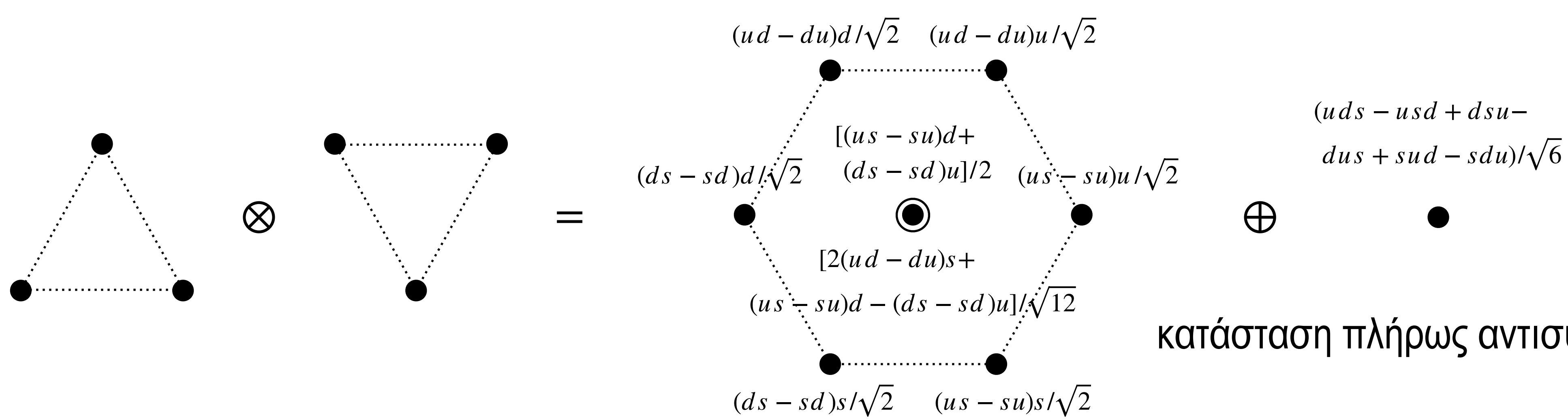
$6 \otimes 3 \qquad\qquad 10 \oplus 8$



καταστάσεις πλήρως συμμετρικές

καταστάσεις 1↔2 συμμετρικές
ορθογώνιες στα μέλη της δεκαπλής

Σύνθεση της τρίτης τριπλής με την αντισυμμετρική τριπλή:

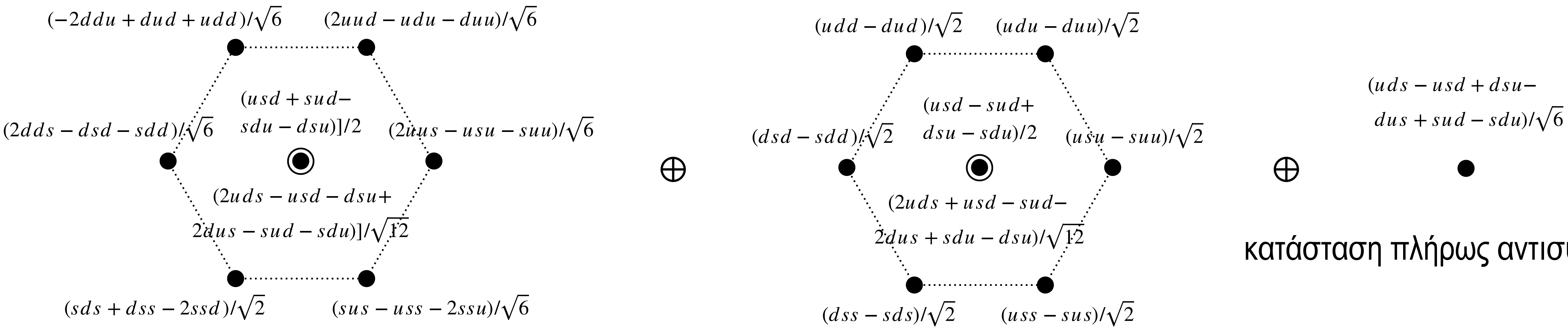


κατάσταση πλήρως αντισυμμετρική

καταστάσεις 1↔2 αντισυμμετρικές

$\bar{3} \otimes 3$ $\qquad$ $8 \oplus 1$

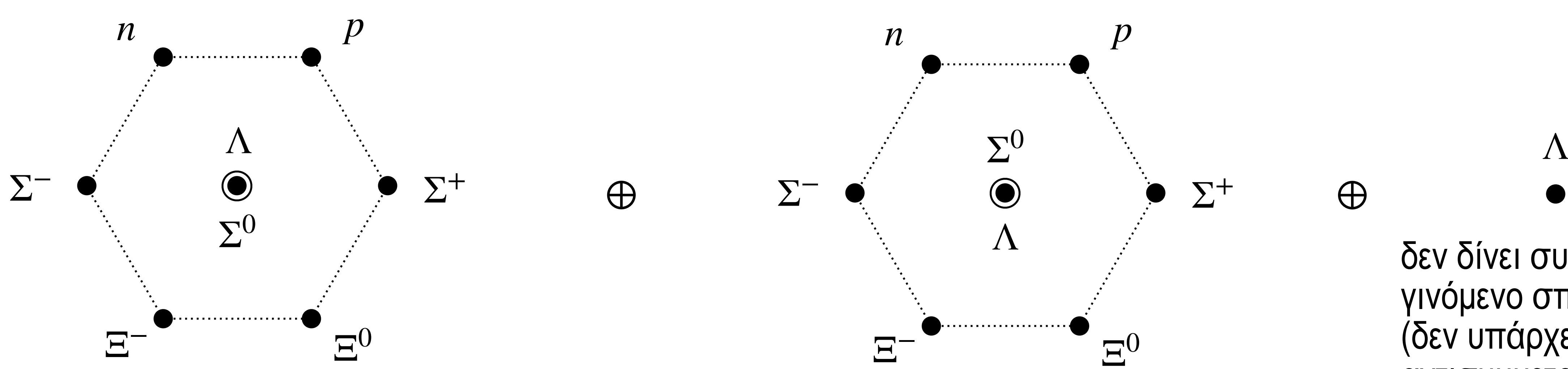
Η οκτάδα:



κατάσταση πλήρως αντισυμμετρική

καταστάσεις 1↔2 συμμετρικές

καταστάσεις 1↔2 αντισυμμετρικές



δεν δίνει συμμετρικό γινόμενο σπιν-γεύσης (δεν υπάρχει πλήρως αντισυμμετρικός συνδυασμός 3 σπιν)

Με βάση τη μικτή συμμετρία της οκτάδας, έχοντας κατασκευάσει την κυματοσυνάρτηση ενός μέλους (π.χ. του πρωτονίου), μπορούμε να κατασκευάσουμε τις κυματοσυναρτήσεις άλλων μελών της οκτάδας με απλή αλλαγή μιας γεύσης:

$$p \leftrightarrow n \ (u \leftrightarrow d) \qquad p \leftrightarrow \Sigma^+ \ (d \leftrightarrow s)$$
$$\Sigma^+ \leftrightarrow \Sigma^- \ (u \leftrightarrow d) \qquad n \leftrightarrow \Sigma^0 \ (d \leftrightarrow s)$$
$$\Xi^0 \leftrightarrow \Xi^- \ (u \leftrightarrow d)$$

Άρα:

$$
\begin{aligned}
|\Sigma^{+}\uparrow\rangle &= (2uus-usu-suu)(2\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)+(usu-suu)(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)\\
&= (2u\uparrow u\uparrow s\downarrow - u\uparrow u\downarrow s\uparrow - u\downarrow u\uparrow s\uparrow + 2u\uparrow s\downarrow u\uparrow - u\uparrow s\uparrow u\downarrow - u\downarrow s\uparrow u\uparrow\\
&\quad + 2s\downarrow u\uparrow u\uparrow - s\uparrow u\uparrow u\downarrow - s\uparrow u\downarrow u\uparrow)/\sqrt{18}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\Lambda\uparrow\rangle &= (usd+sud-sdu-dsu)(2\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)+\\
&\quad (2uds+usd-sud-2dus+sdu-dsu)(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)\\
&= (u\uparrow d\downarrow s\uparrow - u\downarrow d\uparrow s\uparrow + d\downarrow u\uparrow s\uparrow - d\uparrow u\downarrow s\uparrow + s\uparrow d\downarrow u\uparrow - s\uparrow d\uparrow u\downarrow + u\uparrow s\uparrow d\downarrow - u\downarrow s\uparrow d\uparrow\\
&\quad + s\uparrow u\uparrow d\downarrow - s\uparrow u\downarrow d\uparrow + d\downarrow s\uparrow u\uparrow - d\uparrow s\uparrow u\downarrow)/\sqrt{12}
\end{aligned}
$$

Η κανονικοποίηση υπολογίζεται στο τέλος από το άθροισμα των τετραγώνων των συντελεστών όλων των όρων της κυματοσυνάρτησης:

$$
|\psi_{\text{baryon}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\kappa_1|a\uparrow b\downarrow c\downarrow\rangle+\kappa_2|a\downarrow b\uparrow c\downarrow\rangle+\cdots\right)=\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_i \kappa_i|\psi_i(abc)\rangle\right) \quad\Rightarrow\quad N=\sum_i|\kappa_i|^2
$$

$$
|\psi_{\text{meson}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\lambda_1|a\uparrow \bar{b}\downarrow\rangle+\lambda_2|a\downarrow \bar{b}\uparrow\rangle+\cdots\right)=\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_i \lambda_i|\psi_i(a\bar{b})\rangle\right) \quad\Rightarrow\quad N=\sum_i|\lambda_i|^2
$$

4.5 Ένας εμπειρικός τύπος υπολογισμού της μάζας των μεσονίων είναι:

$$M_{\text{meson}} = m_1 + m_2 + A\frac{\overrightarrow{S}_1 \cdot \overrightarrow{S}_2}{m_1 m_2} \qquad (1)$$

όπου $m_{1,2}$ είναι οι μάζες του ζεύγους κουάρκ-αντικουάρκ που απαρτίζουν το μεσόνιο "ντυμένες" με την ενέργεια αλληλεπίδρασής τους, $m_u \sim m_d \sim 300$ MeV και $m_s \sim 500$ MeV και A είναι μια παράμετρος σθένους της "χρωμομαγνητικής" αλληλεπίδρασης μεταξύ των σπιν $\overrightarrow{S}_{1,2}$ του ζεύγους, η προσαρμογή της οποίας στα δεδομένα δίνει $A \sim (2m_u)^2 \times 160$ MeV. Εκτιμήστε με αυτόν τον τύπο τις μάζες των θεμελιωδών ψευδοβαθμωτών και διανυσματικών μεσονίων.

Υπολογίζουμε πρώτα τις ιδιοτιμές του τελεστή $\overrightarrow{S}_1 \cdot \overrightarrow{S}_2$:

$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{S}_1 + \overrightarrow{S}_2 \;\Rightarrow\; S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\overrightarrow{S}_1 \cdot \overrightarrow{S}_2 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{S}_1 \cdot \overrightarrow{S}_2 = \frac{1}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2)$$

$$\Rightarrow\; \overrightarrow{S}_1 \cdot \overrightarrow{S}_2 = \frac{1}{2}[S(S+1) - S_1(S_1+1) - S_2(S_2+1)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[S(S+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[S(S+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right] = \frac{S(S+1)}{2} - \frac{3}{4} = \begin{cases} 0 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} & S = 0 \\ 1 - \frac{3}{4} = +\frac{1}{4} & S = 1 \end{cases}$$

Θεωρούμε ότι κάθε όρος της κυματοσυνάρτησης γεύσης συνεισφέρει σύμφωνα με τον εμπειρικό τύπο (1) και προσθέτουμε τις συνεισφορές σταθμισμένες με τα τετράγωνα των συντελεστών, εφόσον η μάζα λαμβάνεται ως η μέση τιμή του αντίστοιχου τελεστή στη θεμελιώδη κατάσταση του μεσονίου και συνεπώς εξαρτάται τετραγωνικά από την αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση, π.χ.
$\pi^0 = (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2} \;\Rightarrow\; M_{\pi^0} = (1/2)M_{u\bar{u}} + (1/2)M_{d\bar{d}}$

Επομένως, για τα ψευδοβαθμωτά μεσόνια (σε παρένθεση οι πειραματικές τιμές):

$$M_\pi \sim 2m_u - 4m_u^2 \times 160\ \text{MeV} \times \frac{3}{4m_u^2} = (2\times 300 - 3\times 160)\ \text{MeV} = (600-480)\ \text{MeV} = 120\ \text{MeV} \qquad (140\ \text{MeV})$$

$$M_K \sim m_u + m_s - 4m_u^2 \times 160\ \text{MeV} \times \frac{3}{4m_u m_s} = \left(300+500-3\times\frac{3}{5}\times 160\right)\ \text{MeV} = (800-288)\ \text{MeV} = 512\ \text{MeV} \quad (500\ \text{MeV})$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \;\Rightarrow\; M_\eta \sim \frac{1}{6}M_{u\bar{u}} + \frac{1}{6}M_{d\bar{d}} + \frac{4}{6}M_{s\bar{s}} = \frac{2}{6}M_\pi + \frac{4}{6}M_{s\bar{s}} = \frac{1}{3}M_\pi + \frac{2}{3}M_{s\bar{s}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(M_\pi + 2\times 2m_s + 2\times 4m_u^2 \times 160\ \text{MeV} \times \frac{-3/4}{m_s^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(120\ \text{MeV} + 2000\ \text{MeV} - 6\times 160 \times \frac{3^2}{5^2}\ \text{MeV}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(2120\ \text{MeV} - 960\times\frac{9}{25}\ \text{MeV}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(2120-346)\ \text{MeV} = \frac{1}{3}\times 1774\ \text{MeV} = 591\ \text{MeV} \qquad (549\ \text{MeV})$$

$$\eta' = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \;\Rightarrow\; M_{\eta'} \sim \frac{1}{3}M_{u\bar{u}} + \frac{1}{3}M_{d\bar{d}} + \frac{1}{3}M_{s\bar{s}} = \frac{2}{3}M_\pi + \frac{1}{3}M_{s\bar{s}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(240\ \text{MeV} + 1000\ \text{MeV} - 3\times 160\times\frac{3^2}{5^2}\ \text{MeV}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1240\ \text{MeV} - 480\times\frac{9}{25}\ \text{MeV}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(1240-173)\ \text{MeV} = \frac{1}{3}\times 1067\ \text{MeV} = 356\ \text{MeV} \qquad (958\ \text{MeV})$$

Για τα διανυσματικά μεσόνια:

$$M_\rho \sim M_\omega \sim 2m_u + 4m_u^2 \times 160 \text{ MeV} \times \frac{1}{4m_u^2} = (2 \times 300 + 160) \text{ MeV} = 760 \text{ MeV} \qquad (770,\ 783 \text{ MeV})$$

$$M_{K^*} \sim m_u + m_s + 4m_u^2 \times 160 \text{ MeV} \times \frac{1}{4m_u m_s} = (300 + 500 + \frac{3}{5} \times 160) \text{ MeV} = (800 + 96) \text{ MeV} = 896 \text{ MeV} \quad (896 \text{ MeV})$$

$$M_\phi \sim 2m_s + 4m_u^2 \times 160 \text{ MeV} \times \frac{1}{4m_s^2} = \left(2 \times 500 + \frac{9}{25} \times 160\right) \text{ MeV} = (1000 + 58) \text{ MeV} = 1058 \text{ MeV} \qquad (1020 \text{ MeV})$$

Γενικά, η συμφωνία με το πείραμα είναι καλή, με αποκλίσεις το πολύ της τάξης του 10%, εκτός από την περίπτωση του η' όπου η πρόβλεψη και το πείραμα διαφέρουν σχεδόν κατά έναν παράγοντα 3

4.6 Ο αντίστοιχος εμπειρικός τύπος υπολογισμού της μάζας των βαρυονίων είναι:

$$M_{\text{baryon}} = m_1 + m_2 + m_3 + A' \left(\frac{\overrightarrow{S}_1 \cdot \overrightarrow{S}_2}{m_1 m_2} + \frac{\overrightarrow{S}_1 \cdot \overrightarrow{S}_3}{m_1 m_3} + \frac{\overrightarrow{S}_2 \cdot \overrightarrow{S}_3}{m_2 m_3} \right) \tag{2}$$

όπου $m_{1,2,3}$ είναι οι μάζες των κουάρκ που απαρτίζουν το βαρυόνιο “ντυμένες” με την ενέργεια αλληλεπίδρασής τους, $m_u \sim m_d \sim 360$ MeV και $m_s \sim 540$ MeV και A' είναι μια παράμετρος σθένους της “χρωμομαγνητικής” αλληλεπίδρασης μεταξύ των σπιν $\overrightarrow{S}_{i,j}$ του ζεύγους κουάρκ $\{i, j\}$, η προσαρμογή της οποίας στα δεδομένα δίνει $A' \sim (2m_u)^2 \times 50$ MeV. Εκτιμήστε με αυτόν τον τύπο τις μάζες των βαρυονίων της θεμελιώδους οκτάδας και δεκάδας.

Η επεξεργασία των όρων “χρωμομαγνητικής” αλληλεπίδρασης είναι ευκολότερη όταν οι “ντυμένες” μάζες των κουάρκ είναι ίσες, οπότε οι παρονομαστές παραγοντοποιούνται και η ιδιοτιμή του αθροίσματος των τελεστών $\overrightarrow{S}_i \cdot \overrightarrow{S}_j$ υπολογίζεται εύκολα:

$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{S}_1 + \overrightarrow{S}_2 + \overrightarrow{S}_3 \;\Rightarrow\; S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2(\overrightarrow{S}_1 \cdot \overrightarrow{S}_2 + \overrightarrow{S}_1 \cdot \overrightarrow{S}_3 + \overrightarrow{S}_2 \cdot \overrightarrow{S}_3)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; \overrightarrow{S}_1 \cdot \overrightarrow{S}_2 + \overrightarrow{S}_1 \cdot \overrightarrow{S}_3 + \overrightarrow{S}_2 \cdot \overrightarrow{S}_3 &= \frac{1}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2) \\
&= \frac{1}{2}[S(S+1) - S_1(S_1+1) - S_2(S_2+1) - S_3(S_3+1)] \\
&= \frac{1}{2}\left[S(S+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[S(S+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right] = \frac{S(S+1)}{2} - \frac{9}{8} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{8} - \frac{9}{8} = -\frac{3}{4} & S = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{15}{8} - \frac{9}{8} = +\frac{3}{4} & S = \frac{3}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τον ίδιο κανόνα υπολογισμού της μάζας των βαρυονίων με την περίπτωση των μεσονίων, δηλαδή ότι κάθε όρος της κυματοσυνάρτησης γεύσης συνεισφέρει σύμφωνα με τον εμπειρικό τύπο (2) και οι συνεισφορές προστίθενται σταθμισμένες με τα τετράγωνα των συντελεστών, π.χ.

$$\Delta^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu) \;\Rightarrow\; M_\Delta = \frac{1}{3} \times 3 \times M_{uud} = M_{uud}$$

Τα βαρυόνια που αποτελούνται από κουάρκ με ίσες “ντυμένες” μάζες είναι τα N, Δ και Ω, συνεπώς:

$$M_N \sim 3m_u - 4m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \frac{3}{4m_u^2} = (3 \times 360 - 3 \times 50) \text{ MeV} = (1080 - 150) \text{ MeV} = 930 \text{ MeV} \qquad (939 \text{ MeV})$$

$$M_\Delta \sim 3m_u + 4m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \frac{3}{4m_u^2} = (3 \times 360 + 3 \times 50) \text{ MeV} = (1080 + 150) \text{ MeV} = 1230 \text{ MeV} \qquad (1232 \text{ MeV})$$

$$M_\Omega \sim 3m_s + 4m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \frac{3}{4m_s^2} = \left(3 \times 540 + 150 \times \frac{2^2}{3^2}\right) \text{ MeV} = (1620 + 22) \text{ MeV} = 1642 \text{ MeV} \qquad (1672 \text{ MeV})$$

χρησιμοποιώντας και το δεδομένο $m_u/m_s = 360 \text{ MeV} \,/\, 540 \text{ MeV} = 2/3$

Για τα υπόλοιπα βαρυόνια της δεκάδας, Σ^* και Ξ^*, τα σπιν των κουάρκ είναι όλα ομοπαράλληλα, οπότε όλοι οι τελεστές $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ έχουν την ίδια ιδιοτιμή 1/4, όπως στην περίπτωση των διανυσματικών μεσονίων, η οποία παραγοντοποιείται από το άθροισμα των όρων “χρωμομαγνητικής” αλληλεπίδρασης:

$$M_{\Sigma^*} \sim 2m_u + m_s + \frac{A'}{4}\left(\frac{1}{m_u^2} + \frac{2}{m_u m_s}\right) = 2m_u + m_s + m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \left(\frac{1}{m_u^2} + \frac{2}{m_u m_s}\right)$$

$$= \left[2 \times 360 + 540 + 50 \times \left(1 + 2 \times \frac{2}{3}\right)\right] \text{ MeV} = (1260 + 117) \text{ MeV} = 1377 \text{ MeV} \qquad (1384 \text{ MeV})$$

$$M_{\Xi^*} \sim m_u + 2m_s + \frac{A'}{4}\left(\frac{2}{m_u m_s} + \frac{1}{m_s^2}\right) = m_u + 2m_s + m_u^2 \times 50\ \text{MeV} \times \left(\frac{2}{m_u m_s} + \frac{1}{m_s^2}\right)$$

$$= \left[360 + 2 \times 540 + 50 \times \left(2 \times \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2}\right)\right]\ \text{MeV} = \left[360 + 1080 + \frac{100}{3} \times \left(2 + \frac{2}{3}\right)\right]\ \text{MeV}$$

$$= (1440 + 89)\ \text{MeV} = 1529\ \text{MeV} \qquad (1533\ \text{MeV})$$

Στην οκτάδα, τα κουάρκ u και d έχουν ομοπαράλληλα σπιν στο βαρυόνιο Σ, οπότε η ιδιοτιμή του τελεστή $\overrightarrow{S}_u \cdot \overrightarrow{S}_d$ είναι 1/4, όπως στην περίπτωση των διανυσματικών μεσονίων, ενώ έχουν αντιπαράλληλα σπιν στο βαρυόνιο Λ, οπότε η ιδιοτιμή του τελεστή $\overrightarrow{S}_u \cdot \overrightarrow{S}_d$ είναι $-3/4$, όπως στην περίπτωση των διανυσματικών μεσονίων

Στους όρους “χρωμομαγνητικής” αλληλεπίδρασης ξεχωρίζουμε τον τελεστή $\overrightarrow{S}_u \cdot \overrightarrow{S}_d$ από το άθροισμα των $\overrightarrow{S}_i \cdot \overrightarrow{S}_j$, ώστε να διαιρείται μόνο αυτός με το γινόμενο $m_u m_d$, και μετά στους όρους που περιλαμβάνουν το κουάρκ s αφαιρούμε τον $\overrightarrow{S}_u \cdot \overrightarrow{S}_d$, ώστε το άθροισμα να παραμένει αναλλοίωτο:

$$M_\Sigma \sim m_u + m_d + m_s + A'\left(\frac{\overrightarrow{S}_u \cdot \overrightarrow{S}_d}{m_u m_d} + \frac{\overrightarrow{S}_1 \cdot \overrightarrow{S}_2 + \overrightarrow{S}_1 \cdot \overrightarrow{S}_3 + \overrightarrow{S}_2 \cdot \overrightarrow{S}_3 - \overrightarrow{S}_u \cdot \overrightarrow{S}_d}{m_u m_s}\right)$$

$$= 2m_u + m_s + 4m_u^2 \times 50\ \text{MeV} \times \left(\frac{1/4}{m_u^2} + \frac{-3/4 - 1/4}{m_u m_s}\right) = 2m_u + m_s + m_u^2 \times 50\ \text{MeV} \times \left(\frac{1}{m_u^2} - \frac{4}{m_u m_s}\right)$$

$$= \left[2 \times 360 + 540 + 50 \times \left(1 - 4 \times \frac{2}{3}\right)\right]\ \text{MeV} = \left(720 + 540 - \frac{250}{3}\right)\ \text{MeV}$$

$$= (1260 - 83)\ \text{MeV} = 1177\ \text{MeV} \qquad (1193\ \text{MeV})$$

$$M_\Lambda \sim m_u + m_d + m_s + A'\left(\frac{\overrightarrow{S}_u \cdot \overrightarrow{S}_d}{m_u m_d} + \frac{\overrightarrow{S}_1 \cdot \overrightarrow{S}_2 + \overrightarrow{S}_1 \cdot \overrightarrow{S}_3 + \overrightarrow{S}_2 \cdot \overrightarrow{S}_3 - \overrightarrow{S}_u \cdot \overrightarrow{S}_d}{m_u m_s}\right)$$

$$= 2m_u + m_s + 4m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \left(\frac{-3/4}{m_u^2} + \frac{-3/4 + 3/4}{m_u m_s}\right) = 2m_u + m_s - 4m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \frac{3}{4m_u^2}$$

$$= (2 \times 360 + 540 - 150) \text{ MeV} = (1260 - 150) \text{ MeV} = 1110 \text{ MeV} \qquad (1116 \text{ MeV})$$

Το βαρυόνιο Ξ^- ή Ξ^0 της οκτάδας έχει όμοια δομή γεύσης με το Σ^- ή Σ^+, αντίστοιχα, μετά από αντικατάσταση ενός κουάρκ πρώτης γενιάς με ένα κουάρκ s, οπότε:

$$M_\Xi \sim m_u + 2m_s + m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \left(\frac{1}{m_s^2} - \frac{4}{m_u m_s}\right) = \left[360 + 2 \times 540 + 50 \times \left(\frac{2^2}{3^2} - 4 \times \frac{2}{3}\right)\right] \text{ MeV}$$

$$= \left(360 + 1080 - 50 \times \frac{4 - 72}{27}\right) \text{ MeV}$$

$$= (1440 - 126) \text{ MeV} = 1314 \text{ MeV} \qquad (1318 \text{ MeV})$$

Σε όλες τις περιπτώσεις οι αποκλίσεις από το πείραμα είναι μικρότερες από 2%

4.7 Η ιδιάζουσα (intrinsic) μαγνητική διπολική ροπή ενός “σημειακού” φερμιονίου μάζας m και φορτίου q σε ηρεμία ορίζεται από το σπιν του:

$$\overrightarrow{\mu} = \frac{q}{m}\overrightarrow{S} \quad \Rightarrow \quad \mu_z = \frac{q}{m}S_z$$

όπου ο λόγος q/m ταυτίζεται με τον κλασικό “γυρομαγνητικό” λόγο g του σωματιδίου. Κατά σύμβαση, ο όρος “μαγνητική ροπή” στο σύστημα μονάδων SI (αποκαθιστώντας τις σταθερές $\hbar$ και c) συνδέεται με το μισό του γυρομαγνητικού λόγου, $\mu = (g/2)(\hbar/c) = (q\hbar)/(2mc)$. Χρησιμοποιώντας τις “ντυμένες” μάζες $m_u \sim m_d \sim 360$ MeV των κουάρκ πρώτης γενιάς, υπολογίστε την μαγνητική ροπή του πρωτονίου και του νετρονίου, καθώς και το λόγο τους.

Ενδιαφερόμαστε για τη μέση τιμή του τελεστή συνολικής μαγνητικής ροπής σε μια ορισμένη κατάσταση συνολικού σπιν του βαρυονίου οκτάδας, έστω την κατάσταση με σπιν “επάνω” (η κατάσταση με σπιν “κάτω” είναι ακριβώς συμμετρική), οπότε:

$$\mu_B = 2\langle B\uparrow|(\mu_1+\mu_2+\mu_3)_z|B\uparrow\rangle = 2\left\langle B\uparrow\left|\left(\frac{\mu_1}{\hbar}S_{1_z}+\frac{\mu_2}{\hbar}S_{2_z}+\frac{\mu_3}{\hbar}S_{3_z}\right)\right|B\uparrow\right\rangle = 2\sum_{i=1}^{3}\frac{\mu_i}{\hbar}\left\langle B\uparrow\left|S_{i_z}\right|B\uparrow\right\rangle$$

Η κυματοσυνάρτηση σπιν-γεύσης του πρωτονίου με σπιν “επάνω” είναι:

$$\begin{aligned}|p\uparrow\rangle = (&2u\uparrow u\uparrow d\downarrow - u\uparrow u\downarrow d\uparrow - u\downarrow u\uparrow d\uparrow +\\ &2u\uparrow d\downarrow u\uparrow - u\uparrow d\uparrow u\downarrow - u\downarrow d\uparrow u\uparrow +\\ &2d\downarrow u\uparrow u\uparrow - d\uparrow u\uparrow u\downarrow - d\uparrow u\downarrow u\uparrow)/\sqrt{18}\end{aligned}$$

Η κυματοσυνάρτηση αυτή αποτελείται από τρεις τριάδες όρων που διαφέρουν μεταξύ τους μόνο ως προς τη μετάθεση του κουάρκ d, οπότε η συνεισφορά κάθε τριάδας είναι η ίδια και συνεπώς:

$$\begin{aligned}\mu_p = \frac{3\times 2}{\hbar}(\,4\,&\langle u\uparrow u\uparrow d\downarrow|(\mu_1S_{1_z}+\mu_2S_{2_z}+\mu_3S_{3_z})|u\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle\\ &+\langle u\uparrow u\downarrow d\uparrow|(\mu_1S_{1_z}+\mu_2S_{2_z}+\mu_3S_{3_z})|u\uparrow u\downarrow d\uparrow\rangle\\ &+\langle u\downarrow u\uparrow d\uparrow|(\mu_1S_{1_z}+\mu_2S_{2_z}+\mu_3S_{3_z})|u\downarrow u\uparrow d\uparrow\rangle)/18\end{aligned}$$

όπου λαμβάνεται υπόψη η ορθοκανονικότητα των διαφορετικών όρων και οι συντελεστές τετραγωνίζονται όταν παίρνουμε τη μέση τιμή, ενώ οι ιδιοτιμές κάθε τελεστή S_z είναι $\pm 1/2$, οπότε:

$$\mu_p = \frac{1}{3}\left[4\left(\frac{\mu_u}{2}+\frac{\mu_u}{2}-\frac{\mu_d}{2}\right)+\left(\frac{\mu_u}{2}-\frac{\mu_u}{2}+\frac{\mu_d}{2}\right)+\left(-\frac{\mu_u}{2}+\frac{\mu_u}{2}+\frac{\mu_d}{2}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[2(2\mu_u-\mu_d)+\frac{\mu_d}{2}+\frac{\mu_d}{2}\right] = \frac{1}{3}(4\mu_u - 2\mu_d + \mu_d)$$

$$\Rightarrow \ \mu_p = \frac{4\mu_u-\mu_d}{3} = \frac{4(q_u\hbar)/(2m_u c) - (q_d\hbar/(2m_d)c}{3} = \frac{4q_u/e - q_d/e}{3}\cdot\frac{m_N}{m_u}\cdot\frac{e\hbar}{2m_N c} = \frac{8/3+1/3}{3}\cdot\frac{m_N}{m_u}\mu_N = \frac{m_N}{m_u}\mu_N = 2.78\,\mu_N$$

σε πολύ καλή συμφωνία με την πειραματική τιμή $\mu_p = 2.79\,\mu_N$, όπου $m_N = 939$ MeV είναι η μάζα του νουκλεονίου, $m_u = 338$ MeV είναι μια καλύτερη προσέγγιση της “ντυμένης” μάζας των κουάρκ πρώτης γενιάς, e είναι η μονάδα (θετικού) ηλεκτρικού φορτίου και $\mu_N = (e\hbar)/(2m_N c)$ είναι η μονάδα πυρηνικής μαγνητικής ροπής που ονομάζεται “μαγνητόνη”

Για το νετρόνιο η ισοτοπική συμμετρία των κουάρκ u και d οδηγεί στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα μετά την εναλλαγή των γεύσεων:

$$\Rightarrow \ \mu_n = \frac{4\mu_d-\mu_u}{3} = \frac{4q_d/e - q_u/e}{3}\cdot\frac{m_N}{m_u}\cdot\frac{e\hbar}{2m_N c} = \frac{-4/3-2/3}{3}\cdot\frac{m_N}{m_u}\mu_N = -\frac{2}{3}\cdot\frac{m_N}{m_u}\mu_N = -\,1.85\,\mu_N$$

σε καλή συμφωνία με την πειραματική τιμή $\mu_n = -\,1.91\,\mu_N$, με μια απόκλιση της τάξης του 3%

Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να υπολογιστούν οι μαγνητικές ροπές όλων των βαρυονίων της οκτάδας, ενώ λαμβάνοντας υπόψη ότι οι “ντυμένες” μάζες των κουάρκ πρώτης γενιάς είναι ίσες, ο λόγος των μαγνητικών ροπών του νετρονίου και του πρωτονίου είναι:

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = \frac{4\mu_d-\mu_u}{4\mu_u-\mu_d} \sim \frac{4q_d-q_u}{4q_u-q_d} = \frac{4-(q_u/q_d)}{4(q_u/q_d)-1} = \frac{4-(-2)}{4(-2)-1} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$$

σε καλή συμφωνία με την πειραματική τιμή -0.685, με μια απόκλιση της τάξης του 3%