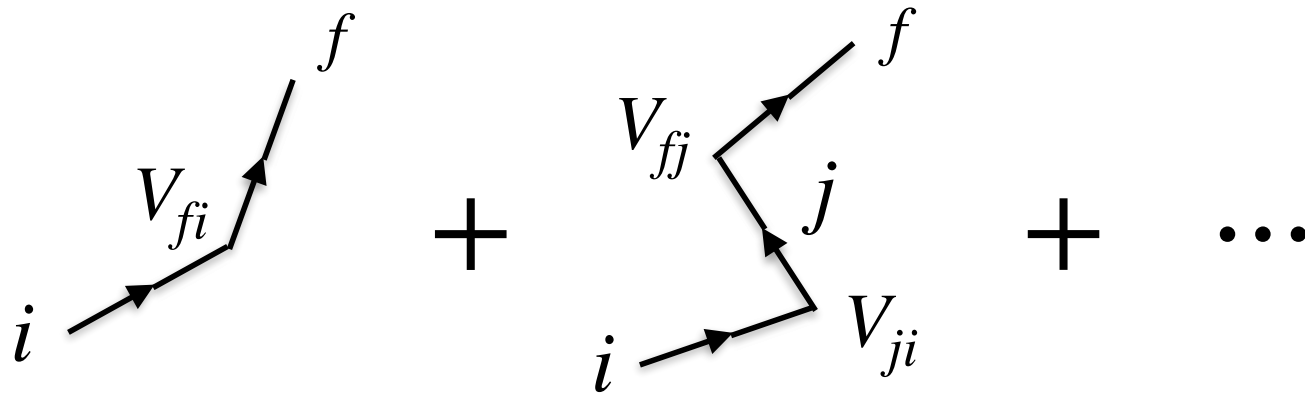


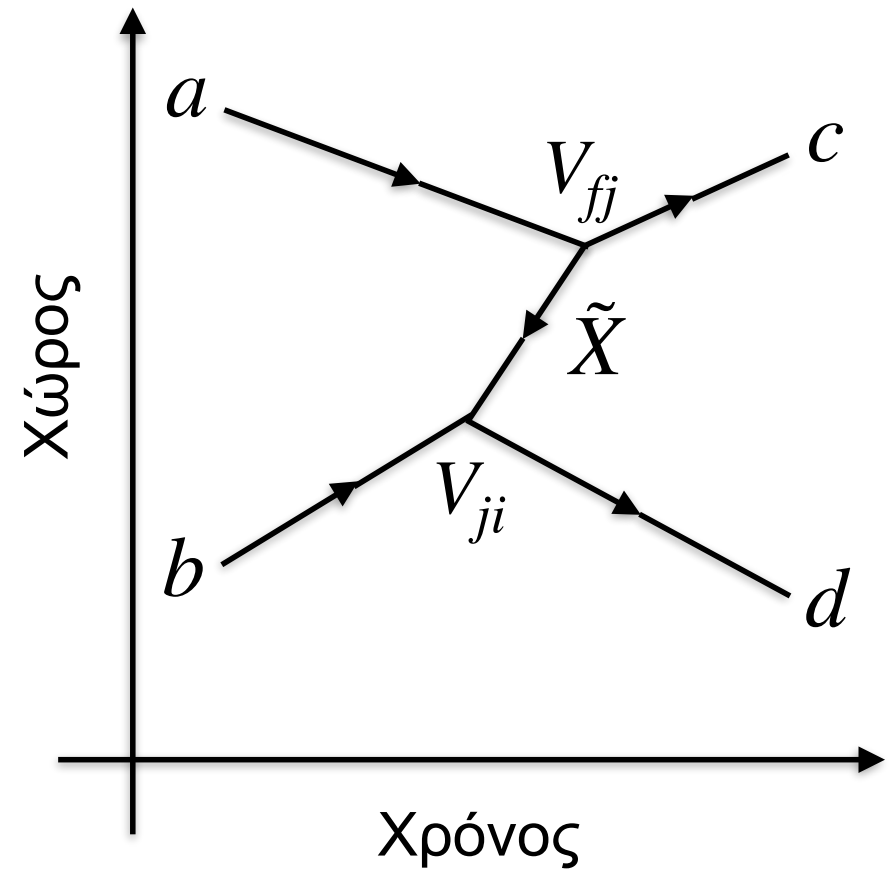
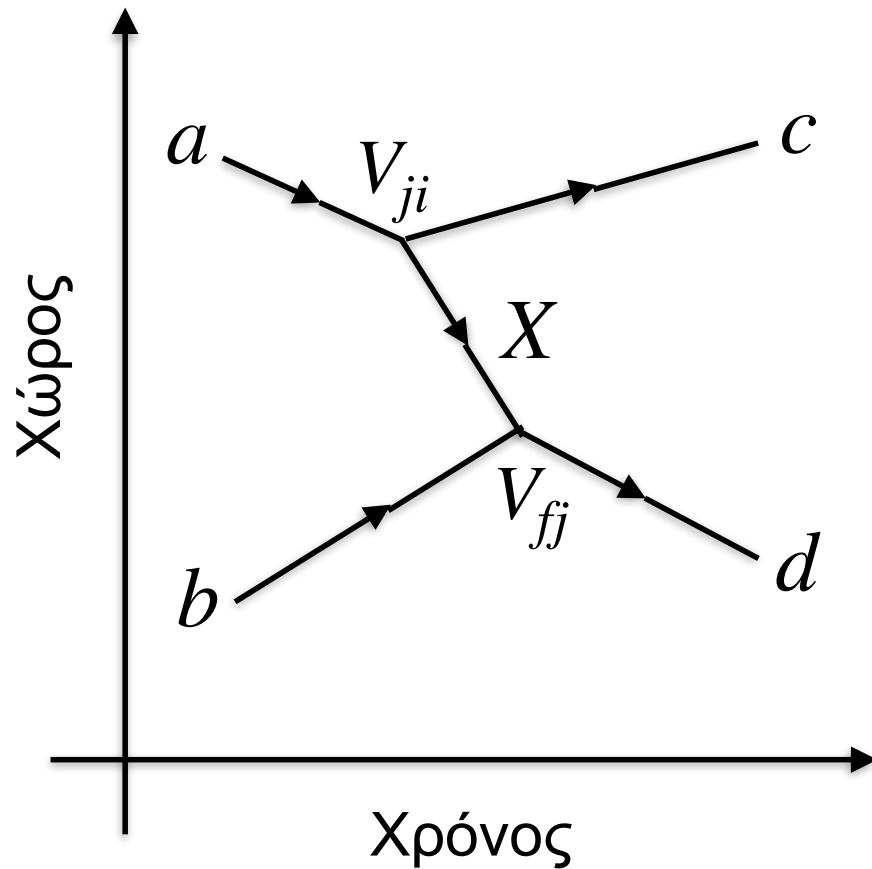
Σκέδαση σωματιδίων σε δεύτερη τάξη κβαντικής θεωρίας διαταραχών

$$T_{fi} = \langle f | V | i \rangle + \sum_{j \neq i} \frac{\langle f | V | j \rangle \langle j | V | i \rangle}{E_i - E_j} + \dots$$



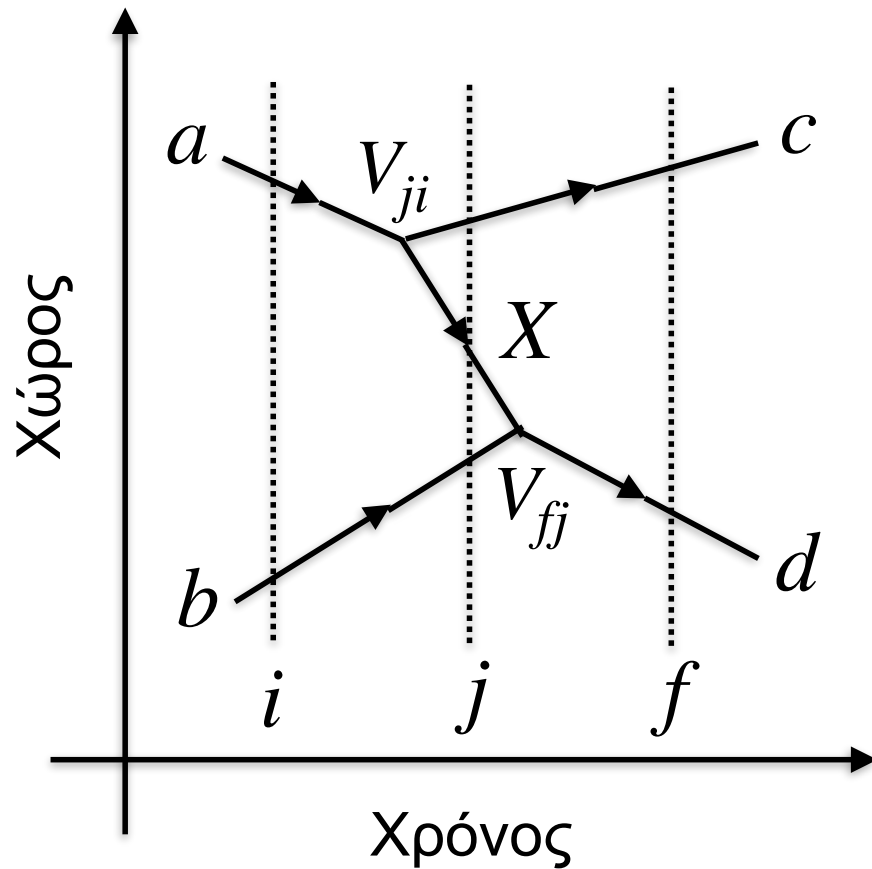
Στην Κβαντομηχανική, η σκέδαση σωματιδίων περιγράφεται ως μετάβαση από μια αρχική κατάσταση i σε μια τελική κατάσταση f με διαδοχικές “στιγμαίες” αλλαγές (“διαταραχές”) στην κινητική κατάσταση ενός σωματιδίου εξαιτίας κάποιας αλληλεπίδρασης V . Ανάμεσα στις αλλαγές αυτές, το σωματίδιο κινείται ελεύθερα.

Χρονική διάταξη μιας ανταλλαγής σωματιδίου



Στην Κβαντομηχανική, απαιτείται τα πλάτη πιθανότητας και των δύο χρονο-διατάξεων να προστεθούν ως “δυνατά ενδεχόμενα” πραγματοποίησης της διεργασίας για να έχει το συνολικό πλάτος μετάβασης $a + b \rightarrow c + d$ φυσικό νόημα.

Πλάτος μετάβασης σε δεύτερη τάξη διαταραχών



Το σωματίδιο X εκπέμπεται από το $a \rightarrow$ η ενέργεια δεν διατηρείται ($E_i \neq E_j$) για ένα διάστημα Δt συμβατό με την αρχή της αβεβαιότητας, μέχρι το X να απορροφηθεί από το σωματίδιο b .

Η ορμή διατηρείται στην εκπομπή του X .

Το X ικανοποιεί τη συνθήκη “επί του φλοιού μάζας”: $E_X^2 = \vec{p}_X^2 + m_X^2$.

$$T_{fi}^{ab} = \frac{\langle f | V | j \rangle \langle j | V | i \rangle}{E_i - E_j} = \frac{\langle d | V | X + b \rangle \langle c + X | V | a \rangle}{(E_a + E_b) - \underbrace{(E_c + E_X + E_b)}_{E_d}}$$

Πλάτος μετάβασης σε δεύτερη τάξη διαταραχών

Σχετικιστικά συναλλοίωτη
κανονικοποίηση:

$$V_{nl} = \mathcal{M}_{nl} \prod_k (2E_k)^{-1/2} \Rightarrow \begin{cases} V_{ji} = \langle c + X | V | a \rangle = \frac{\mathcal{M}_{a \rightarrow c+X}}{(2E_a 2E_c 2E_X)^{1/2}} = \frac{g_a}{(2E_a 2E_c 2E_X)^{1/2}} \\ V_{fj} = \langle d | V | X + b \rangle = \frac{\mathcal{M}_{X+b \rightarrow d}}{(2E_X 2E_b 2E_d)^{1/2}} = \frac{g_b}{(2E_X 2E_b 2E_d)^{1/2}} \end{cases}$$

$\hbar = c = 1$

$$\Rightarrow T_{fi}^{ab} = \frac{1}{2E_X} \cdot \frac{1}{(2E_a 2E_b 2E_c 2E_d)^{1/2}} \cdot \frac{g_a g_b}{E_a - E_c - E_X}$$

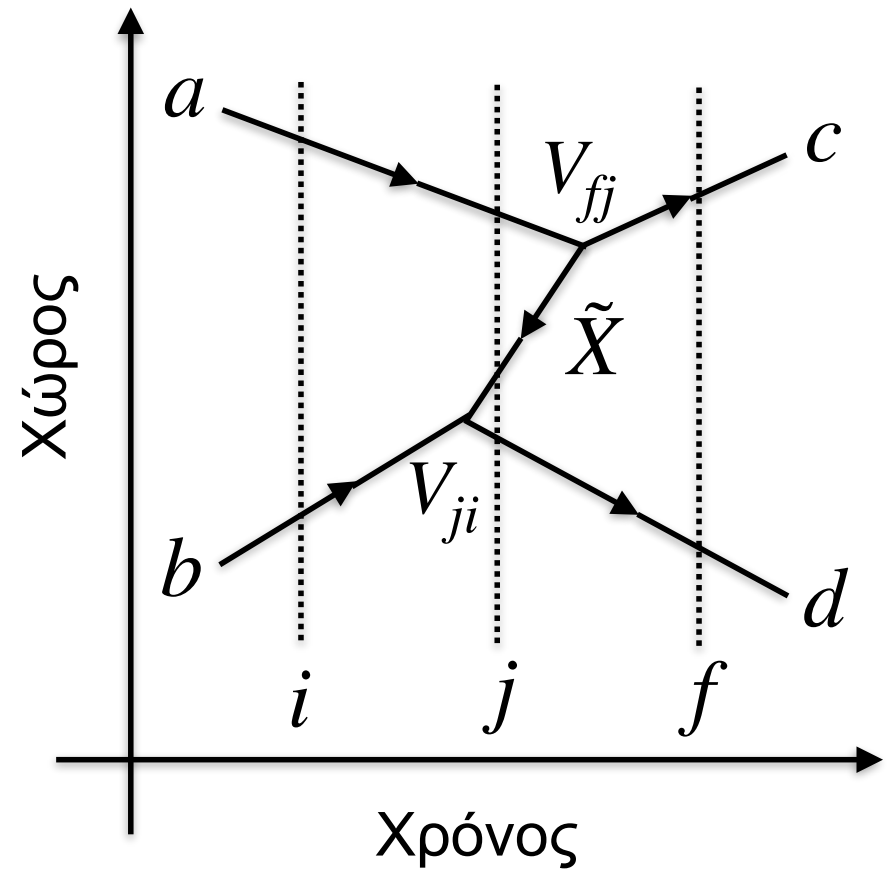
$$\mathcal{M}_{fi}^{ab} = (2E_a 2E_b 2E_c 2E_d)^{1/2} T_{fi}^{ab} = \frac{1}{2E_X} \cdot \frac{g_a g_b}{E_a - E_c - E_X}$$

Πλάτος μετάβασης σε δεύτερη τάξη διαταραχών

Το σωματίδιο X εκπέμπεται από το $b \rightarrow$ η ενέργεια δεν διατηρείται ($E_i \neq E_j$) για ένα διάστημα Δt συμβατό με την αρχή της αβεβαιότητας, μέχρι το X να απορροφηθεί από το σωματίδιο a .

Η ορμή διατηρείται στην εκπομπή του X .

Το X ικανοποιεί τη συνθήκη “επί του φλοιού μάζας”: $E_X^2 = \vec{p}_X^2 + m_X^2$.



$$T_{fi}^{ba} = \frac{\langle f | V | j \rangle \langle j | V | i \rangle}{E_i - E_j} = \frac{\langle c | V | a + X \rangle \langle X + d | V | b \rangle}{\underbrace{(E_a + E_b) - (E_a + E_X + E_d)}_{E_c}}$$

Πλάτος μετάβασης σε δεύτερη τάξη διαταραχών

$$V_{ji} = \langle X + d | V | b \rangle = \frac{\mathcal{M}_{b \rightarrow X+d}}{(2E_b 2E_d 2E_X)^{1/2}} = \frac{g_b}{(2E_b 2E_d 2E_X)^{1/2}}$$

$$V_{fj} = \langle c | V | a + X \rangle = \frac{\mathcal{M}_{a+X \rightarrow c}}{(2E_X 2E_a 2E_c)^{1/2}} = \frac{g_a}{(2E_X 2E_a 2E_c)^{1/2}}$$

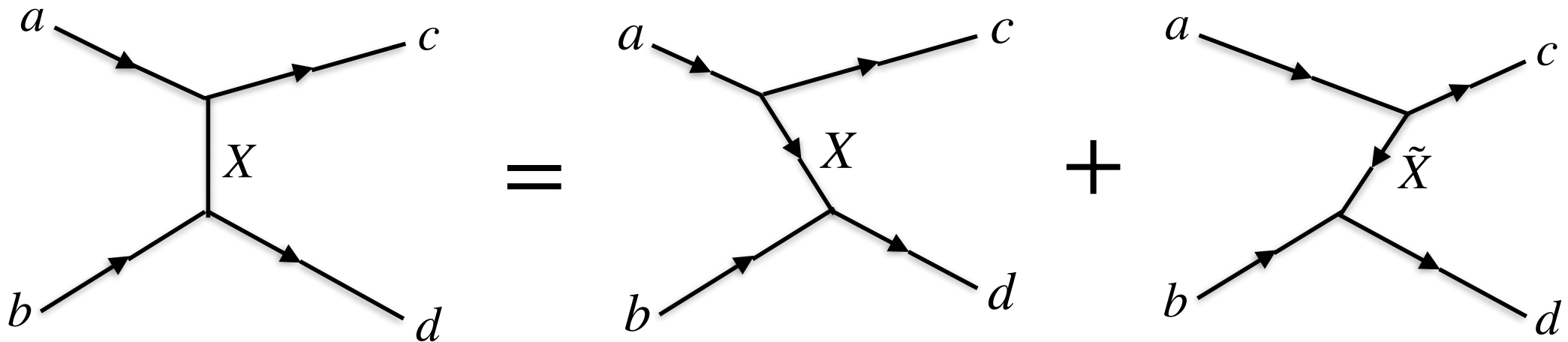
$$\Rightarrow T_{fi}^{ba} = \frac{1}{2E_X} \cdot \frac{1}{(2E_a 2E_b 2E_c 2E_d)^{1/2}} \cdot \frac{g_b g_a}{E_b - E_d - E_X}$$

$$\mathcal{M}_{fi}^{ba} = (2E_a 2E_b 2E_c 2E_d)^{1/2} T_{fi}^{ba} = \frac{1}{2E_X} \cdot \frac{g_a g_b}{E_b - E_d - E_X}$$

Πλάτος μετάβασης σε δεύτερη τάξη διαταραχών

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{fi} &= \mathcal{M}_{fi}^{ab} + \mathcal{M}_{fi}^{ba} = \frac{g_a g_b}{2E_X} \left(\frac{1}{E_a - E_c - E_X} + \underbrace{\frac{1}{E_b - E_d - E_X}}_{E_c - E_a} \right) \\
 &= \frac{g_a g_b}{2E_X} \left(\frac{1}{E_a - E_c - E_X} - \frac{1}{E_a - E_c + E_X} \right) \\
 &= \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c)^2 - E_X^2} \left. \begin{array}{l} \\ \\ E_X^2 = \vec{p}_X^2 + m_X^2 = (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 + m_X^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{M}_{fi} = \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c)^2 - (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 - m_X^2} \\
 &= \frac{g_a g_b}{(p_a - p_c)^2 - m_X^2} \\
 &\Rightarrow \mathcal{M}_{fi} = \frac{g_a g_b}{q^2 - m_X^2}
 \end{aligned}$$

Εικονικά σωματίδια και διαγράμματα Feynman



Με τον όρο **διάγραμμα Feynman** εννοείται το άθροισμα των πλατών μετάβασης που αντιστοιχούν στα δύο χρονικά διατεταγμένα διαγράμματα σκέδασης $\rightarrow$ το σωματίδιο X δεν έχει χρονική κατεύθυνση. Μεταφέρει 4-ορμή q^μ ανάμεσα στα 4 αλληλεπιδρώντα σωματίδια, η οποία διατηρείται (δηλ. και η ενέργεια και η ορμή). Το X **δεν ικανοποιεί τη συνθήκη** $E_X^2 = \vec{p}_X^2 + m_X^2$, δηλ. κινείται “εκτός φλοιού μάζας” και γι’ αυτό χαρακτηρίζεται **εικονικό**.

Το μη σχετικιστικό όριο σε πρώτη τάξη διαταραχών

Το σωματίδιο σκεδάζεται χωρίς μεταβολή της ενέργειάς του μέσα σε κάποιο δυναμικό:

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c)^2 - (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 - m_X^2} \quad \longrightarrow \quad M_{fi} = \frac{-g_a g_b}{(\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 + m_X^2} = \frac{-g_a g_b}{\vec{q}^2 + m_X^2}$$

Εφόσον $\Delta E = |E_a - E_c| = 0$, η αβεβαιότητα στο χρόνο Δt γίνεται άπειρη, δηλαδή το δυναμικό πρέπει να είναι στατικό: $V = V(\vec{r})$

Στην περίπτωση αυτή το πλάτος μετάβασης υπολογίζεται σε πρώτη τάξη διαταραχών:

$$M_{fi} = \langle f | V(\vec{r}) | i \rangle = \int \psi_f^* V(\vec{r}) \psi_i d^3r = -g_a \int e^{-i\vec{p}_c \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) e^{i\vec{p}_a \cdot \vec{r}} d^3r = -g_a \int V(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3r$$

Δηλαδή ανάγεται σε μετασχηματισμό Fourier του δυναμικού από το χώρο θέσης στο χώρο ορμής του σωματιδίου.

Μετασχηματισμός Fourier κεντρικού δυναμικού

$$V(\vec{r}) = V(r) \Rightarrow M_{fi} = g_a \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} V(r) e^{iqr \cos \theta} r^2 dr d\cos \theta d\phi \quad \text{Σφαιρικές συντεταγμένες}$$

Μετά τις γωνιακές ολοκληρώσεις:

$$= 2\pi g_a \int_0^\infty V(r) r^2 \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} dr = 4\pi g_a \int_0^\infty V(r) r^2 \frac{\sin qr}{qr} dr$$

Για δυναμικό που ενισχύεται αντίστροφα με την απόσταση από το κέντρο όταν αυτή είναι μικρή και σβήνει εκθετικά όταν είναι μεγάλη:

$$V(r) = \frac{g_b}{4\pi} \cdot \frac{e^{-m_X r}}{r} \Rightarrow M_{fi} = \frac{g_a g_b}{q} \int_0^\infty e^{-m_X r} \sin q r dr = \frac{g_a g_b}{q^2} \int_0^\infty e^{-(m_X/q)x} \sin x dx$$

Πρώτη παραγοντική ολοκλήρωση:

$$= \frac{g_a g_b}{q^2} \left(1 - \frac{m_X}{q} \int_0^\infty e^{-(m_X/q)x} \cos x dx \right)$$

Δεύτερη παραγοντική ολοκλήρωση:

$$= \frac{g_a g_b}{q^2} \left(1 - \frac{m_X^2}{q^2} \int_0^\infty e^{-(m_X/q)x} \sin x dx \right) = \frac{g_a g_b}{q^2} \left(1 - \frac{m_X^2}{g_a g_b} M_{fi} \right)$$

Το δυναμικό Yukawa

$$V(r) = \frac{g_a g_b}{4\pi} \cdot \frac{e^{-m_X r}}{r} \Rightarrow M_{fi} = \frac{g_a g_b}{|\vec{q}|^2 + m_X^2}$$

Για ένα βαρύ ανταλλασσόμενο σωματίδιο, π.χ. $X = \pi, W, Z, \dots$ η εμβέλεια του δυναμικού είναι μικρή $\rightarrow$ **δυναμικό Yukawa**

Για ένα ανταλλασσόμενο σωματίδιο χωρίς μάζα, π.χ. $X = \gamma$, η εμβέλεια του δυναμικού $V(r) \sim 1/r$ είναι άπειρη $\rightarrow$ **δυναμικό Coulomb**

Στο δυναμικό Coulomb g_a και g_b είναι αντίστοιχα τα φορτία του σκεδαζόμενου σωματίου και του κέντρου σκέδασης: $V(r) = q_a q_b / (4\pi r)$

Το δυναμικό Yukawa

Είναι λύση της **εξίσωσης Klein-Gordon** με κεντρική συμμετρία:

$$\left. \begin{array}{l} E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \\ E \rightarrow i\partial/\partial t \\ \vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + m^2 \psi \\ \psi = U(r)e^{-iEt} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla^2 U(r) = (-E^2 + m^2)U(r)$$

Στο όριο που μηδενίζεται η ενέργεια E η οποία μεταφέρεται από το δυναμικό αλληλεπίδρασης που περιγράφει η εξίσωση Klein-Gordon:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = m^2 U \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = m^2 r^2 U \\ \text{Σφαιρικές συνεταγμένες} \\ U(r) = \frac{f(r)}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d^2 f}{dr^2} = m^2 f \Rightarrow f(r) = e^{\pm mr}$$

Η φυσικά αποδεκτή λύση μηδενίζεται στο άπειρο $\Rightarrow U(r) = \frac{e^{-mr}}{r}$