

ΥΠΟΛΕΙΠΟΜΕΝΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ

- Αναφέρεται στη συνιστώσα των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των νουκλεονίων, η οποία δεν μπορεί να περιγραφεί από κεντρικό δυναμικό (όπως επιβάλλει το πρότυπο των φλοιών που εξετάσαμε)
- **Residual interaction**
- Στο πρότυπο των φλοιών η υπολειπόμενο αλληλεπίδραση μπορεί να θεωρηθεί ως διαταραχή

<http://mertimekis.gr> • @tmertzi

ΥΠΟΛΕΙΠΟΜΕΝΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ

$$\Delta E = \int \Psi^* H_{res} \Psi d^3r$$

Μεταβολή λόγω της υπολειπόμενης αλληλεπίδρασης για δύο σωματίδια σε κλειστό φλοιό

$$H_{res} = \sum_{i=3}^A \sum_{j=3}^A V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) - \sum_{i=3}^A U(r_{ij}) + \sum_{i=3}^A V_{1,i} - U(r_1) + \sum_{i=3}^A V_{2,i} - U(r_2) + V_{1,2}$$

κλειστός φλοιός

αγνοείται αν ισχύει η πρώτη προσέγγιση του προτύπου των φλοιών

Επομένως

$$H_{res} = V_{1,2}$$

<http://mertimekis.gr> • @tmertzi

ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ NN

- ▶ Για νουκλεόνια σθένους, η πρώτη προσέγγιση για την υπολειπόμενο αλληλεπίδραση είναι η αμοιβαία αλληλεπίδραση **NN**
- ▶ Η αρχή Pauli παίζει καθοριστικό ρόλο στην τελική διαμόρφωση δέσμιων νουκλεονίων
- ▶ Η προσέγγιση της αλληλεπίδρασης μπορεί να είναι είτε **μικροσκοπικής** φύσεως (εξαιρετικά πολύπλοκη μαθηματικά), είτε **φαινομενολογική**

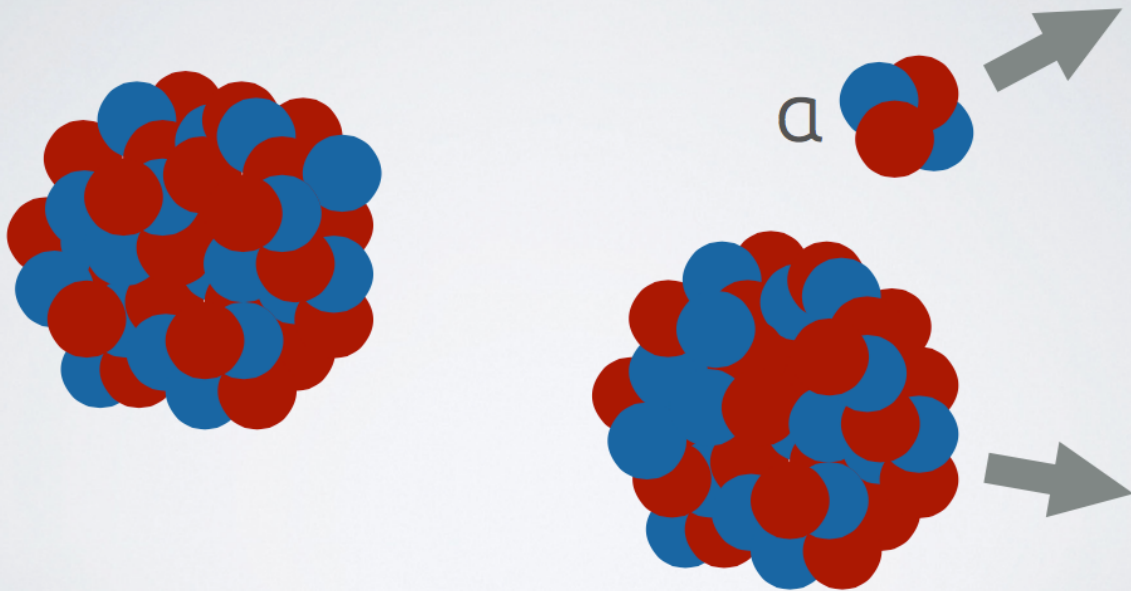
ΔΥΝΑΜΙΚΟ SDI

- ▶ **SDI → Surface Delta Interaction**

$$V_{1,2} = A \cdot \delta(r_1 - r_2) \cdot \delta(|r_1| - R_0)$$

- ▶ Είναι μια καλή επιλογή αλληλεπίδραση γιατί
 - ▶ διαθέτει μικρή εμβέλεια
 - ▶ δρα μόνο κοντά στην επιφάνεια
 - ▶ δεν παραβιάζει την αρχή Pauli στο εσωτερικό του πυρήνα
 - ▶ πραγματοποιείται καλή ανάμειξη των διαμορφώσεων των νουκλεονίων σθένους

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ



ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

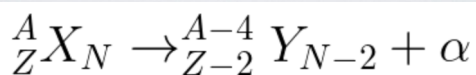
- ▶ Η διάσπαση άλφα παρατηρήθηκε από το Rutherford
- ▶ Τα σωμάτια α είναι πυρήνες ηλίου ($Z=2$, $N=2$, $A=4$)
- ▶ Οι βαρείς πυρήνες αποδιεγείρονται σχεδόν αποκλειστικά μέσω διάσπασης α (γιατί;)

COULOMB

- Η εκπομπή των σωματιδίων α επηρεάζεται σημαντικά από την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση
- Γιατί προτιμάται το σωματίο α και όχι κάποιο άλλο συσσωμάτωμα, πχ. ^{12}C ;
- Το σωματίο α έχει μεγάλη ενέργεια σύνδεσης, $B(4,2) = 28.3 \text{ MeV}$
- Η Κ.Ε. γίνεται μέγιστη με την εκπομπή ενός σωματίου α

<http://mertimekis.gr> • @tmertzi

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΛΟΓΙΑ



αρχικά
τελικά

$m_x c^2$

$T_Y + m_Y c^2$

$T_\alpha + m_\alpha c^2$

$$m_x c^2 = T_Y + m_Y c^2 + T_\alpha + m_\alpha c^2$$

$$m_x c^2 - m_Y c^2 - m_\alpha c^2 = T_Y + T_\alpha$$

$$Q = T_Y + T_\alpha$$

$$Q = (m_x - m_Y - m_\alpha) c^2$$

Q-value της διάσπασης α

Αν $Q > 0$ τότε υπάρχει αυθόρμητη εκπομπή α

<http://mertimekis.gr> • @tmertzi

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

$$Q = T_Y + T_\alpha$$

Αν ο αρχικός πυρήνας είναι ακίνητος τότε ανυσματικά:

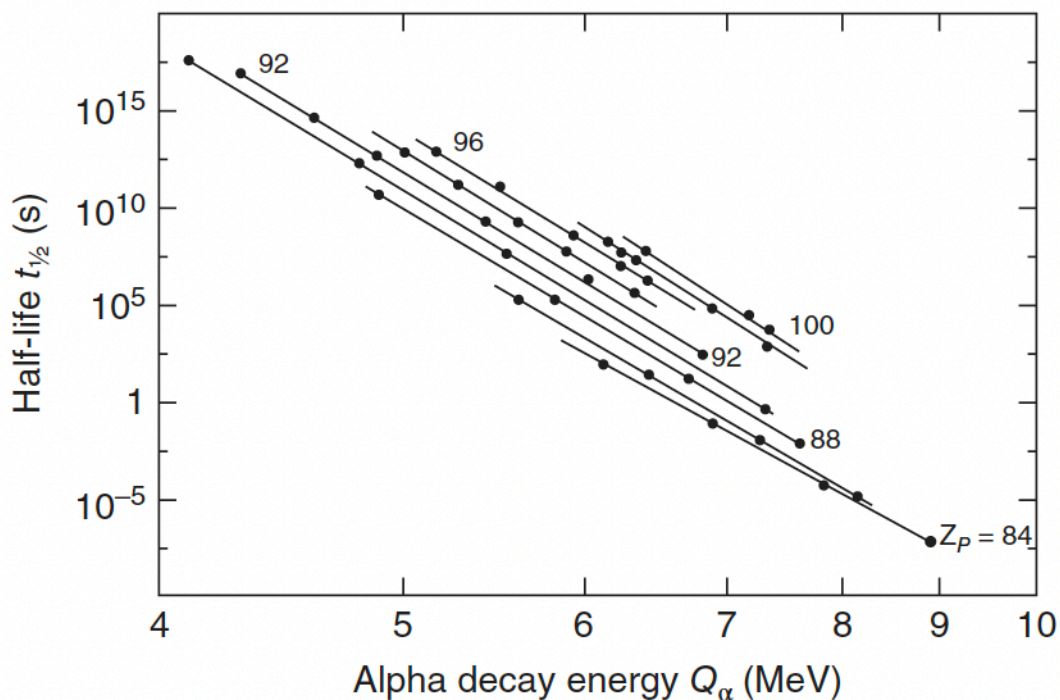
$$\vec{p}_x = 0 \Rightarrow \vec{p}_Y + \vec{p}_\alpha = 0 \Rightarrow \vec{p}_Y = -\vec{p}_\alpha$$

- τυπικές ενέργειες εκπομπής σωματίων α ~ 5 MeV
- επειδή $T_\alpha \ll m_\alpha c^2$, δεν υπάρχει σχετικιστική κίνηση

Αποδεικνύεται ότι:

$$T_\alpha \approx Q \left(1 - \frac{4}{A} \right)$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ



NΟΜΟΣ GEIGER-NUTTALL

$$\log_{10}(\lambda) = A + B \log_{10}(R_\alpha)$$

Η εμβέλεια R_α του σωματίου α σχετίζεται με το χρόνο ημιζωής του ισότοπου που το εκπέμπει (σταθερά λ)

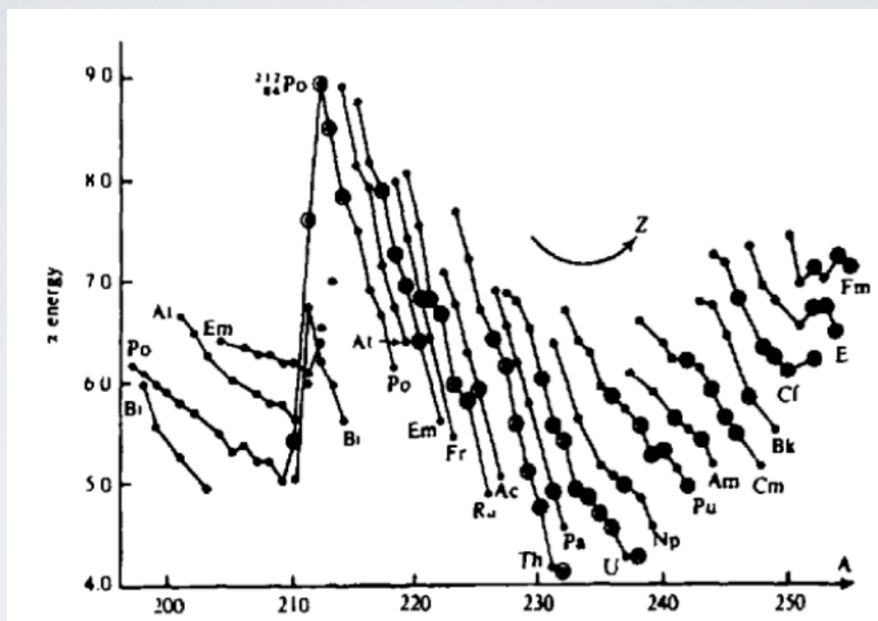
Αντίστοιχα, σχετίζεται και με την ενέργεια του σωματίου α

Ο εμπειρικός νόμος των Geiger-Nuttall εκφράζει τη σχέση $Q_\alpha \sim t_{1/2}$

Το εύρος τιμών των χρόνων ημιζωής είναι **τεράστιο**:

$$E \rightarrow 2E \rightarrow t_{1/2} \rightarrow t_{1/2} \times 10^{24}$$

ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΔΟΜΗΣ



Q-VALUE & ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΣΥΝΔΕΣΗΣ

$$Q = B(\alpha) + B({}_{Z-2}^{A-4}\text{X}_{N-2}) - B({}_Z^A\text{X}_N)$$

$$Q = B(4, 2) + B(A - 4, Z - 2) - B(A, Z)$$

$$Q = 28.3 - 4a_V + \frac{8}{3}a_SA^{-1/3} + 4a_CZA^{-1/3} \left(1 - \frac{Z}{3A}\right) - 4a_{\text{sym}} \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 + 3a_PA^{-7/4}$$

βλ. K. Krane

$${}^{226}\text{Th} \rightarrow Q = 6.75 \text{ MeV}$$

$$Q_{\text{exp}} = 6.45 \text{ MeV}$$

$${}^{232}\text{Th} \rightarrow Q = 5.71 \text{ MeV}$$

$$Q_{\text{exp}} = 4.08 \text{ MeV}$$

$${}^{220}\text{Th} \rightarrow Q = 7.77 \text{ MeV}$$

$$Q_{\text{exp}} = 8.95 \text{ MeV}$$

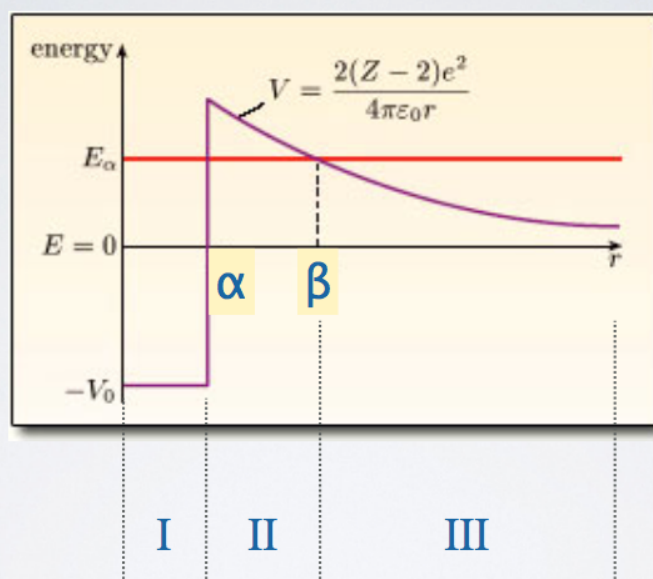
<http://mertimekis.gr> • @tmertzi

ΘΕΩΡΙΑ ΕΚΠΟΜΠΗΣ

- ▶ Αναπτύχθηκε σχεδόν ταυτόχρονα, αλλά ανεξάρτητα από το Gamow και τους Gurney & Condon
- ▶ Μονοδιάστατη προσέγγιση
- ▶ Θεωρεί αυτόνομο σωματίο μέσα σε πηγάδι δυναμικού (χωρίς να υπάρχει φυσική αναγκαιότητα!)
- ▶ Η εκπομπή του σωματίου α είναι το κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας

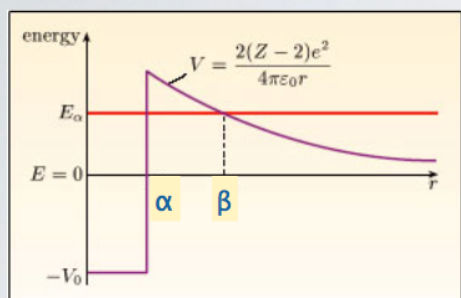
<http://mertimekis.gr> • @tmertzi

ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ



<http://mertzimekis.gr> • @tmertzi

ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ



περιοχή I: $Q + V_0 = T_\alpha$

περιοχή II: απαγορευμένη περιοχή

περιοχή III: επιτρεπτή περιοχή
ελεύθερο σωματίο

Η εκπομπή διέπεται από κβαντομηχανικούς κανόνες που επιτρέπουν με κάποια πιθανότητα τη διέλευση εντός απαγορευμένων περιοχών

Ο φραγμός Coulomb (ή πυρηνικός φραγμός καλύτερα) είναι αυτός που εμποδίζει την εκπομπή

<http://mertzimekis.gr> • @tmertzi

ΕΠΙΛΥΣΗ SCHROEDINGER

$$\lambda = f \cdot P$$

λ : σταθερά διάσπασης

f : συχνότητα εμφάνισης στο φραγμό

P : κβαντική πιθανότητα διέλευσης

$$f = \text{ταχύτητα/εύρος} = \mathbf{v/a}$$

$$V_0 \approx 35 \text{ MeV}$$

Υπολογίζεται ότι $f \approx 6 \cdot 10^{21}$ όταν $Q = 5 \text{ MeV}$

ΕΠΙΛΥΣΗ SCHRÖDINGER

$$\lambda = f P$$

λ : σταθερά διάσπασης

f : συχνότητα εμφάνισης στο φραγμό δυναμικού

P : πιθανότητα διέλευσης μέσω του φραγμού

$$f = \text{ταχύτητα} / \text{εύρος} = \mathbf{v/a}$$

$$V_0 \approx 35 \text{ MeV}$$

Υπολογίζεται ότι $\mathbf{f = 6 \cdot 10^{21}}$

ΕΠΙΛΥΣΗ SCHROEDINGER

Μέσο ύψος φραγμού: $(1/2)\{B(A,Z) - Q\}$

Μέσο εύρος φραγμού: $(1/2)(\beta - \alpha)$

$P = e^{-2G}$ όπου

G ο παράγοντας Gamow

$$G = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_{\alpha}^{\beta} (V(r) - Q)^{1/2} dr$$

$$G = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\arccos \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)} \right)$$

$$\text{με } x = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{Q}{B} \text{ \& } x \ll 1$$

<http://mertzimakis.gr> • @tmertzi

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ GAMOW

Με ασυμπτωτική θεώρηση (και αρκετές πράξεις)
ο παράγοντας Gamow μπορεί να γραφεί απλά ως:

$$G = 3.97 \cdot ZE_{\alpha}^{-1/2} - 1.73Z^{-2/3}$$

Και οδηγεί στη σχέση για τη σταθερά διάσπασης:

$$\log \lambda = 21 - G \log(e) = 21 - 1.72 \cdot ZE_{\alpha}^{-1/2} + 0.75Z^{2/3}$$

<http://mertzimakis.gr> • @tmertzi

ΧΡΟΝΟΣ ΗΜΙΖΩΗΣ

Με τελική αντικατάσταση προκύπτει ότι:

$$t_{1/2} = \ln 2 \left(\frac{a}{c} \right) \sqrt{\frac{mc^2}{2(V_o + Q)}} \exp \left(2 \sqrt{\frac{2mc^2}{(\hbar c)^2 Q}} \left(\frac{zZ'e^2}{4\pi\epsilon_o} \right) \left(\frac{\pi}{2} - 2 \sqrt{\frac{Q}{B}} \right) \right)$$

βλ. N.A. Jelley

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ & ΟΜΟΤΙΜΙΑ

$$|I_i\rangle \longrightarrow |I_f\rangle$$
$$|I_i - I_f| \leq \Delta I \leq I_i + I_f$$

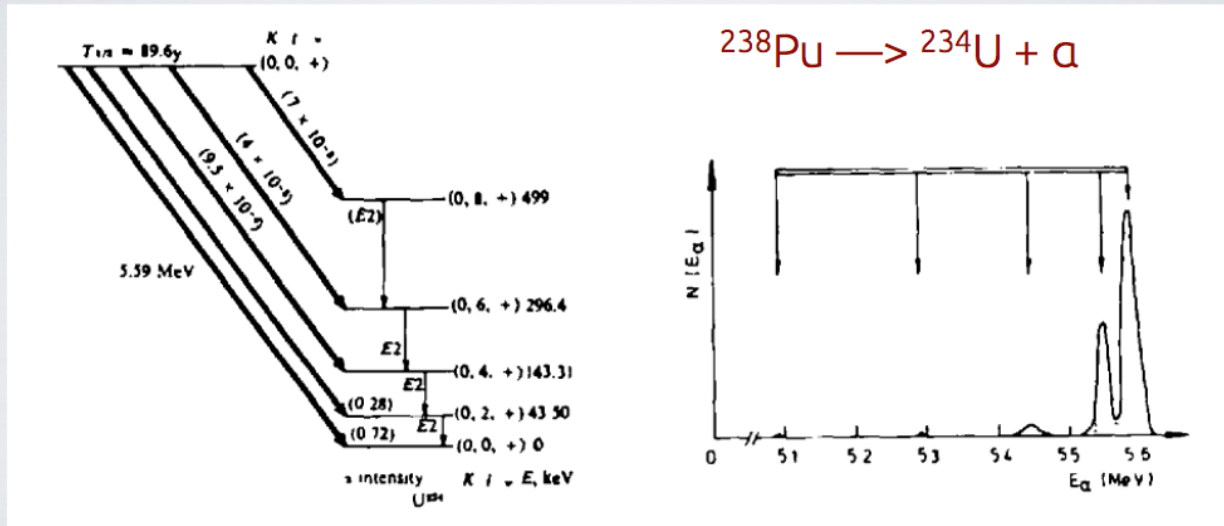
$$\begin{aligned} \text{Όμως } J_a &= 0^+ \\ \text{Επομένως } \Psi_a &\sim Y_{lm} \\ \text{και } P &= (-1)^l \end{aligned}$$

Κανόνες επιλογής:

Ίδια ομοτιμία = l_a άρτια
Διαφορετική ομοτιμία = l_a περιττή

ΤΕΛΙΚΕΣ ΣΤΑΘΜΕΣ

Στην αποδιέγερση α, μπορούν να τροφοδοτηθούν περισσότερες από μια τελικές στάθμες στο θυγατρικό πυρήνα



γραμμικό φάσμα

<http://mertzimakis.gr> • @tmertzi

ΤΕΛΙΚΕΣ ΣΤΑΘΜΕΣ

Η αποδιέγερση σε στάθμες με υψηλότερη στροφορή, το σωματίο α πρέπει να διασχίσει σύνθετο φραγμό
(Coulomb + φυγοκεντρικό)

$$V^{\text{eff}}(r) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

Η σχετική αύξηση του φραγμού σε σχέση με το Coulomb, σ

$$\sigma = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mR^2} \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 R}{2Z_D e^2} = \frac{\pi\epsilon_0 \hbar \ell(\ell+1)}{m R Z_D e^2}$$

Z_D : φορτίο θυγατρικού

$$\sigma \simeq 0.002 \ell(\ell+1)$$

<http://mertzimakis.gr> • @tmertzi

ΤΕΛΙΚΕΣ ΣΤΑΘΜΕΣ

$$\lambda_\alpha \cong \frac{z Z_D e^2}{2\epsilon_0 \hbar v} - \frac{1}{\hbar} \left(\frac{8z Z_D e^2 m R}{\pi \epsilon_0} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{\sigma}{2} \right)$$

Για

$$Z_D = 86$$

$$R = 9.87 \text{ fm}$$

$$Q_\alpha = 4.88 \text{ MeV}$$

ℓ	$\frac{\lambda_\alpha(\ell)}{\lambda_\alpha(\ell=0)}$
0	1
1	0.7
2	0.37
3	0.137
4	0.037
5	7.1×10^{-3}
6	1.1×10^{-3}

ΤΕΛΙΚΑ, ΓΙΑΤΙ ΑΛΦΑ ΚΑΙ ΟΧΙ ΑΛΛΟ;

Για οποιοδήποτε σύστημα με φορτίο Z_1 , ο συντελεστής διέλευσης εξαρτάται από τον εκθέτη γ_{12}

$$\gamma_{12} \propto \sqrt{\frac{m_1}{E}} Z_1 (Z - Z_1)$$

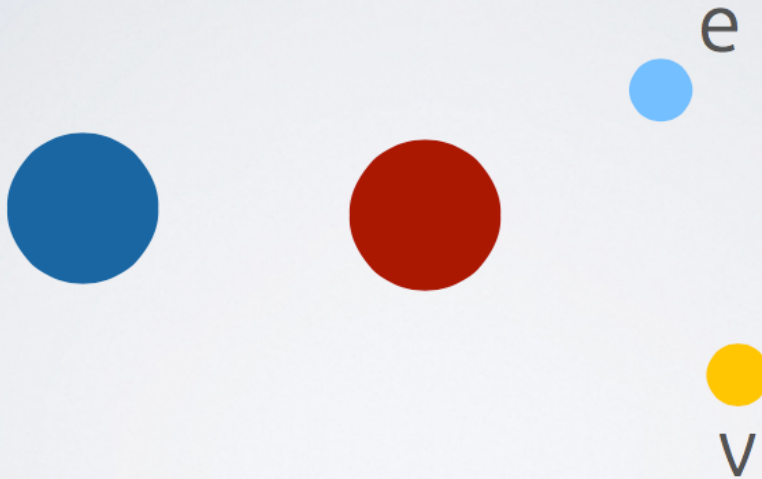
Αργή συνάρτηση ως προς τη μάζα
Όσο πιο ελαφρύς, τόσο πιο πιθανός

p,n: Δεν έχουν ενέργεια σύνδεσης B

d: η ενέργεια σύνδεσης είναι ανάμεσα σε p-n και οδηγεί σε αρνητική εκπομπή ενέργειας → άτομο

^{12}C : μπορεί να εκπνευστεί αλλά με ΠΟΛΥ ΜΙΚΡΟΤΕΡΗ πιθανότητα

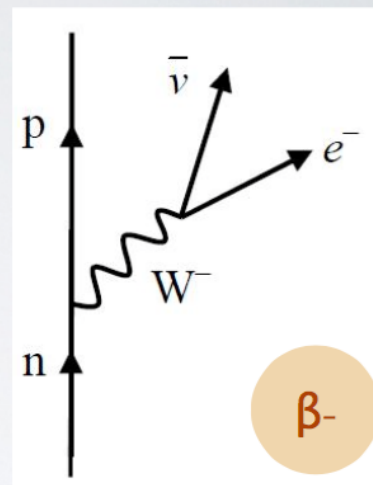
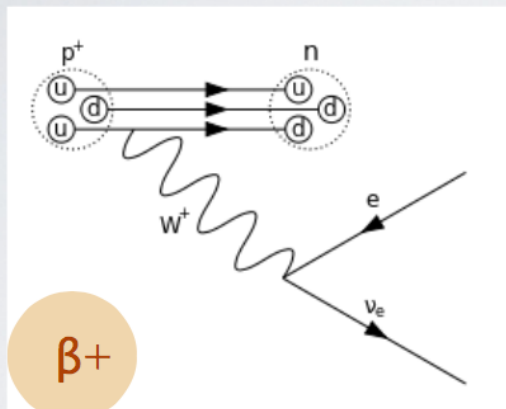
Η ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΒΗΤΑ



ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

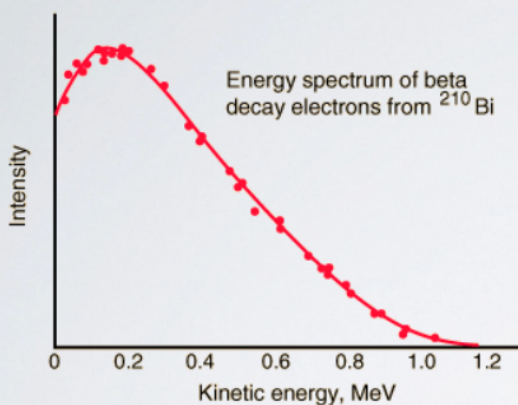
- ▶ Παρατηρήθηκε από τη χαραυγή της Πυρηνικής Φυσικής
- ▶ Σωματία β $\longleftrightarrow$ ηλεκτρόνια ή ποζιτρόνιο
- ▶ Η ασθενής πυρηνική αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη για τη διάσπαση β
- ▶ Η διάσπαση β είναι βασικό εργαλείο για την παρατήρηση του (αποκλειστικά) ασθενώς αλληλεπιδρώντος νετρίνο
- ▶ Έχει πολλές εφαρμογές πχ. τομογραφία PET, βηταβολταϊκά στοιχεία, βραχυθεραπεία κ.ά.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ FEYNMAN



<http://mertzimekis.gr> • @tmertzi

Η ΑΠΟΔΙΕΓΕΡΣΗ



αποδιέγερση β^-

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

αποδιέγερση β^+

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$$

σύλληψη ατομικού ηλεκτρονίου (EC)

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e$$

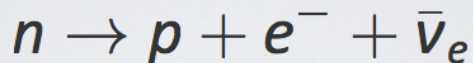
<http://mertzimekis.gr> • @tmertzi

ΠΡΩΙΜΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- ▶ Η φασματοσκοπία των σωματίων β που εκπέμπονται από τα ασταθή ισότοπα δεν μπορεί να περιγραφεί από μια θεωρία ανάλογη της εκπομπής των σωματίων α (δυναμικό)
- ▶ Το φάσμα της διάσπασης β δεν είναι γραμμικό (αυστηρά καθορισμένη ενέργεια), αλλά **συνεχές**
- ▶ Πρώιμη εξήγηση: τα ηλεκτρόνια εκπέμπονται και αλληλεπιδρούν με το ατομικό περιβάλλον. Πειράματα ολικής θερμιδομετρίας έδειξαν ασυμφωνία με την υπόθεση αυτή
- ▶ **PAULI**: ταυτόχρονη εκπομπή ενός ακόμη σωματιδίου (νετρίνο)

<http://mertzimakis.gr> • @tmertzi

Q-VALUE



αρχικά
τελικά

m_n

m_p

m_e

m_ν

$$Q = (m_n - m_p - m_e - m_\nu)c^2$$

Q-value της αποδιέγερσης β
Αν **$Q > 0$** τότε υπάρχει αυθόρμητη εκπομπή

<http://mertzimakis.gr> • @tmertzi

ΜΑΖΑ ΝΕΤΡΙΝΟΥ

$$Q_{\beta^-} = 939.565 - 938.271 - 0.511 - m_\nu c^2$$

$$Q_{\beta^-} = 0.783 - m_\nu c^2$$

$$Q_{\beta^-}(\text{exp}) = 0.782347 \pm 0.000001 \text{ MeV}$$

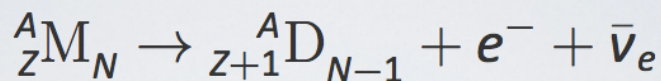
Σημερινό όριο μάζας νετρίνου

$$m_\nu < 2.2 \text{ eV}$$

Πρακτική για την αποδιέγερση β

$$m_\nu = 0 \Rightarrow u_\nu = c$$

B-



$$Q_{\beta^-} = [m_N(A, Z) - m_N(A, Z+1) - m_e] c^2$$

$m_N(A, Z)$ μάζα πυρήνα

$$m(A, Z) = [m_N(A, Z) + Z m_e] c^2 - \sum_i B_i$$

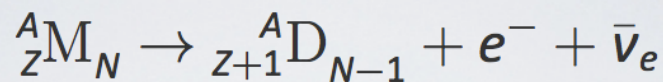
$m(A, Z)$ μάζα ατόμου
 B_i ενέργεια σύνδεσης
ηλεκτρονίων

$$Q_{\beta^-} = [m(A, Z) - Z m_e] c^2 - [m(A, Z+1) - (Z+1) m_e - m_e] c^2 + [\sum^Z B_i - \sum^{Z+1} B_i]$$

Τελικά

$$Q_{\beta^-} = [m(M) - m(D)] c^2$$

Q-VALUE B-

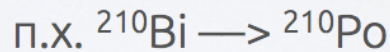


Υποθέτοντας ότι η ενέργεια ανάκρουσης του p
μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα

$$Q_{\beta^-} = T_e + E_\nu$$

Στις ακραίες περιπτώσεις

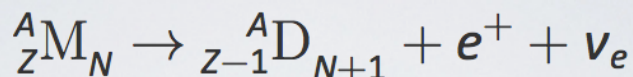
$$Q_{\beta^-} = (T_e)_{\max} = (E_\nu)_{\max}$$



$$Q_{\beta^-} = 209.984120\text{u} - 209.982874\text{u} = 0.001246\text{u}$$

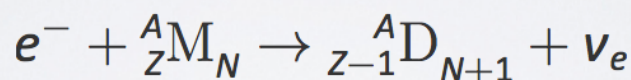
$$Q_{\beta^-} = 1.161 \text{ MeV}$$

EC, B+



$$Q_{\beta^+} = [m(A, Z) - Zm_e] c^2 - [m(A, Z-1) - (Z-1)m_e] c^2 - m_e c^2$$

Τελικά $Q_{\beta^+} = [m(M) - m(D) - 2m_e] c^2$



Ομοίως $Q_{EC} = [m(M) - m(D)] c^2 - B_n$

Ο θυγατρικός πυρήνας βρίσκεται σε διεγερμένη στάθμη

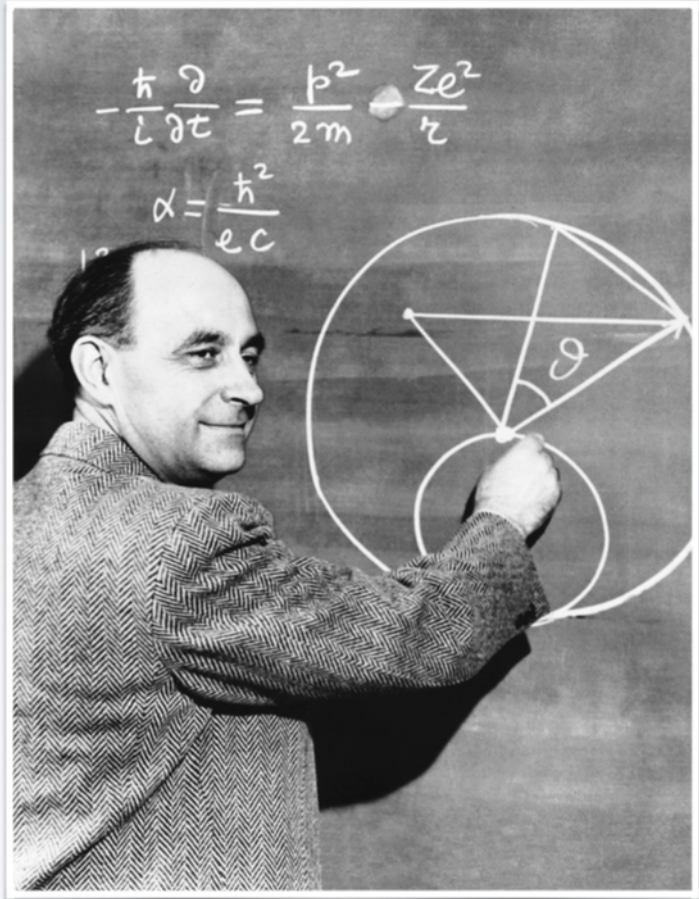
EC, β^+

- ▶ Είναι ανταγωνιστικές διεργασίες
- ▶ Η EC δεν έχει την ενεργειακή απαίτηση της β^- , δηλ. απαιτείται διαθέσιμη ενέργεια $2m_e c^2$
- ▶ Αν υπάρχει αυθόρμητη εκπομπή β^+ , τότε πάντα υπάρχει και η EC, όχι όμως το αντίθετο

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΜΕ ΑΛΦΑ

- ▶ Στη διάσπαση α υπάρχει φραγμός δυναμικού
- ▶ Το σωματίο α θεωρείται ότι είναι ήδη σχηματισμένο εντός του πυρήνα και ζει αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα ώσπου να “δραπετεύσει”
- ▶ Το σωματίο β (και το νεutrino) δημιουργείται και αμέσως μετά εκπέμπεται
- ▶ Οι ταχύτητες των β είναι σχετικιστικές
- ▶ Υπάρχει συνεχές φάσμα β , ενώ γραμμικό για τα α

Η ΘΕΩΡΙΑ FERMI



<http://mertzimakis.gr> • @tmertzi

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E_f)$$

V_{fi} : άγνωστο δυναμικό της διεργασίας που οδηγεί σε β

$\rho(E_f)$: πυκνότητα σταθμών στην τελική κατάσταση

$$V_{fi} = \langle \psi_f | V | \psi_i \rangle$$

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f}$$

Όσο περισσότερες στάθμες, τόσο πιο πιθανή η
μετάβαση στην τελική => πραγματοποίηση εκπομπής β

<http://mertzimakis.gr> • @tmertzi

ΔΥΝΑΜΙΚΟ

Για το δυναμικό, ο Fermi δε γνώριζε τίποτε. Οι δυνατοί τύποι (O_x) είναι:

V (vector)

A (axial)

S (scalar)

P (pseudoscalar)

T (tensor)

V-A επιβεβαιώθηκε
από το πείραμα

$$V_{fi} = g \int [\Psi_f^* \varphi_e^* \varphi_v^*] O_x \Psi_i^* dV$$

ισχύς
αλληλεπίδρασης

ΦΑΣΜΑ

Στο χώρο των φάσεων, η πυκνότητα καταστάσεων εξαρτάται από την κατανομή των σταθμών ανά ορμή, δηλ.

$$dV = 4\pi p^2 dp \quad dn_e = \frac{4\pi p^2 dp V}{h^3}$$

$$d^2 n = dn_e n_v = \frac{(4\pi)^2 p^2 q^2 dp dq V^2}{h^6} = \frac{(4\pi V)^2}{h^6} p^2 q^2 dp dq$$

επιτρεπόμενη
προσέγγιση

$$\varphi_e(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar} \approx \frac{1}{\sqrt{V}} \left(1 + \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r} \right)$$

$$\varphi_v(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r} / \hbar} \approx \frac{1}{\sqrt{V}} \left(1 + \frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r} \right)$$

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |M_{fi}|^2 (4\pi)^2 \frac{p^2 q^2 dp dq}{h^6 dE_f}$$

M_{fi}: Πίνακας μετάβασης που οφείλεται αποκλειστικά στο πυρηνικό δυναμικό

$$M_{fi} = \int \Psi_f^* O_\chi \Psi_i dV$$

Αγνοώντας την αμελητέα ενέργεια του πρωτονίου

$$E_f = E_e + E_v = E_e + qc \Rightarrow \frac{dE_f}{dq} = c \Rightarrow \frac{dq}{dE_f} = \frac{1}{c}$$

ΦΑΣΜΑ ΟΡΜΗΣ

$$d\lambda = N(p) dp = \left(\frac{2\pi}{\hbar} g^2 |M_{fi}|^2 \frac{(4\pi)^2}{ch^6} \right) p^2 q^2 dp = \mathbb{C} p^2 q^2 dp$$

$$Q = T_e + T_v = T_e + qc \Rightarrow q = \frac{Q - T_e}{c} = \frac{Q - \left(\sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 \right)}{c}$$

επομένως:

$$N(p) = \frac{\mathbb{C}}{c^2} (Q - T_e)^2 p^2 = \frac{\mathbb{C}}{c^2} \left(Q - \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} + m_e c^2 \right)^2$$

Για $p=0 \rightarrow N(p)=0$

Για $Q=T_e \rightarrow N(p)=0$ endpoint

ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΟ ΦΑΣΜΑ

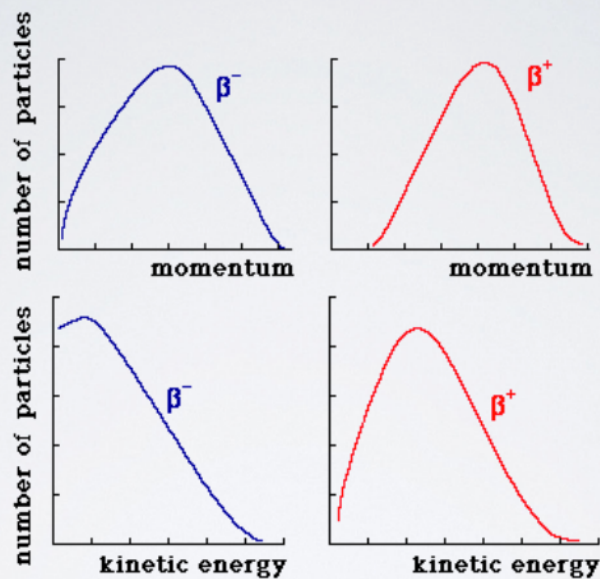
ομοίως:

$$N(T_e) = \frac{\mathbb{C}}{c^5} (T_e^2 + 2T_e m_e c^2)^{1/2} (Q - T_e)^2 (T_e + m_e c^2)$$

Για $T_e=0 \rightarrow N(T_e)=0$

Για $T_e=Q \rightarrow N(T_e)=0$ endpoint

ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΟ ΦΑΣΜΑ



Υπάρχει διαφορά ανάμεσα στις β^- , β^+ λόγω Coulomb.
Η διαφορά εκφράζεται μέσω του παράγοντα Fermi $F(Z_D, p)$

Ο ΠΙΝΑΚΑΣ M_{fi}

M_{fi} : Πίνακας μετάβασης που οφείλεται αποκλειστικά στο πυρηνικό δυναμικό. Στην επιτρεπόμενη προσέγγιση, δεν επηρεάζει το τελικό φάσμα

Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που δεν παρατηρείται φάσμα

Η λύση δίνεται με περισσότερους όρους στο ανάπτυγμα

Τότε μιλάμε για **“απαγορευμένες”** αποδιεγέρσεις

ΟΡΟΙ ΣΤΟ ΦΑΣΜΑ

► Το πλήρες φάσμα περιλαμβάνει 3+1 βασικούς όρους

1. Στατιστικός όρος $p^2(Q - T_e)^2$

2. Παράγοντας Fermi $F(Z', p)$ λόγω του ηλεκτρικού πεδίου του πυρήνα

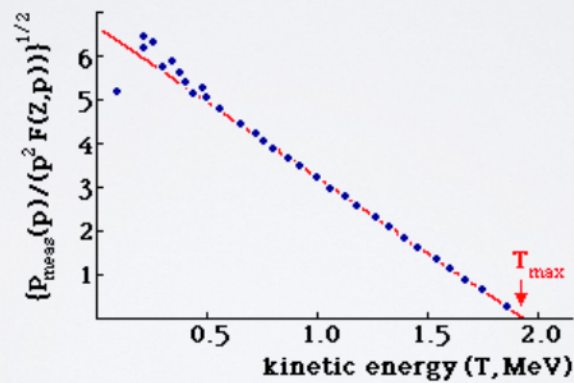
3. Πυρηνικό στοιχείο πίνακα μετάβασης που συνδέει συγκεκριμένες αρχικές και τελικές στάθμες, $|M_{fi}|^2$

4. Το στοιχείο πίνακα μπορεί να περιλαμβάνει όρους για την κατανομή της ορμής $e, \nu \rightarrow$ παράγοντας μορφής $S(p, q)$

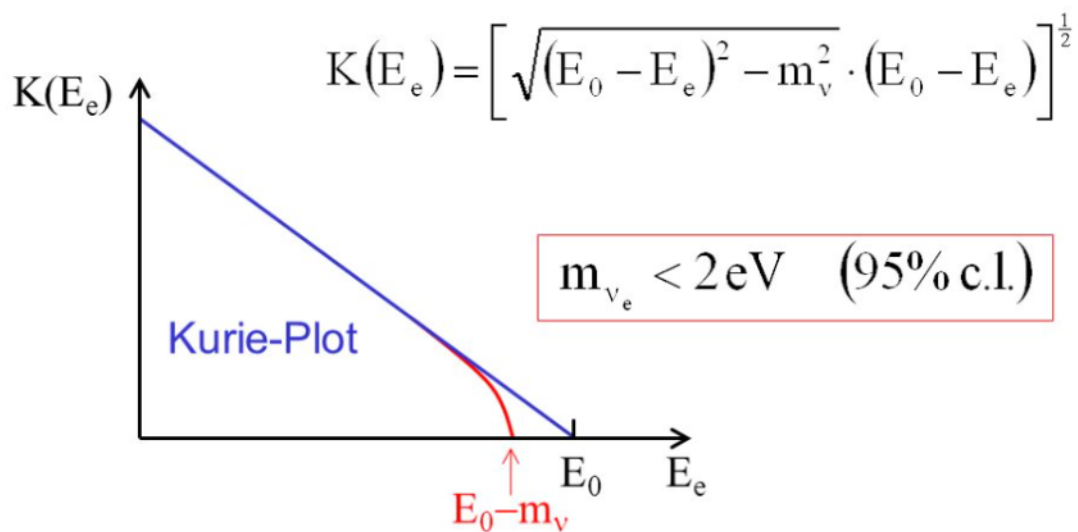
$$N(p) \sim (Q - T_e)^2 p^2 F(Z', p) |M_{fi}|^2 S(p, q)$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ KURIE

$$(Q - T_e) \sim \sqrt{\frac{N(p)}{p^2 F(Z', p)}}$$



MAZA NETPINOY



ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ ΡΥΘΜΟΣ ΔΙΑΣΠΑΣΗΣ

$$\lambda = \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_{max}} F(Z', p) p^2 (Q - T_e)^2 dp$$

Γνωρίζοντας ότι: $cp_{max} = \sqrt{E_0^2 - m_e^2 c^4}$

Το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί *αδιάστατα*:

$$f(Z, E_0) = \frac{1}{(m_e c^2)^3 (m_e c^2)^2} \int_0^{p_{max}} F(Z', p) p^2 (E_0 - E_e)^2 dp$$

Ολοκλήρωμα
Fermi

<http://mertimekis.gr> • @tmertzi

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ FERMİ

Το ολοκλήρωμα λαμβάνει τιμές από πίνακες για συγκεκριμένα ζεύγη (Z', E_0)

Με αντικατάσταση, ο συνολικός ρυθμός διάσπασης:

$$\lambda = \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} f(Z', E_0)$$

$$\frac{1}{t_{1/2}} = 0.693 \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} f(Z', E_0)$$

τιμή ft

$$ft_{1/2} \propto \frac{1}{g^2 |M_{fi}|^2}$$

<http://mertimekis.gr> • @tmertzi

TIMH FT

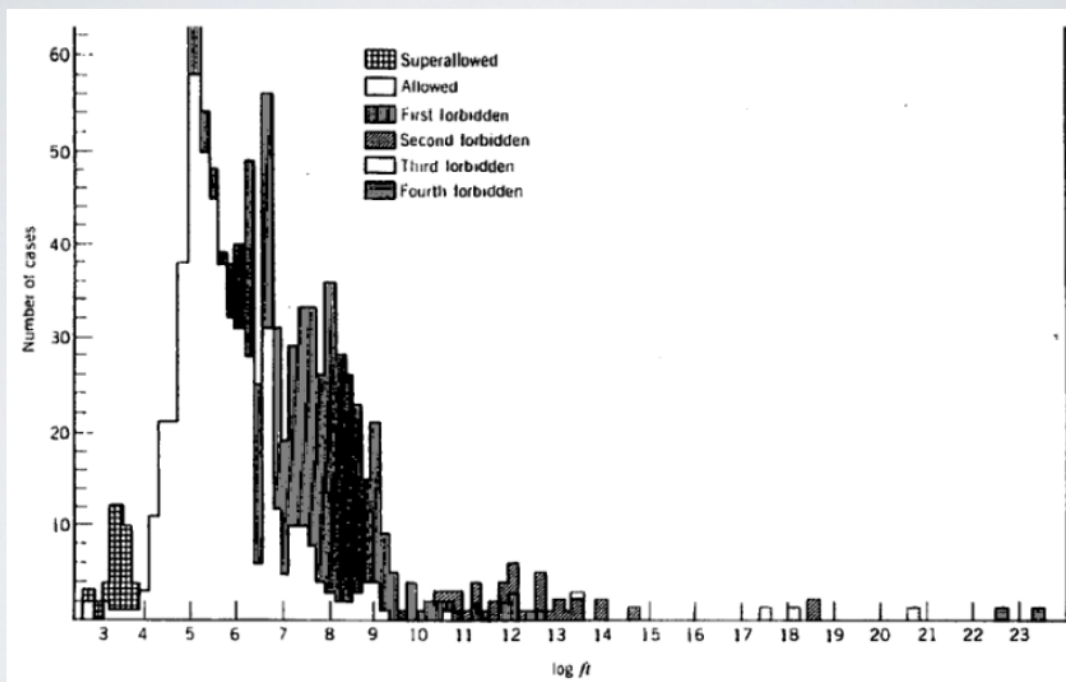
Οποιοδήποτε διαφορές παρατηρούνται στην τιμή ft αποδίδονται αποκλειστικά στις διαφορές του πυρηνικού στοιχείου πίνακα

Το εύρος τιμών των χρόνων ημιζωής είναι $\Delta t \sim (10^{-3} - 10^{20})$ sec

Για το λόγο αυτό συνήθως χρησιμοποιείται ο δεκαδικός λογάριθμος: **$\log_{10} ft$**

$\log_{10} ft = 3-4$ διαθέτουν οι “υπερ-επιτρεπτές” αποδιεγέρσεις (πχ. $0^+ \rightarrow 0^+$)

LOG₁₀FT



ΙΣΧΥΣ ΑΣΘΕΝΟΥΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ

Για $0^+ \rightarrow 0^+$ $g=0.88 \cdot 10^{-4} \text{ MeV fm}^3$

Με αδιαστατοποίηση $G = g \frac{m_N^2 c}{\hbar^3}$

Η τιμή της σταθεράς $G = 10^{-5}$ αν τεθεί η ισχύς της ισχυρής πυρηνικής αλληλεπίδρασης $g_{\text{strong}}=1$

Ισχυρή	H/M	Ασθενής	Βαρυτική
1	10^{-2}	10^{-5}	10^{-34}

FERMI / GAMOW-TELLER

e, ν είναι φερμιόνια
 $S_e=S_\nu=1/2$

Αν $S_{\text{ολ}}=0$ τότε έχουμε αποδιέγερση
τύπου **Fermi**

Αν $S_{\text{ολ}}=1$ τότε έχουμε αποδιέγερση
τύπου **Gamow-Teller**

$$I_i = I_f = 0$$



$$I_i = I_f + 1$$

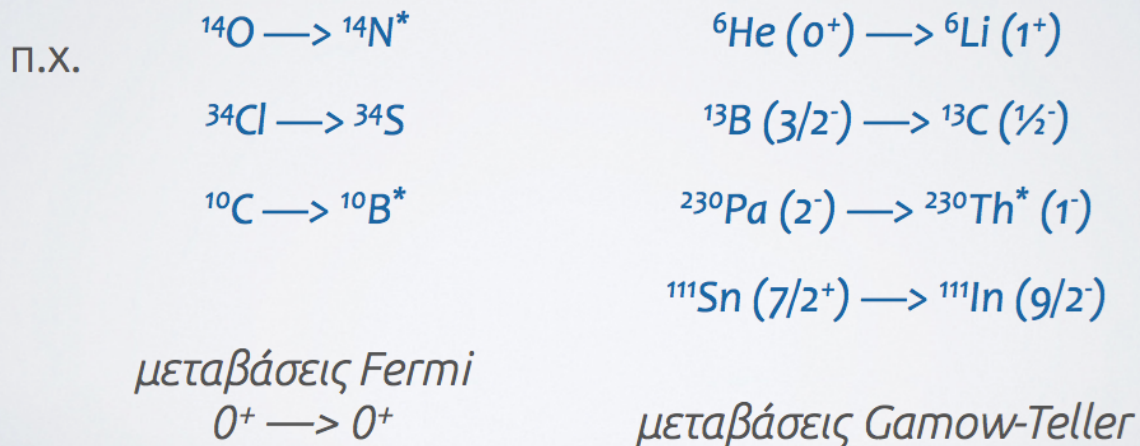
Επομένως $\Delta I = 0$ ή $\Delta I = 1$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Για επιτρεπτές αποδιεγέρσεις

$$\Delta I = 0 \text{ ή } \Delta I = 1$$

χωρίς αλλαγή ομοτιμίας



<http://mertzimakis.gr> • @tmertzi

ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΝΕΤΡΟΝΙΟΥ

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$1/2^+ \longrightarrow 1/2^+$$

Υπάρχουν αποδιεγέρσεις που είναι ανάμεικτες
Ορίζεται ο παράγοντας ανάμειξης F-GT, y :

$$y = \frac{g_F M_F}{g_{GT} M_{GT}} \quad \text{Για } 0^+ \longrightarrow 0^+ \quad g_F = g$$

για τη διάσπαση του νετρονίου, $|M_{Fi}| = 1$ και άρα:

$$\lambda \sim g_F^2 M_F^2 \left(1 + \frac{1}{y^2} \right) \Rightarrow y_{exp} = 0.476(3)$$

82% GT, 18% F

<http://mertzimakis.gr> • @tmertzi

ΚΑΝΟΝΕΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Για (πρώτες) απαγορευμένες αποδιεγέρσεις

$$\Delta I = 0 \text{ ή } \Delta I = 1 \text{ ή } \Delta I = 2$$

με αλλαγή ομοτιμίας

π.χ.



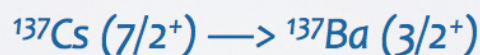
ΚΑΝΟΝΕΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Για (δεύτερες) απαγορευμένες αποδιεγέρσεις

$$\Delta I = 2 \text{ ή } \Delta I = 3$$

χωρίς αλλαγή ομοτιμίας

π.χ.

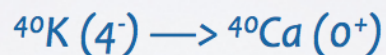
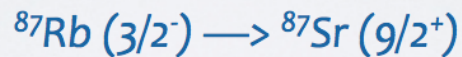


ΚΑΝΟΝΕΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Για (τρίτες) απαγορευμένες αποδιεγέρσεις

$\Delta I = 3$ ή $\Delta I = 4$
με αλλαγή ομοτιμίας

π.χ.

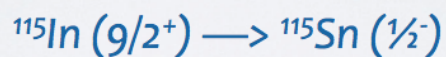


ΚΑΝΟΝΕΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

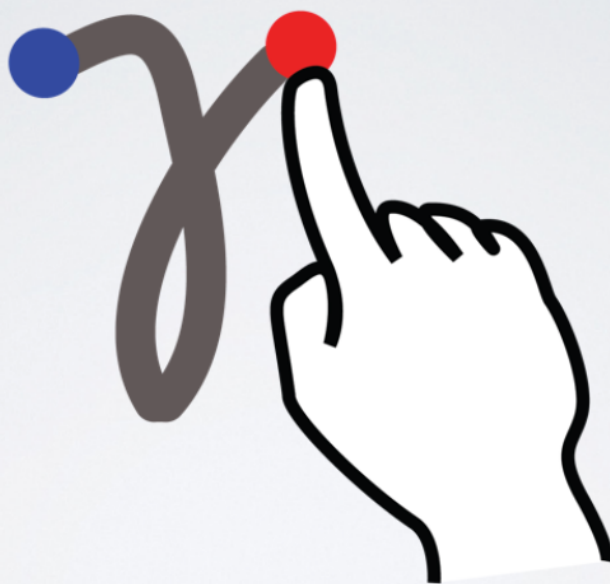
Για (τέταρτες) απαγορευμένες αποδιεγέρσεις

$\Delta I = 4$ ή $\Delta I = 5$
χωρίς αλλαγή ομοτιμίας

π.χ.

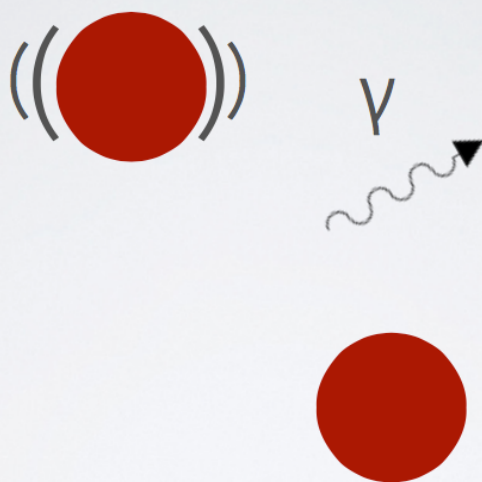


ΣΠΑΝΙΟΤΑΤΟ



<http://mertzimekis.gr> • @tmertzi

Η ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΓΑΜΜΑ



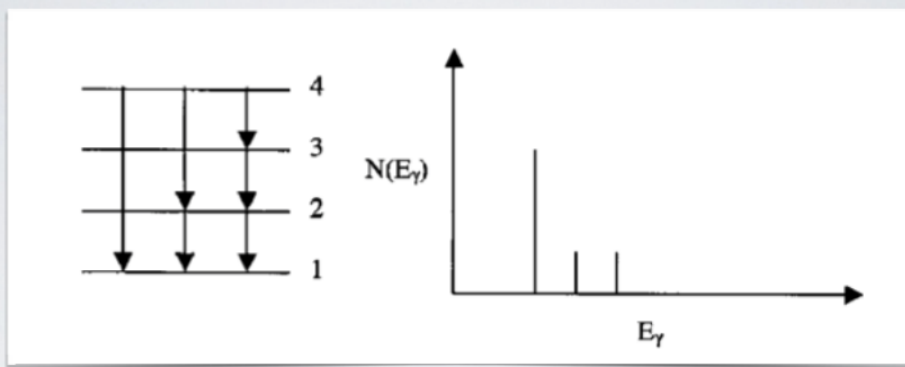
<http://mertzimekis.gr> • @tmertzi

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

- Οι διασπάσεις α και β αφήνουν συνήθως τους πυρήνες σε διεγερμένους καταστάσεις. Η αποδιέγερση αυτών συμβαίνει ταχύτητα με συνοδεία εκπομπής κβάντων φωτός
- Τα κβάντα φωτός είναι η ακτινοβολία γ
- Η ακτινοβολία γ έχει ενέργεια μεταξύ 10-10000 keV
- Λόγω της μεγάλης εμβέλειας, η ακτινοβολία γ είναι ένα από τα πιο καθιερωμένα εργαλεία για τη μελέτη των πυρήνων
- Οι πληροφορίες που λαμβάνουμε είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για τον καθορισμό της δομής των ισοτόπων (πχ σπιν/ομοτιμία)

<http://mertzimakis.gr> • @tmertzi

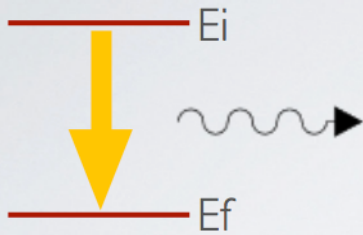
ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΟ ΦΑΣΜΑ



Το φάσμα είναι γραμμικό και καλά καθορισμένο από τις ενεργειακές μεταβάσεις μεταξύ των κβαντικών σταθμών

<http://mertzimakis.gr> • @tmertzi

Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΗ ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΓΑΜΜΑ



Για πυρήνα με μάζα M που αποδιεγείρεται με ταυτόχρονη εκπομπή γ , η ΑΔΕ και η ΑΔΟ δίνουν

$$E_i = E_f + T_R + E_\gamma$$

$$0 = \vec{p}_R + \vec{p}_\gamma$$

$$p_\gamma = p_R$$

$$E_\gamma = cp_\gamma$$

$$\Delta E = E_\gamma + T_R$$

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{p_R^2}{2M}$$

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}$$

Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΗ ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΓΑΜΜΑ

Η επίλυση της εξίσωσης δίνει:

$$E_\gamma = Mc^2 \left[-1 \pm \left(1 + 2 \frac{\Delta E}{Mc^2} \right)^{1/2} \right]$$

$\Delta E \sim \text{MeV}$ και $M \sim A \text{ GeV}$ οπότε

$$E_\gamma \approx \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}$$

Επομένως η διαφορά των ενεργειακών επιπέδων είναι σε επίπεδο 10^{-5} ίση με την ενέργεια της ακτίνας γ

ΜΟΝΑΔΙΚΗ εξαίρεση το φαινόμενο Moessbauer

ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ

Σε κβαντομηχανικό επίπεδο η εκπομπή ακτινοβολίας γ εκφράζεται από το ρυθμό διάσπασης:

$$\lambda(l, I_i, \pi \rightarrow I_f, \pi) = \frac{8\pi(l+1)}{l[(2l+1)!!]^2} \frac{k^{2l+1}}{\hbar} B(l, I_i, \pi \rightarrow I_f, \pi)$$

$k = 2\pi E_\gamma / \hbar c$, B : ανηγμένος ρυθμός μετάβασης

$$B(l, I_i, \pi \rightarrow I_f, \pi) = \frac{1}{2I_i + 1} |\langle I_f \xi || O_l || I_i \xi \rangle|^2$$

ηλεκτρικά	δίπολο	$\rightarrow$	$L = 1 \quad ez$
$er^L Y_{LM}(\vartheta, \varphi)$	τετράπολο	$\rightarrow$	$L = 2 \quad e(3z^2 - r^2)$

<http://mertimekis.gr> • @tmertzi

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΠΟΛΥΠΟΛΑ

$$\lambda(EL) \approx \frac{8\pi(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \left(\frac{E}{\hbar c}\right)^{2L+1} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 cR^{2L}$$

Οι χαμηλότερες τάξεις (λ σε Hz, E σε MeV):

$$\lambda(E1) = 1.0 \times 10^{14} A^{2/3} E^3$$

$$\lambda(E2) = 7.3 \times 10^7 A^{4/3} E^5$$

$$\lambda(E3) = 34 \times A^2 E^7$$

$$\lambda(E4) = 1.1 \times 10^{-5} A^{8/3} E^9$$

τιμές από K.Krane

Εκτιμήσεις
Weisskopf

<http://mertimekis.gr> • @tmertzi

ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΟΛΥΠΟΛΑ

$$\lambda(ML) \approx \frac{8\pi(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\mu_p - \frac{1}{L+1}\right)^2 \left(\frac{\hbar}{m_p c}\right)^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}\right) \\ \times \left(\frac{E}{\hbar c}\right)^{2L+1} \left(\frac{3}{L+2}\right)^2 cR^{2L-2}$$

Οι χαμηλότερες τάξεις:

$$\begin{aligned}\lambda(M1) &= 0.56 \times 10^{14} E^3 \\ \lambda(M2) &= 3.5 \times 10^7 A^{2/3} E^5 \\ \lambda(M3) &= 16 \times A^{4/3} E^7 \\ \lambda(M4) &= 4.5 \times 10^{-6} A^2 E^9\end{aligned}$$

Εκτιμήσεις
Weisskopf

τιμές από K.Krane

<http://mertimekis.gr> • @tmertzi

ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ WEISSKOPF

Δεν αποτελούν ακριβείς εκτιμήσεις για το ρυθμό διάσπασης

Δίνουν πληροφορίες για το αν υπάρχει συλλογικότητα στην εκπομπή του φωτονίου γ

Βασικά συμπεράσματα:

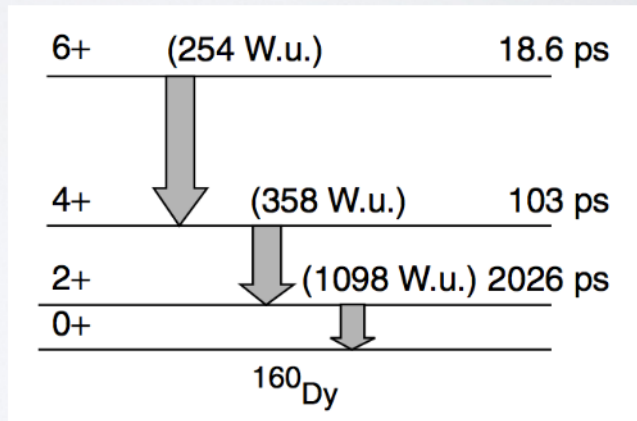
- ** οι χαμηλότερες τάξεις είναι κυρίαρχες
- ** για δεδομένη τάξη, το ηλεκτρικό πολύπολο είναι δυο τάξεις μεγέθους ισχυρότερο (ιδιαίτερα σε μεσαίους και βαρείς πυρήνες)

<http://mertimekis.gr> • @tmertzi

ΣΥΛΛΟΓΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

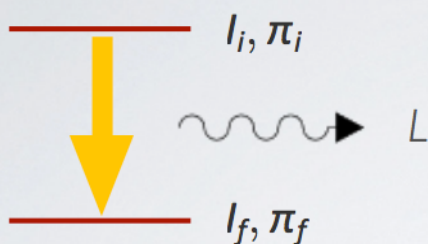
Ενισχύει τη μαζικότητα στις αποδιεγέρσεις

Συνήθως μεταβάσεις E2 παρουσιάζουν μεγάλες αποκλίσεις από τις εκτιμήσεις Weisskopf



<http://mertzimekis.gr> • @tmertzi

ΣΤΡΟΦΟΡΜΕΣ



Η σχέση για τις στροφορμές είναι:

$$I_i = L + I_f$$

επομένως:

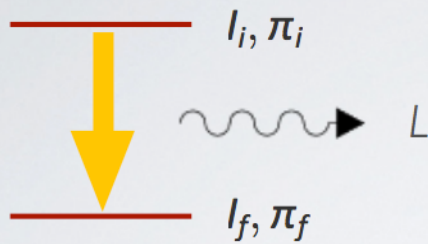
$$|I_i - I_f| \leq L \leq I_i + I_f$$

Πρακτικά:

$$\begin{matrix} I_i = \frac{3}{2} \\ I_f = \frac{5}{2} \end{matrix} \Rightarrow L = 1, 2, 3, 4$$

<http://mertzimekis.gr> • @tmertzi

ΟΜΟΤΙΜΙΑ



Τα ηλεκτρικά και μαγνητικά
πολύπολα διαφέρουν στην
ομοτιμία τους

$$\pi(EL) = (-1)^L$$

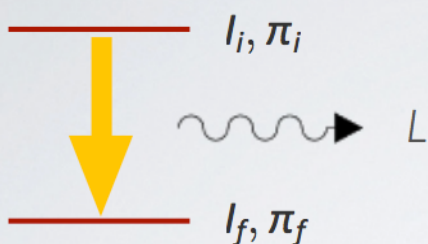
$$\pi(ML) = (-1)^{L+1}$$

Επομένως

ηλεκτρικά πολύπολα $\rightarrow$ **Άρτια** ομοτιμία

μαγνητικά πολύπολα $\rightarrow$ **Περιττή** ομοτιμία

ΟΜΟΤΙΜΙΑ



$$\begin{array}{l} l_i = \frac{3}{2}^+ \\ l_f = \frac{5}{2}^+ \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\} \pi_i \pi_f = +$$

επομένως:

Η εκπεμπόμενη ακτινοβολία είναι εξαιτίας
M1, E2, M3, E4

ΚΑΝΟΝΕΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

$$L \neq 0$$

$$|I_i - I_f| \leq L \leq I_i + I_f$$

$$\pi_i \pi_f = + \quad \text{άρτια } E, \text{ περιττά } M$$

$$\pi_i \pi_f = - \quad \text{περιττά } E, \text{ άρτια } M$$

Για μεταβάσεις με ίδιο αρχικό και τελικό σπιν, η εκπεμπόμενη ακτινοβολία είναι της χαμηλότερης δυνατής τάξης: **δίπολο $L = 1$**

ΓΩΝΙΑΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

- ☼ Οι γωνιακές κατανομές είναι χαρακτηριστικό του πολυπόλου που ευθύνεται για την εκπομπή της ακτινοβολίας γ (εξάρτηση από Y_{lm})
- ☼ Στατιστικά αναμένονται να είναι ομοιογενείς **ΕΚΤΟΣ** αν υπάρχει λόγος προτιμητέας διεύθυνσης των σπιν των αποδιεγειρόμενων πυρήνων
- ☼ Απλούστερη περίπτωση: προσανατολισμός σπιν λόγω ύπαρξης μαγνητικού πεδίου

ΓΩΝΙΑΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

$$W_{\text{dipole}}(\theta, m_I = 0) = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta$$

$$W_{\text{dipole}}(\theta, m_I = +1) = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta)$$

$$W_{\text{dipole}}(\theta, m_I = -1) = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta)$$

