ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2021 — 2022

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ & ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ

ΤΜΗΜΑ Β΄ Κ. ΒΕΛΛΙΔΗΣ — Θ. ΜΕΡΤΖΙΜΕΚΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

1.1 Δείξτε ότι οποιαδήποτε βαθμωτή συνάρτηση $f(x, y, z)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα μιας ιδιοσυνάρτησης $f_+(x, y, z)$ της ομοτιμίας με ιδιοτιμή +1 και μιας ιδιοσυνάρτησης $f_-(x, y, z)$ της ομοτιμίας με ιδιοτιμή -1. Βρείτε τις f_+ και f_- συναρτήσει της f.

Από την f και εφαρμόζοντας μόνο χωρική ανάκλαση, μπορούμε να φτιάξουμε μόνο δύο ανεξάρτητους γραμμικούς συνδυασμούς:

$$\frac{1}{2}\left[f(\vec{r}) + f(-\vec{r})\right] = f_+(\vec{r})$$
$$\frac{1}{2}\left[f(\vec{r}) - f(-\vec{r})\right] = f_-(\vec{r})$$

όπου $\vec{r} = (x, y, z)$, οι οποίοι είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή ομοτιμίας $\hat{P}$ με τις ζητούμενες ιδιοτιμές +1 και -1, αντίστοιχα:

$$\hat{P}f_+(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left[\hat{P}f(\vec{r}) + \hat{P}f(-\vec{r})\right] = \frac{1}{2}\left[f(-\vec{r}) + f(\vec{r})\right] = f_+(\vec{r})$$
$$\hat{P}f_-(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left[\hat{P}f(\vec{r}) - \hat{P}f(-\vec{r})\right] = \frac{1}{2}\left[f(-\vec{r}) - f(\vec{r})\right] = -f_-(\vec{r})$$

Η τυχαία βαθμωτή συνάρτηση f είναι πράγματι το άθροισμα των f_+ και f_- :

$$f_+(\vec{r}) + f_-(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left[f(\vec{r}) + \cancel{f(-\vec{r})} + f(\vec{r}) - \cancel{f(-\vec{r})}\right] = f(\vec{r})$$

1.2 Δείξτε ότι στην “πρωτογενή” β-διάσπαση $n \to p + e^-$ παραβιάζεται η διατήρηση της στροφορμής. Αν ήσαστε ο Pauli και προτείνατε ως πραγματική β-διάσπαση την αντίδραση $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ χωρίς να γνωρίζετε τίποτε για το νετρίνο, τι σπιν θα του αποδίδατε;

Στο ΚΜ της διάσπασης $n \to p + e^-$ (πλαίσιο ηρεμίας του νετρονίου), η στροφορμή της αρχικής κατάστασης είναι $J_n = 1/2$ και της τελικής J_{p+e^-} με $|L - S| \le J_{p+e^-} \le L + S$, όπου $S = 0$ ή 1 είναι το άθροισμα των σπιν του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου και $L = 0,1,2,\ldots$ είναι η σχετική τροχιακή στροφορμή του ζεύγους. Άρα, η J_{p+e^-} μπορεί να πάρει μόνο ακέραιες τιμές από 0 μέχρι $L + 1$, δηλαδή δεν μπορεί να είναι ίση με 1/2, οπότε η στροφορμή δεν διατηρείται.

Για να διατηρείται η στροφορμή θα πρέπει η στροφορμή της τελικής κατάστασης να παίρνει ημιακέραιες τιμές, οπότε το άθροισμα S των σπιν των τριών προϊόντων διάσπασης θα πρέπει να είναι ημιακέραιο. Επειδή $|S_{p+e^-} - S_{\bar{\nu}_e}| \le S \le S_{p+e^-} + S_{\bar{\nu}_e}$ και $S_{p+e^-} = 0,1$, το σπιν του νετρίνου θα πρέπει να είναι 1/2, δίνοντας $J_{p+e^-+\bar{\nu}_e} = 1/2$ όταν $S = 1/2$ (ένα σωματίδιο έχει σπιν αντιπαράλληλο με τα άλλα δύο) και η συνολική τροχιακή στροφορμή είναι $L = 0$ ή όταν $S = 3/2$ (και τα τρία σωματίδια έχουν παράλληλα σπιν) και $L = 1$.

1.3 Στη διάσπαση $\Delta^{++} \to p + \pi^+$, ποιες είναι οι δυνατές τιμές του κβαντικού αριθμού l της τροχιακής στροφορμής της τελικής κατάστασης στο ΚΜ αν γνωρίζουμε ότι το σπιν του βαρυονίου Δ^{++} είναι 3/2;

Επειδή το πρωτόνιο έχει σπιν 1/2 και το πιόνιο έχει σπιν 0, το άθροισμα των δύο σπιν πρέπει να είναι 1/2. Από τη διατήρηση της στροφορμής, η στροφορμή στην τελική κατάσταση είναι $J = 3/2$, οπότε $|l - 1/2| \le 3/2 \le l + 1/2$. Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται από τις τιμές $l = 1$, που αντιστοιχεί σε $J = l + 1/2$, και $l = 2$, που αντιστοιχεί σε $J = l - 1/2$. Στη φασματοσκοπία μιλάμε αντίστοιχα για p-καταστάσεις και d-καταστάσεις (ή p-κύματα και d-κύματα).

1.4 Είναι το νετρίνο ιδιοκατάσταση της ομοτιμίας; Αν ναι, ποια είναι η ιδιο-ομοτιμία του (intrinsic parity);

Η χωρική ανάκλαση μετασχηματίζει ένα αριστερόστροφο σωματίδιο σε δεξιόστροφο και αντίστροφα. Όμως, δεξιόστροφα νετρίνα δεν παρατηρούνται, συνεπώς το νετρίνο δεν είναι ιδιοκατάσταση της ομοτιμίας.

1.5 Για να μεταπίπτουν δύο αδρόνια το ένα στο άλλο, $A \longleftrightarrow B$, είναι απαραίτητο να έχουν την ίδια μάζα (που στην πράξη σημαίνει ότι πρέπει να είναι αντισωματίδια το ένα του άλλου), το ίδιο φορτίο και τον ίδιο βαρυονικό αριθμό. Δείξτε ότι, με αυτές τις συνθήκες, τα A και B πρέπει να είναι ουδέτερα μεσόνια και ταυτοποιήστε τα δυνατά ενδεχόμενα για το περιεχόμενό τους σε κουάρκ. Ποια είναι αυτά τα μεσόνια; Γιατί το νετρόνιο δεν αναμιγνύεται με το αντινετρόνιο, με τον ίδιο τρόπο που τα μεσόνια K^0 και $\bar{K}^0$ αναμιγνύονται για να δώσουν τις (προσεγγιστικές) ιδιοκαταστάσεις K_1 και K_2 του τελεστή CP; Γιατί δεν βλέπουμε μίξη των διανυσματικών μεσονίων K^{*0} και $\bar{K}^{*0}$;

Εφόσον τα δύο αδρόνια πρέπει να έχουν ακριβώς την ίδια μάζα, ώστε να επιτρέπεται ενεργειακά η αυθόρμητη μετάπτωσή τους, πρέπει να είναι αντισωματίδια το ένα του άλλου. Δεν γνωρίζουμε κανένα είδος αδρονίων πλήρως εκφυλισμένων (δηλαδή με ακριβώς την ίδια μάζα) με κάποιο άλλο είδος.

Για να διατηρείται το φορτίο στη μετάπτωση, θα πρέπει τα δύο αδρόνια να έχουν το ίδιο φορτίο. Εφόσον όμως είναι αντισωματίδια το ένα του άλλου, τα φορτία τους πρέπει να είναι αντίθετα. Συνεπώς, πρέπει και τα δύο να έχουν μηδενικό φορτίο, δηλαδή να είναι ηλεκτρικά ουδέτερα.

Για να διατηρείται ο βαρυονικός αριθμός στη μετάπτωση, θα πρέπει να είναι ο ίδιος και για τα δύο αδρόνια. Αλλά επειδή είναι και αντισωματίδια το ένα του άλλου, θα πρέπει να είναι και αντίθετος για τα δύο αδρόνια. Επομένως, πρέπει να είναι μηδέν, δηλαδή τα δύο αδρόνια να είναι μεσόνια.

Τα ουδέτερα μεσόνια αποτελούνται από ένα ζεύγος κουάρκ-αντικουάρκ αντίθετου φορτίου, δηλαδή και τα δύο είναι ‘επάνω’ ή και τα δύο ‘κάτω’ γεύσεις. Για να είναι διακριτές αδρονικές καταστάσεις, πρέπει οι δύο γεύσεις να είναι διαφορετικές. Με τις 6 διαθέσιμες γεύσεις του Καθιερωμένου Προτύπου, και δεδομένου ότι η κορυφαία γεύση δεν αδρονοποιείται, οι δυνατοί συνδυασμοί είναι $|\,d\bar{s}\rangle = |\,K^0\rangle$, $|\,u\bar{c}\rangle = |\,D^0\rangle$ και $|\,d\bar{b}\rangle = |\,B_d^0\rangle$ ή $|\,s\bar{b}\rangle = |\,B_s^0\rangle$.

Το νετρόνιο έχει βαρυονικό αριθμό +1 και το αντινετρόνιο -1, άρα δεν μπορούν να αναμιχθούν.

Το διανυσματικό μεσόνιο K^{*0} με μάζα 892 MeV/c² έχει κβαντικούς αριθμούς $L=0$ και $S=1$, με τα σπιν των δύο κουάρκ παράλληλα. Επομένως, $P\,|\,K^{*0}\rangle = -\,|\,K^{*0}\rangle$, $C\,|\,K^{*0}\rangle = (-1)^{L+S}\,|\,\bar{K}^{*0}\rangle = -\,|\,\bar{K}^{*0}\rangle$ και συνεπώς $CP\,|\,K^{*0}\rangle = |\,\bar{K}^{*0}\rangle$. Δηλαδή, οι δύο ιδιοκαταστάσεις CP έχουν τις αντίθετες ιδιοτιμές από τις αντίστοιχες του K^0:

$$\left.\begin{aligned} |\,K_1^*\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\,K^{*0}\rangle - |\,\bar{K}^{*0}\rangle\right) \\ |\,K_2^*\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\,K^{*0}\rangle + |\,\bar{K}^{*0}\rangle\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} CP\,|\,K_1^*\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\,K^{*0}\rangle - |\,\bar{K}^{*0}\rangle\right) = -\,|\,K_1^*\rangle \\ CP\,|\,K_2^*\rangle &= +\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\,K^{*0}\rangle + |\,\bar{K}^{*0}\rangle\right) = +\,|\,K_2^*\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} K_1^* &\to 3\pi \\ K_2^* &\to 2\pi \end{aligned}\right.$$

Τώρα όμως ο διαθέσιμος φασικός χώρος είναι πολύ μεγάλος και για τους δύο τρόπους διάσπασης: ~620 MeV για 2 πιόνια και ~480 MeV για 3 πιόνια. Και στους δύο τρόπους, η μέση κινητική ενέργεια ανά πιόνιο είναι μεγαλύτερη από τη μάζα του πιονίου. Άρα, και οι δύο ιδιοκαταστάσεις CP έχουν πολύ μικρούς χρόνους ζωής, μικρότερους από τους χρόνους ζωής των K_S, οπότε αυτή η μίξη δεν μπορεί να παρατηρηθεί.

1.6 Βρείτε τις ιδιοτιμές της ομοτιμίας P και της συζυγίας C για τη θεμελιώδη κατάσταση $(L = 0,\ S = 0)$ του μεσονίου π και για την πρώτη του διεγερμένη κατάσταση $(L = 0,\ S = 1)$, το μεσόνιο ρ. Γιατί το π έχει μεγαλύτερο χρόνο ζωής από το ρ; Εξηγήστε γιατί παρατηρείται η διάσπαση $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$, ενώ δεν παρατηρείται η διάσπαση $\rho^0 \to \pi^0\pi^0$.

Τα δύο μεσόνια, π και ρ, έχουν την ίδια δομή κουάρκ στις τρεις καταστάσεις φορτίου τους:

$$\left(\pi^+, \pi^0, \pi^-\right) \ \sim \ \left(\rho^+, \rho^0, \rho^-\right) \ \sim \ \left(|u\bar{d}\rangle,\ |u\bar{u} - d\bar{d}\rangle/\sqrt{2},\ |\bar{u}d\rangle\right)$$

Επίσης, έχουν και τα δύο μηδενική τροχιακή στροφορμή των κουάρκ $(L = 0)$. Η διαφορά τους οφείλεται στο γεγονός ότι το κουάρκ και το αντικουάρκ έχουν αντιπαράλληλα σπιν στο π $(S = 0 \Rightarrow J = 0)$, αλλά ομοπαράλληλα στο ρ $(S = 1 \Rightarrow J = 1)$. Επομένως, και τα δύο μεσόνια έχουν ομοτιμία

$$P(q)P(\bar{q})(-1)^L = (+1)(-1)(+1) = -1$$

Η συζυγία των μεσονίων που περιέχουν γεύσεις ίδιας γενιάς δίνεται από τη σχέση

$$C\,|q_1\bar{q}_2\rangle = (-1)^{I_1+I_2-I}(-1)^{L+S}\,|\bar{q}_1 q_2\rangle$$

όπου I_1 και I_2 είναι τα ισοσπίν των δύο κουάρκ q_1 και q_2 και I το ισοσπίν του μεσονίου. Για τα μεσόνια π και ρ:

$$C\,|\pi\rangle = (-1)^{1/2+1/2-1}(-1)^{0+0} = |\pi\rangle$$
$$C\,|\rho\rangle = (-1)^{1/2+1/2-1}(-1)^{0+1} = -\,|\rho\rangle$$

Δηλαδή, τα δύο μεσόνια έχουν την ίδια ομοτιμία (αρνητική), αλλά αντίθετη συζυγία (θετική το π και αρνητική το ρ). Γράφουμε συμβολικά $J^{PC}(\pi) = 0^{-+}$ και $J^{PC}(\rho) = 1^{--}$.

Ο κυρίαρχος τρόπος διάσπασης του μεσονίου ρ είναι σε δύο πιόνια: $\rho^{\pm} \to \pi^{\pm}\pi^{0}$, $\rho^{0} \to \pi^{+}\pi^{-}$. Αυτή η διάσπαση πραγματοποιείται με την ισχυρή αλληλεπίδραση. Αντίθετα, το ουδέτερο πιόνιο διασπάται κυρίως σε δύο φωτόνια, $\pi^{0} \to \gamma\gamma$, που γίνεται με την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση, και το φορτισμένο πιόνιο διασπάται κυρίως σε μιόνιο και νετρίνο, $\pi^{\pm} \to \mu^{\pm}\overset{(-)}{\nu}_{\mu}$, που γίνεται με την ασθενή αλληλεπίδραση. Συνεπώς, το ρ διασπάται πολύ πιο γρήγορα από το πιόνιο.

Από τη διατήρηση της στροφορμής στη διάσπαση του ρ συνεπάγεται ότι τα δύο πιόνια στην τελική κατάσταση πρέπει να έχουν σχετική τροχιακή στροφορμή $L = 1$, εφόσον έχουν μηδενικό σπιν το καθένα. Η γενική διάσπαση $\rho \to \pi\pi$ διατηρεί και την ομοτιμία, εφόσον

$$P(\pi\pi) = P(\pi)P(\pi)(-1)^{1} = (-1)(-1)(-1) = -1 = P(\rho)$$

Εντούτοις, η διάσπαση $\rho^{0} \to \pi^{0}\pi^{0}$ απαγορεύεται, επειδή τα δύο πιόνια είναι μποζόνια και η κατάσταση του ζεύγους πρέπει να είναι συμμετρική κάτω από την ανταλλαγή τους, ενώ η κατάσταση ζεύγους ταυτοτικών σωματιδίων με $L = 1$ (γενικότερα, με κάθε περιττό L) είναι αντισυμμετρική κάτω από την ανταλλαγή τους, που ισοδυναμεί με χωρική ανάκλαση, επειδή έχει ομοτιμία -1.

1.7 Θεωρήστε την αντίδραση $\pi^- + d \rightarrow n + n$, όπου το δευτέριο d είναι η δέσμια κατάσταση ενός πρωτονίου κι ενός νετρονίου με συνολικό σπιν $S = 1$ και σχετική τροχιακή στροφορμή $L = 0$. Υποθέτοντας πως το αρνητικό πιόνιο βρίσκεται σε ηρεμία ως προς το δευτέριο, βρείτε την ομοτιμία του πιονίου.

Η ομοτιμία του δευτερίου είναι

$$P(d) = P(p)P(n)(-1)^L = (+1)(+1)(-1)^0 = +1$$

Η αντίδραση γίνεται στο πλαίσιο κέντρου μάζας (ΚΜ), εφόσον το πιόνιο είναι ακίνητο ως προς το δευτέριο. Σε αυτό το πλαίσιο, τα δύο τελικά νετρόνια, ως ταυτοτικά φερμιόνια, δεν μπορούν να παράγονται με παράλληλα σπιν, σύμφωνα με την αρχή του Pauli. Άρα, με αντιπαράλληλα σπιν, έχουν συνολικό σπιν 0. Από τη διατήρηση της συνολικής στροφορμής, θα πρέπει η σχετική τροχιακή στροφορμή τους να είναι $l = S = 1$. Συνεπώς, η ομοτιμία της τελικής κατάστασης είναι

$$P(nn) = P(n)P(n)(-1)^l = (+1)(+1)(-1)^1 = -1$$

Εφόσον η ισχυρή αλληλεπίδραση με την οποία πραγματοποιείται η αντίδραση διατηρεί την ομοτιμία, έχουμε:

$$P(\pi^- d) = P(\pi^-)P(d) = P(nn) \quad \Rightarrow \quad P(\pi^-)(+1) = -1 \quad \Rightarrow \quad P(\pi^-) = -1$$

1.8 Το μεσόνιο η είναι μια κατάσταση κουάρκ $(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$ με ισοσπίν 0, σπιν 0 και ομοτιμία -1 ("ισοβαθμωτό-ψευδοβαθμωτό" μεσόνιο). Οι κυρίαρχοι τρόποι διάσπασής του είναι

$$\eta \to 2\gamma \ (39\%) \qquad \eta \to 3\pi \ (55\%) \qquad \eta \to \pi\pi\gamma \ (5\%)$$

Το η χαρακτηρίζεται "σταθερό" σωματίδιο, επομένως κανένας από αυτούς τους τρόπους διάσπασης δεν οφείλεται στην ισχυρή αλληλεπίδραση. Εντούτοις, με μάζα 549 MeV/c^2, το η έχει αρκετή ενέργεια για να διασπαστεί με ισχυρή αλληλεπίδραση σε 2π ή σε 3π. **(α)** Εξηγήστε γιατί ο τρόπος διάσπασης $\eta \to 2\pi$ απαγορεύεται και στην ισχυρή και στην ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση. **(β)** Εξηγήστε γιατί ο τρόπος διάσπασης $\eta \to 3\pi$ απαγορεύεται στην ισχυρή, αλλά επιτρέπεται στην ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση.

(α) Στη διάσπαση $\eta \to 2\pi$, η αρχική κατάσταση έχει σπιν 0, επομένως και η τελική κατάσταση πρέπει να έχει στροφορμή $J = 0$. Επειδή οι ομοτιμίες και του η και του πιονίου είναι -1, οι ομοτιμίες αρχικής και τελικής κατάστασης είναι αντίθετες:

$$P(\eta) = -1 \neq P(\pi)P(\pi)(-1)^J = (-1)(-1)(-1)^0 = +1$$

Όμως και η ισχυρή και η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση διατηρούν την ομοτιμία. Επομένως, αυτός ο τρόπος διάσπασης απαγορεύεται και στις δύο αλληλεπιδράσεις.

(β) Στη διάσπαση $\eta \to 3\pi$, η αρχική κατάσταση είναι μια "ισοτοπική απλή" (έχει ισοσπίν 0). Ωστόσο, υπάρχουν δύο δυνατές τελικές καταστάσεις με διαφορετικούς συνδυασμούς φορτίων, $\pi^+\pi^-\pi^0$ και $\pi^0\pi^0\pi^0$, επομένως η τελική κατάσταση δεν μπορεί να είναι "ισο-απλή" (έχει ισοσπίν > 0). Δηλαδή, η αρχική και η τελική κατάσταση έχουν διαφορετικό ισοσπίν. Όμως, η ισχυρή αλληλεπίδραση διατηρεί το ισοσπίν, ενώ η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση όχι. Άρα, αυτός ο τρόπος διάσπασης απαγορεύεται στην ισχυρή αλληλεπίδραση, αλλά επιτρέπεται στην ηλεκτρομαγνητική.

1.9 Δείξτε ότι η αντίδραση $\pi^- + d \to n + n + \pi^0$ δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί “στο κατώφλι” (π^- σε ηρεμία στο πλαίσιο ΚΜ). Δίνονται οι μάζες $m_{\pi^-} = 139.6$ MeV/c², $m_d = 1875.6$ MeV/c², $m_n = 939.6$ MeV/c² και $m_{\pi^0} = 135.0$ MeV/c². Υπενθυμίζεται ότι το σπιν του δευτερίου d είναι 1.

Η αντίδραση αυτή επιτρέπεται ενεργειακά στο κατώφλι, με $Q = (m_{\pi^-} + m_d - 2m_n - m_{\pi^0})c^2 = +1$ MeV. Άρα, χρειάζεται να εξετάσουμε ποιες θεμελιώδεις συμμετρίες ενδεχομένως παραβιάζει. Η αντίδραση περιλαμβάνει ένα πιόνιο κι ένα ζεύγος νουκλεονίων που στην αρχική κατάσταση είναι δέσμιο (δευτέριο) και στην τελική ελεύθερο (δύο ελεύθερα νετρόνια). Εξετάζουμε πρώτα το σύστημα των δύο νουκλεονίων.

Υποθέτοντας ισοτοπική συμμετρία, η οποία ισχύει για την ισχυρή αλληλεπίδραση με την οποία πραγματοποιείται η αντίδραση, η κυματοσυνάρτηση του δευτερίου πρέπει να είναι συνολικά αντισυμμετρική κάτω από ανταλλαγή των δύο νουκλεονίων, $(|pn\rangle - |np\rangle)/\sqrt{2}$, επειδή αυτά είναι δύο ταυτοτικά (για την ισχυρή αλληλεπίδραση) φερμιόνια. Γνωρίζοντας ότι δεν υπάρχουν δέσμιες καταστάσεις δύο πρωτονίων ή δύο νετρονίων, το δευτέριο πρέπει να είναι μια “ισο-απλή” με $(I, I_3) = (0,0)$. Εφόσον στον ισοτοπικό χώρο η κυματοσυνάρτηση του δευτερίου είναι αντισυμμετρική, στο χώρο θέσης-σπιν πρέπει να είναι συμμετρική, δηλαδή η ομοτιμία της πρέπει να είναι

$$P(d) = P(p)P(n)(-1)^L = (+1)(+1)(-1)^L = +1$$

ώστε να παραμένει συνολικά αντισυμμετρική κάτω από χωρική ανάκλαση, η οποία εναλλάσσει τα δύο νουκλεόνια. Η συνθήκη αυτή επιβάλλει ο ακέραιος L να είναι άρτιος. Στη χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη, που είναι η θεμελιώδης κατάσταση του δευτερίου, $L = 0$. Εφόσον το σπιν του δευτερίου είναι 1, τα δύο νουκλεόνια πρέπει να έχουν ομοπαράλληλα σπιν. Η κατάσταση με ομοπαράλληλα σπιν είναι η ενεργειακά ευνοϊκότερη κατάσταση των δύο δέσμιων νουκλεονίων.

Στην τελική κατάσταση, το σύστημα των δύο νουκλεονίων ανήκει σε μια συμμετρική “ισο-τριπλή”:

$$\begin{aligned} |pp\rangle &= |I=1,\ I_3=+1\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|pn\rangle+|np\rangle\right) &= |I=1,\ I_3=0\rangle \\ |nn\rangle &= |I=1,\ I_3=-1\rangle \end{aligned}$$

Άρα, η κυματοσυνάρτηση του ζεύγους στην τελική κατάσταση πρέπει να είναι αντισυμμετρική στο χώρο θέσης-σπιν, ώστε να παραμένει συνολικά αντισυμμετρική κάτω από ανταλλαγή των δύο νουκλεονίων. Συνεπώς, η ομοτιμία της πρέπει να είναι

$$P(nn)=P(n)P(n)(-1)^L=(+1)(+1)(-1)^L=-1$$

δηλαδή ο L πρέπει να είναι περιττός. Στη χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση, είναι $L=1$ και, για να διατηρείται η συνολική στροφορμή των δύο νουκλεονίων, το συνολικό τους σπιν πρέπει να είναι μηδέν, δηλαδή τα δύο νουκλεόνια πρέπει να έχουν αντιπαράλληλα σπιν.

Στο κατώφλι της αντίδρασης, η συνολικά διαθέσιμη ενέργεια δεν επιτρέπει μη μηδενική σχετική τροχιακή στροφορμή l ανάμεσα στο πιόνιο και στο σύστημα των δύο νουκλεονίων. Συνεπώς, η συνολική ομοτιμία της αρχικής κατάστασης είναι

$$P(\pi^-)P(d)(-1)^l=(-1)(+1)(-1)^0=-1$$

Από την άλλη μεριά, η ομοτιμία της τελικής κατάστασης είναι

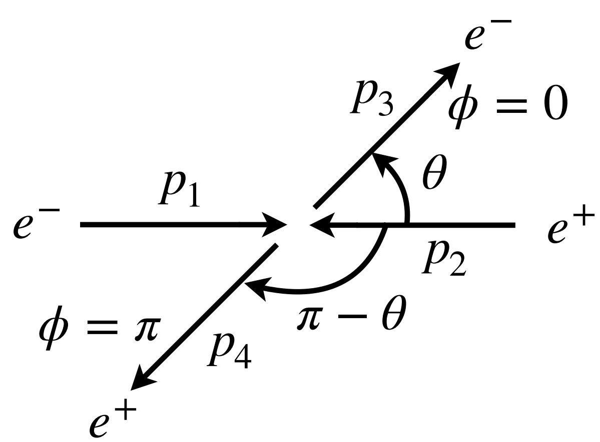
$$P(nn)P(\pi^0)(-1)^l = (-1)(-1)(-1)^0 = +1$$

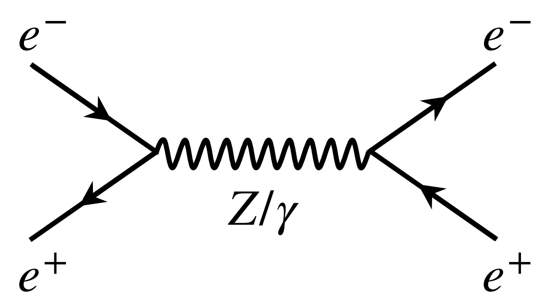
Άρα, στο κατώφλι, η ομοτιμία αναγκαστικά αλλάζει από την αρχική στην τελική κατάσταση. Αλλά η ισχυρή αλληλεπίδραση διατηρεί την ομοτιμία. Επομένως, η αντίδραση δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί στο κατώφλι, όπου το πιόνιο είναι ακίνητο ως προς το δευτέριο. Χρειάζεται κάποια κινητική ενέργεια που θα επιτρέψει μη μηδενική σχετική τροχιακή στροφορμή πιονίου-δευτερίου, η οποία θα αλλάξει την ομοτιμία της αρχικής κατάστασης, ώστε να είναι η ίδια με την ομοτιμία της τελικής κατάστασης. Στη φασματοσκοπία λέμε ότι αυτή η αντίδραση δεν πραγματοποιείται με s-κύματα πιονίου $(l = 0)$, τα οποία είναι τα μόνα που μπορούν συνεισφέρουν στο κατώφλι (δηλαδή, χωρίς κινητική ενέργεια). Χρειάζονται $p, d, \ldots$-κύματα $(l = 1,2,\ldots)$.

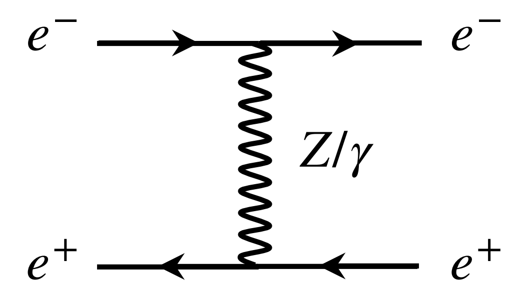
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ FEYNMAN

2.1 Η αντίδραση $e^+ + e^- \to e^+ + e^-$ λέγεται σκέδαση Bhabha. Σχεδιάστε τα διαγράμματα Feynman χαμηλότερης τάξης που την περιγράφουν και υπολογίστε την μάζα του εικονικού φωτονίου που ανταλλάσσουν τα δύο λεπτόνια σε κάθε διάγραμμα. Ποια είναι η ταχύτητα του φωτονίου σε καθεμιά περίπτωση;

Η αντίδραση μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: με εξαΰλωση του αρχικού ζεύγους και σχηματισμό του τελικού όπου ενδιάμεσα δημιουργείται ένα φωτόνιο (ή ένα μποζόνιο Z) και με ανταλλαγή ενός φωτονίου (ή μποζονίου Z)







Θεωρούμε ότι στο ΚΜ (που συμπίπτει με το εργαστήριο για συγκρουόμενες δέσμες) τα αρχικά λεπτόνια κινούνται αντίθετα με 4-ορμές p_1 και p_2 και ενέργεια E το καθένα και ότι τα εξερχόμενα λεπτόνια, που πρέπει επίσης να έχουν ενέργεια E το καθένα, εκπέμπονται σε γωνία θ ως προς τη διεύθυνση των αρχικών με 4-ορμές p_3 και p_4, οπότε, από τη διατήρηση της συνολικής 4-ορμής, η μάζα και η ταχύτητα του εικονικού φωτονίου (ή μποζονίου Z) στο διάγραμμα εξαΰλωσης-σχηματισμού είναι

$$m^2 = (p_1 + p_2)^2 \simeq 2p_1 \cdot p_2 = 2E_1E_2[1 - (-1)] = 4E^2 \;\Rightarrow\; m = 2E \;\Rightarrow\; \beta = \frac{|\vec{p}_1 + \vec{p}_2|}{E + E} = \frac{0}{2E} = 0$$

και στο διάγραμμα ανταλλαγής είναι

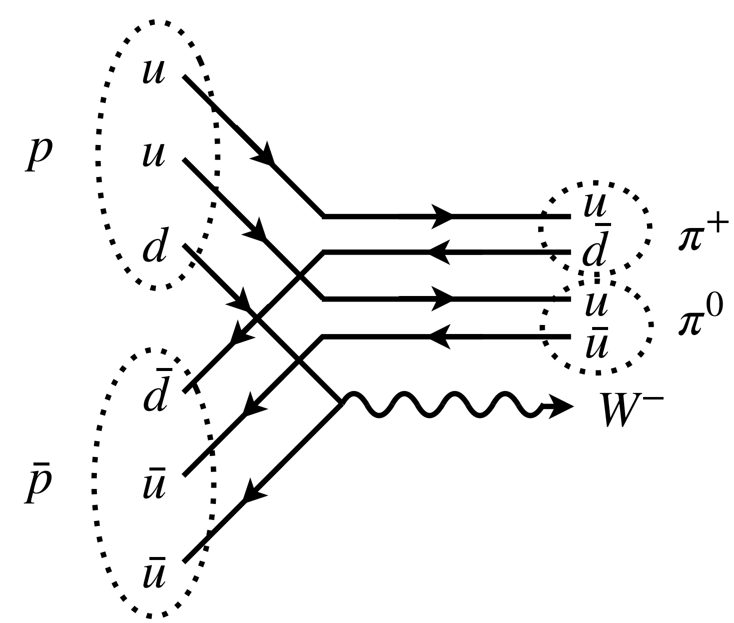
$$m^2 = (p_1 - p_3)^2 \simeq -2p_1 \cdot p_3 = -2E_1E_3(1 - \cos\theta) = -4E^2 \sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow m = i2E\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow \beta = \frac{|\vec{p}_1 - \vec{p}_3|}{E - E} = \frac{2E\sin(\theta/2)}{0} = \infty$$

2.2 Το W^- ανακαλύφθηκε το 1983 στο CERN από σκέδαση πρωτονίου-αντιπρωτονίου $p + \bar{p} \to W^- + X$, όπου το X παριστάνει ένα ή περισσότερα σωματίδια. Ποια είναι η πιθανότερη κατάσταση X; Σχεδιάστε ένα διάγραμμα Feynman για την αντίδραση με το πιθανότερο X και εξηγήστε γιατί αυτό το X είναι πιθανότερο από άλλες εκδοχές του.

Η πιθανότερη κατάσταση X είναι ένα ζεύγος ουδέτερου και θετικού πιονίου, ώστε να εξασφαλίζεται η διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου:

$$p + \bar{p} \to W^- + \pi^0 + \pi^+$$

Ο λόγος που αυτή η κατάσταση είναι η πιθανότερη είναι ότι δεν απαιτεί καμία αλληλεπίδραση εκτός από την ασθενή κορυφή παραγωγής του μποζονίου W^-, ενώ τα πιόνια παράγονται με απλή αναδιάταξη των κουάρκ των αρχικών αδρονίων:



2.3 (a) Ποια διάσπαση θεωρείτε πιθανότερη: $\Xi^-(dss) \to \Lambda(uds) + \pi^-$ ή $\Xi^- \to n + \pi^-$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. **(b)** Ποια διάσπαση του μεσονίου $D^0(u\bar{c})$ είναι πιθανότερη: $D^0 \to K^- + \pi^+$, $D^0 \to \pi^- + \pi^+$ ή $D^0 \to K^+ + \pi^-$; Σχεδιάστε τα σχετικά διαγράμματα Feynman και δικαιολογήστε την απάντησή σας. **(c)** Το μεσόνιο $B^0(d\bar{b})$ διασπάται σε D, σε K ή σε π μεσόνια; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(a) Στη διάσπαση $\Xi^-(dss) \to \Lambda(uds) + \pi^-(d\bar{u})$ ένα παράδοξο κουάρκ μεταπίπτει από τη δεύτερη στην πρώτη γενιά με εκπομπή ενός μποζονίου W εκτός φλοιού μάζας, που στη συνέχεια μετατρέπεται σε π μεσόνιο. Η μετάπτωση αυτή χαρακτηρίζεται από μεταβολή της παραδοξότητας κατά μία μονάδα ($\Delta S = 1$):

$$\Xi^- = dss \to ds + uW^- \to uds + d\bar{u} = \Lambda + \pi^-$$

Αυτή η μετάπτωση έχει μικρή πιθανότητα λόγω της αλλαγής γενιάς. Είναι, όπως λέμε, “Cabibbo-suppressed”, δηλαδή εμποδίζεται (χωρίς να απαγορεύεται) από μια παράμετρο αλλαγής γενιάς που περιγράφεται από το ημίτονο μιας μικρής φαινομενολογικής γωνίας (γωνία Cabibbo, περίπου 13$^{\text{o}}$). Η διάσπαση $\Xi^-(dss) \to n(udd) + \pi^-(d\bar{u})$ χαρακτηρίζεται από μεταβολή της παραδοξότητας κατά δύο μονάδες ($\Delta S = 2$), άρα είναι “διπλά συμπιεσμένη” (“doubly Cabibbo-suppressed”):

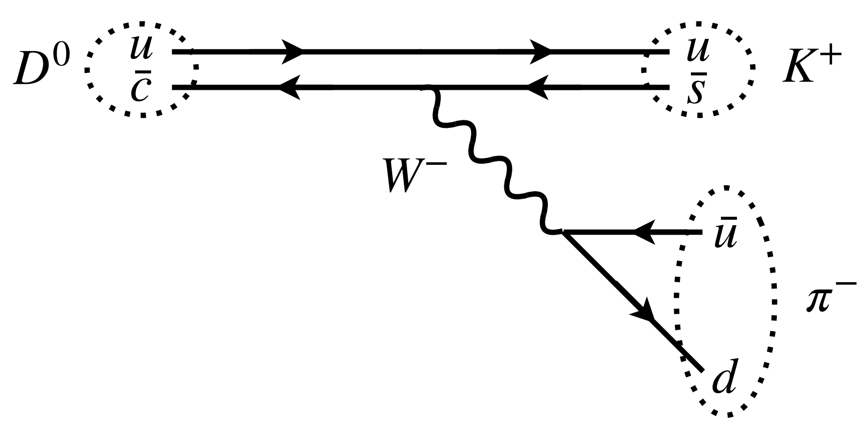
$$\Xi^- = dss \to d + uW^- + uW^- \to d + ud\bar{u} + ud\bar{u} \to udd + d\bar{u} + u\bar{u} \to n + \pi^-$$

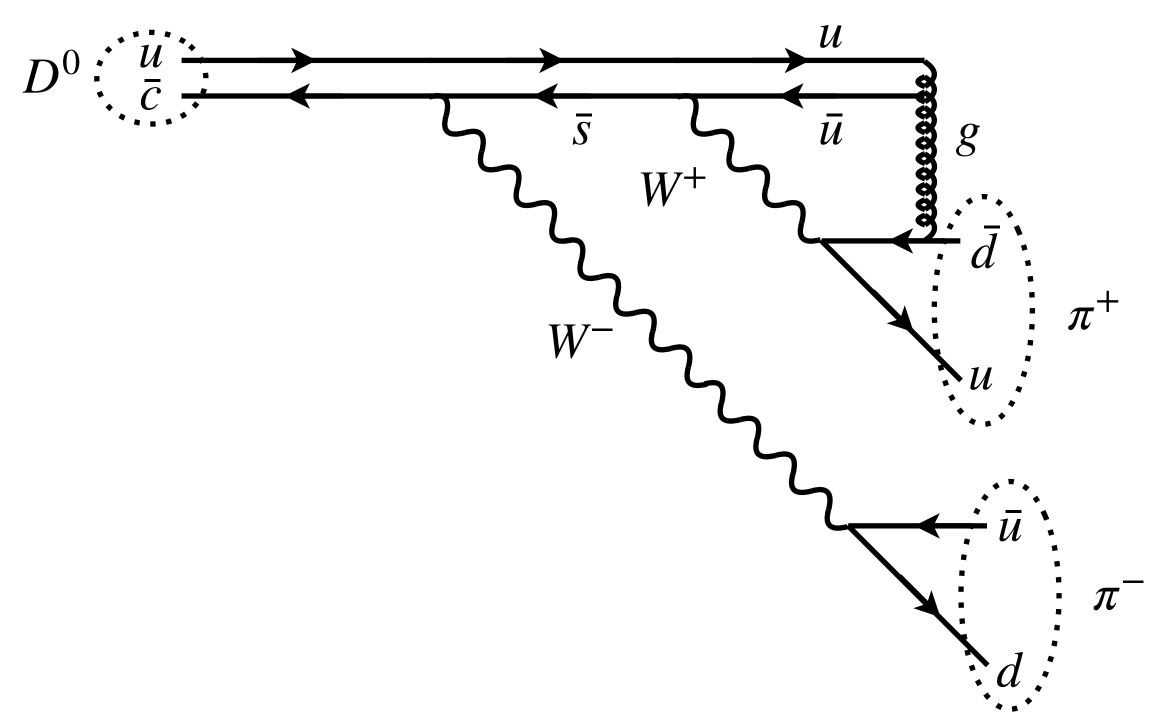
όπου το ζεύγος κουάρκ-αντικουάρκ $u\bar{u}$ ερμηνεύεται είτε ως εικονικό π^0 που απορροφάται από το νετρόνιο είτε ότι εξαϋλώνεται σε γλουόνιο που απορροφάται από τα κουάρκ της τελικής κατάστασης. Επομένως, αυτή η διάσπαση είναι λιγότερο πιθανή από την προηγούμενη.

(b) Οι τρεις τρόποι διάσπασης του μεσονίου D^0 αναλύονται σε γεύσεις κουάρκ ως εξής:

$$
\begin{aligned}
D^0 &= u\bar{c} \to u + \bar{s}W^- \to u\bar{s} + d\bar{u} = K^+ + \pi^- \\
D^0 &= u\bar{c} \to u + \bar{s}W^- \to u + \bar{u}W^+ + d\bar{u} \to u\bar{u} + \bar{d}u + d\bar{u} \to \pi^+ + \pi^- \\
\bar{D}^0 &= \bar{u}c \to \bar{u} + sW^+ \to \bar{u}s + \bar{d}u = K^- + \pi^+
\end{aligned}
$$

όπου στο δεύτερο τρόπο το ζεύγος κουάρκ-αντικουάρκ $u\bar{u}$ ερμηνεύεται και πάλι ότι εξαϋλώνεται σε γλουόνιο που απορροφάται από τα κουάρκ της τελικής κατάστασης, ενώ ο τρίτος τρόπος είναι ο συζυγής του πρώτου (άρα έχουν την ίδια πιθανότητα). Ο πρώτος και ο τρίτος τρόπος περιλαμβάνουν μόνο μία αλλαγή γεύσης, τη μετάπτωση ενός γοητευτικού (αντι)κουάρκ σε παράδοξο, ενώ ο δεύτερος τρόπος περιλαμβάνει δύο αλλαγές γεύσης: τη μετάπτωση του γοητευτικού αντικουάρκ σε παράδοξο και στη συνέχεια του παράδοξου αντικουάρκ σε επάνω αντικουάρκ πρώτης γενιάς. Άρα, ο πρώτος και ο τρίτος τρόπος διάσπασης είναι πιθανότεροι από το δεύτερο.



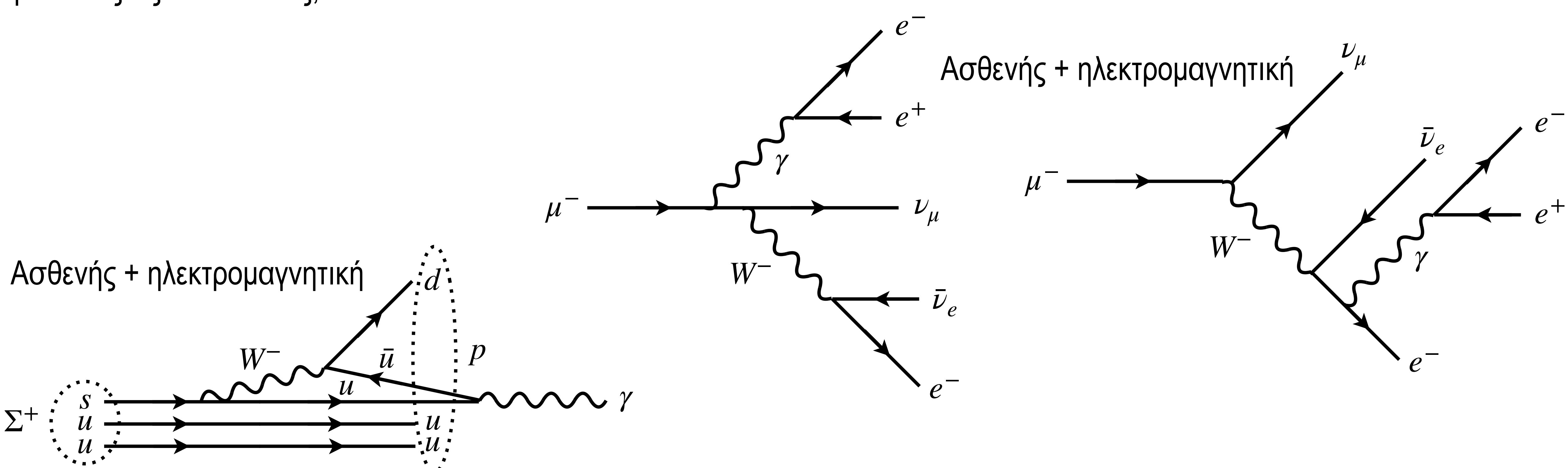


(c) Οι τρεις τρόποι διάσπασης του μεσονίου B^0 μπορούν να αναλυθούν σε γεύσεις κουάρκ ως εξής:

$$B^0 = d\bar{b} \to d + \bar{c}W^+ \to d + \bar{c} + u\bar{d} \to u\bar{c} + d\bar{d} = D^0 + \pi^0$$
$$B^0 = d\bar{b} \to d + \bar{c}W^+ \to d + \bar{s}W^- + u\bar{d} \to d\bar{s} + \bar{u}d + u\bar{d} = K^0 + \pi^- + \pi^+$$
$$B^0 = d\bar{b} \to d + \bar{c}W^+ \to d + \bar{s}W^- + u\bar{d} \to d + \bar{u}W^+ + \bar{u}d + u\bar{d} \to \bar{u}d + u\bar{d} + \bar{u}d + u\bar{d} = \pi^- + \pi^+ + \pi^- + \pi^+$$

Επομένως, και τρεις τρόποι είναι καταρχήν δυνατοί, αλλά ο πρώτος περιλαμβάνει μόνο μία αλλαγή γενιάς ($\bar{b} \to \bar{c}$), ο δεύτερος δύο αλλαγές ($\bar{b} \to \bar{c},\ \bar{c} \to \bar{s}$) και τρίτος τρεις ($\bar{b} \to \bar{c},\ \bar{c} \to \bar{s},\ \bar{s} \to \bar{u}$). Άρα, ο πρώτος τρόπος είναι πιθανότερος από το δεύτερο και αυτός πιθανότερος από τον τρίτο.

2.4 Κάποιες αντιδράσεις περιλαμβάνουν περισσότερες από μία αλληλεπιδράσεις. Σχεδιάστε τα διαγράμματα Feynman χαμηλότερης τάξης για τις αντιδράσεις $\mu^- \to e^- + e^- + e^+ + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ και $\Sigma^+(uus) \to p + \gamma$. Ποιες αλληλεπιδράσεις είναι υπεύθυνες για αυτές τις διασπάσεις;



2.5 Επαναλαμβάνοντας τα βήματα κατασκευής του αναλλοίωτου πλάτους σκέδασης $a + b \to c + d$ από την επαλληλία των χρονικά διατεταγμένων διαγραμμάτων ανταλλαγής (1) και (2) του σχήματος, δείξτε ότι και η επαλληλία των χρονικά διατεταγμένων διαγραμμάτων εξαΰλωσης-σχηματισμού (3) και (4) οδηγεί στην ίδια μορφή του διαδότη του σωματιδίου X.