ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ & ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ

Κ. Βελλίδης & Θ. Μερτζιμέκης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, 2022

- Κλασική-Κβαντική Εικόνα Πεδίου
- Εικονικά Σωμάτια
- Διαγράμματα Feynman
- Ηλεκτρομαγνητικές και Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις
- Αλληλεπιδράσεις ως Διαταραχές Ελεύθερων Σωματίων

Κλασική & κβαντική εικόνα πεδίου

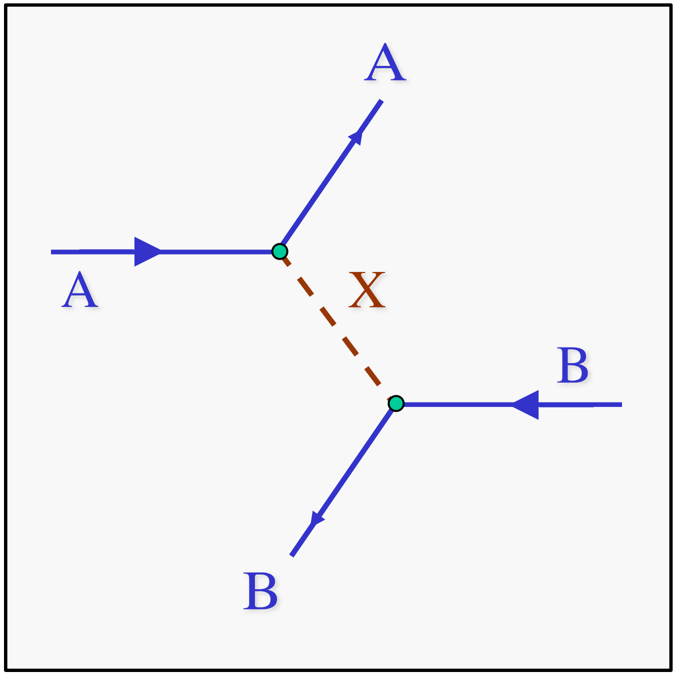
Κλασική εικόνα αλληλεπίδρασης: Το δυναμικό ή το πεδίο ενός σώματος που επιδρά στο άλλο σώμα.

Κβαντική θεώρηση: Η αλληλεπίδραση περιγράφεται με την ανταλλαγή κβάντων (μποζονίων) συγκεκριμένων για κάθε τύπο αλληλεπίδρασης.

Η διαδικασία πραγματοποιείται σε χρονικό διάστημα που καθορίζεται από την Αρχή της Αβεβαιότητας

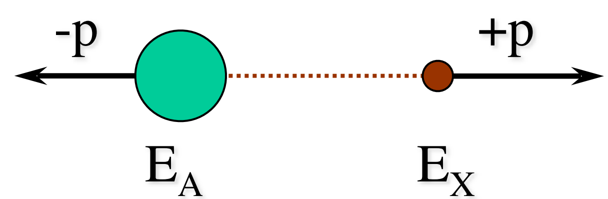
$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$$

Κλασική & κβαντική εικόνα πεδίου



Αλληλεπίδραση σωματιδίων A και B μέσω της ανταλλαγής του σωματιδίου X με μάζα M_X

Στο σύστημα αναφοράς του σωματιδίου A, η εκπομπή του διαδότη X προσδίδει ανάκρουση στο A με ίσες κατά μέτρο ορμές.



Η ενεργειακή διαφορά υπολογίζεται:

$$\Delta E = E_A + E_X - M_A c^2 \quad \Longrightarrow \quad \Delta E = \sqrt{p^2c^2 + M_A^2c^4} + \sqrt{p^2c^2 + M_X^2c^4} - M_A c^2$$

απ' όπου συνάγεται:

$$\text{για} \quad p \to \infty \quad \Rightarrow \quad \Delta E = 2pc$$

$$\& \text{ για} \quad p \to 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E = M_X c^2$$

Κλασική & κβαντική εικόνα πεδίου

Η ενεργειακή αυτή παραβίαση ΔΕ πρέπει υποχρεωτικά να διαρκεί για μέγιστο χρόνο Δτ που να καλύπτεται από την αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg:

$$\Delta\tau = \frac{\hbar}{\Delta E}$$

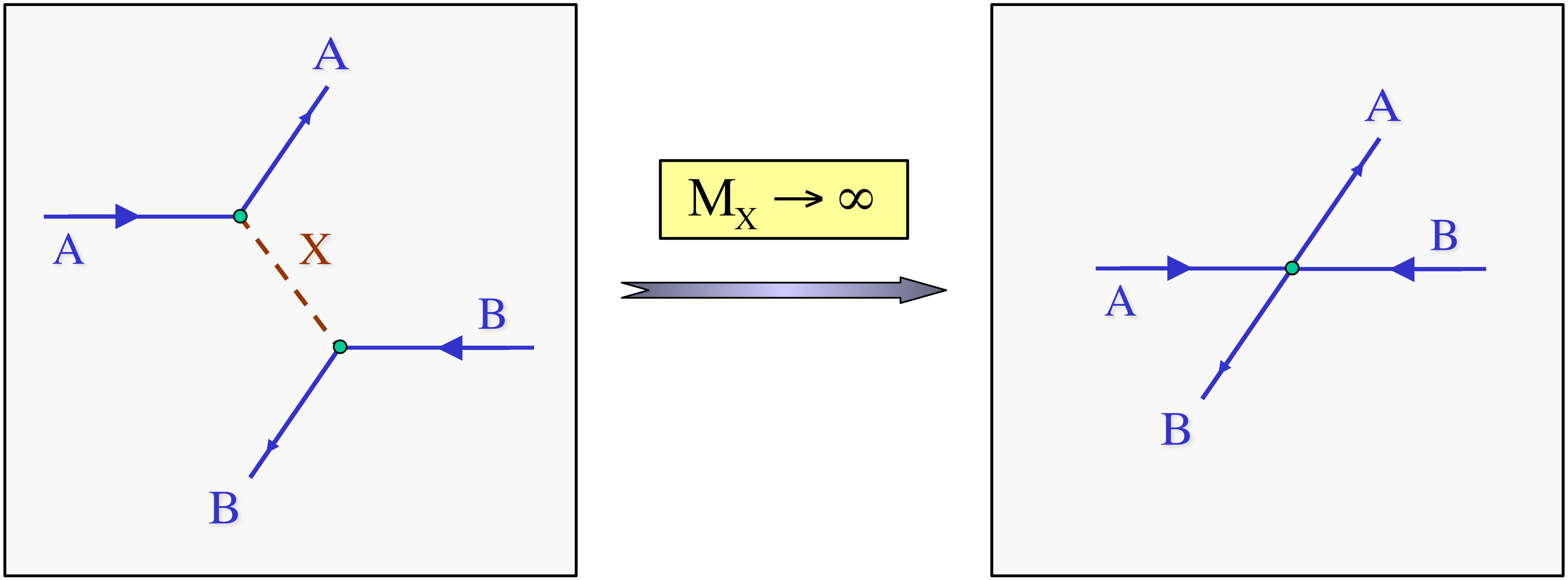
Η μέγιστη εμβέλεια που μπορεί να έχει το σωματίδιο Χ είναι κατά συνέπεια:

$$R = c \cdot \Delta\tau = c \cdot \frac{\hbar}{\Delta E} = c \cdot \frac{\hbar}{M_X c^2} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\hbar}{M_X c}}$$

Η εμβέλεια του πεδίου είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του διαδότη.

Στην περίπτωση της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης, όπου ο διαδότης είναι το φωτόνιο με μηδενική μάζα ηρεμίας, είναι προφανές πως η εμβέλεια του πεδίου γίνεται άπειρη.

Κλασική & κβαντική εικόνα πεδίου

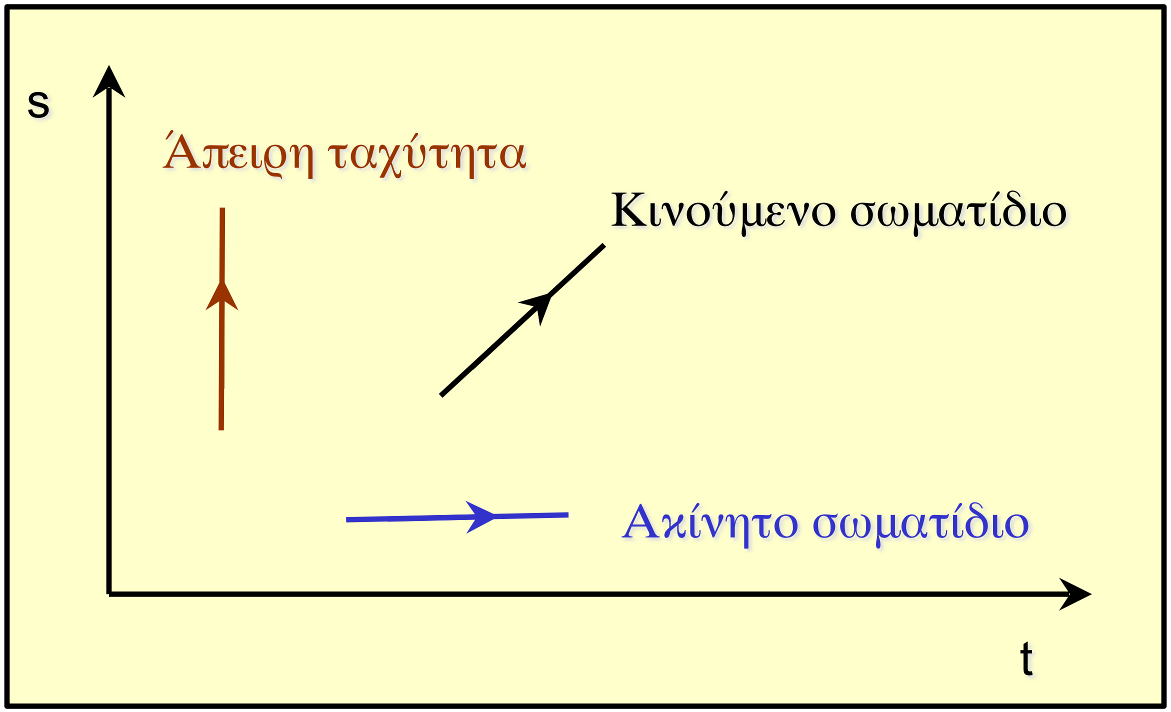


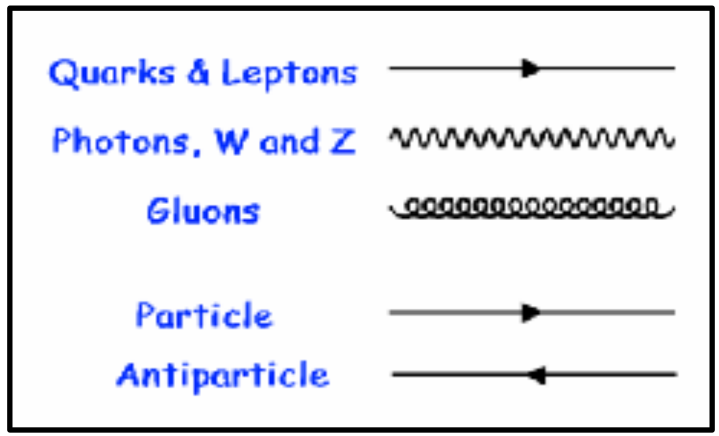
Στην περίπτωση όπου η μάζα του διαδότη γίνεται πρακτικά άπειρη, τότε η εμβέλεια του πεδίου μηδενίζεται και η αλληλεπίδραση συρρικνώνεται σε ένα μόνο σημείο του χώρου (αλληλεπίδραση “επαφής”).

Διαγράμματα Feynman

Διαγράμματα αναπαράστασης της διαδικασίας αλληλεπίδρασης.

- Ο χρόνος εξελίσσεται οριζόντια, ο χώρος κατακόρυφα.
- Τα βέλη δείχνουν τη φορά κίνησης των σωματίων που πλησιάζουν ή απομακρύνονται από τις κορυφές.
- Εισερχόμενα σωμάτια ισοδυναμούν με εξερχόμενα αντισωμάτια.

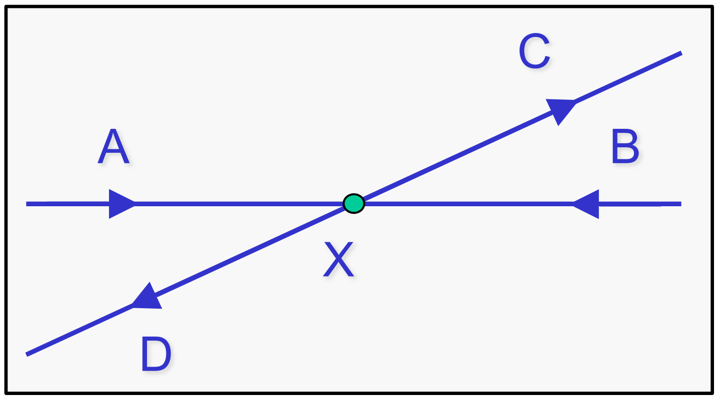




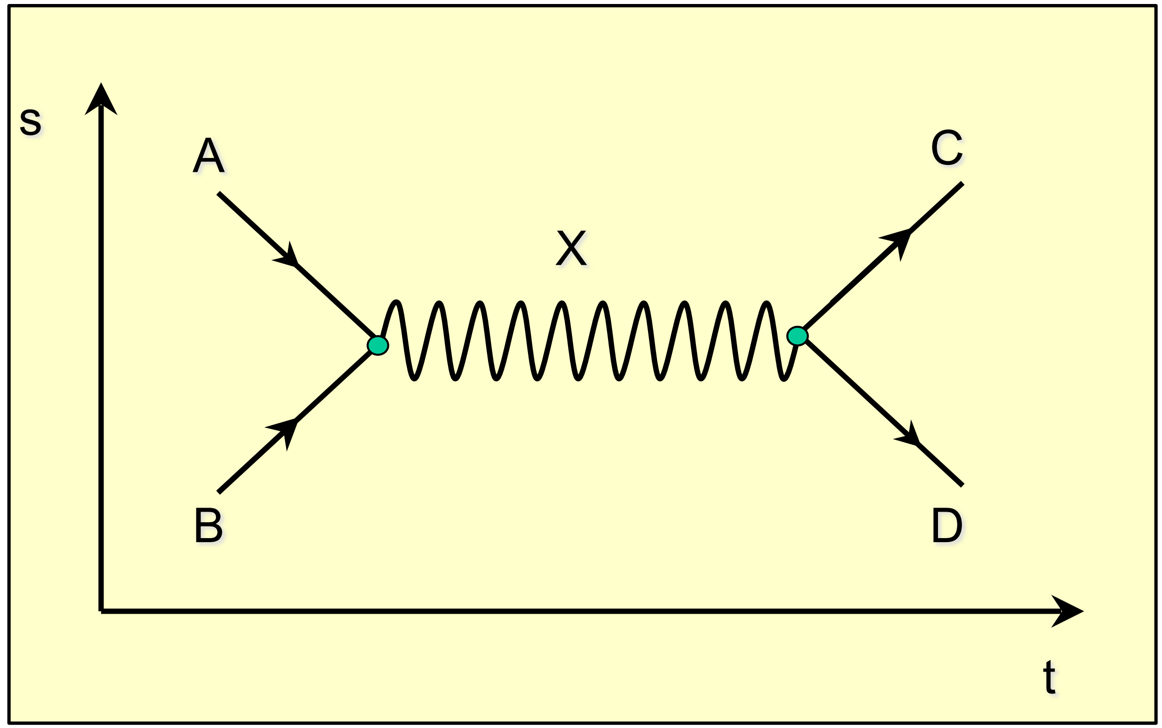
Διαγράμματα Feynman

Διαγράμματα Εξαΰλωσης (Annihilation) ή Σχηματισμού (Formation)

Τα σωματίδια A και B συγκρούονται σχηματίζοντας το ενδιάμεσο σωματίδιο X, το οποίο στη συνέχεια διασπάται στα C και D.



Η αλληλεπίδραση όπως φαίνεται στο σύστημα του εργαστηρίου.

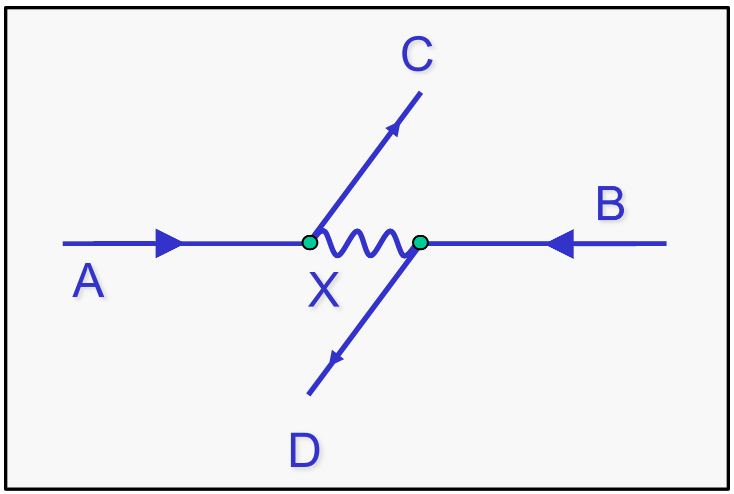


Σχηματική αναπαράσταση της αλληλεπίδρασης με διάγραμμα Feynman. Σε κάθε κορυφή τουλάχιστον το ηλεκτρικό φορτίο διατηρείται.

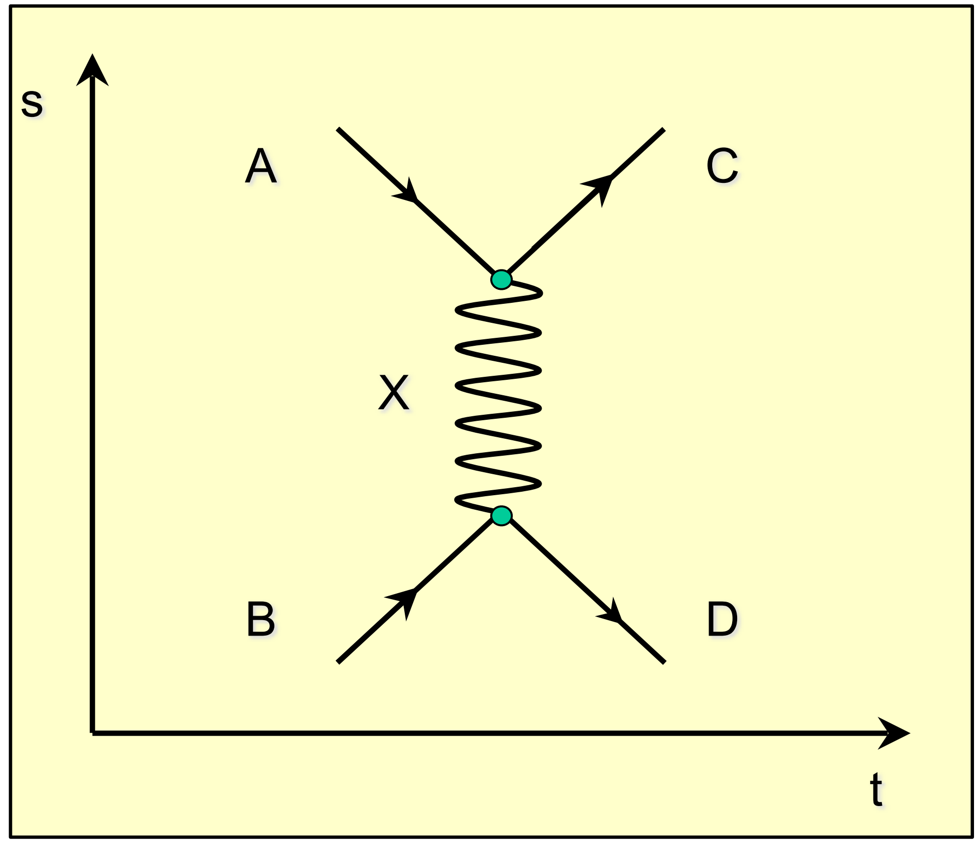
Διαγράμματα Feynman

Διαγράμματα Ανταλλαγής (Exchange Diagrams)

Το σωματίδιο A σκεδάζεται από το σωματίδιο B ανταλλάσσοντας το ενδιάμεσο σωματίδιο X. Τα αρχικά σωματίδια μετασχηματίζονται αντίστοιχα στα C και D.



Η αλληλεπίδραση όπως φαίνεται στο σύστημα του εργαστηρίου.

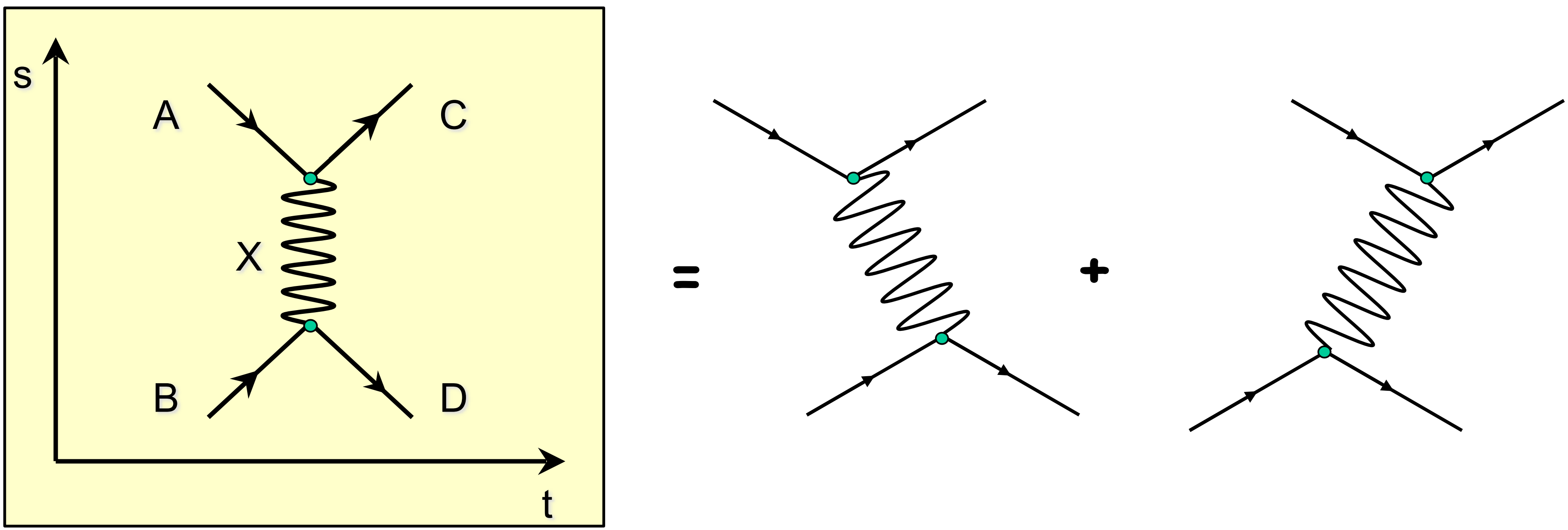


Αναπαράσταση με διάγραμμα Feynman.

Διαγράμματα Feynman

Διαγράμματα Ανταλλαγής (Exchange Diagrams)

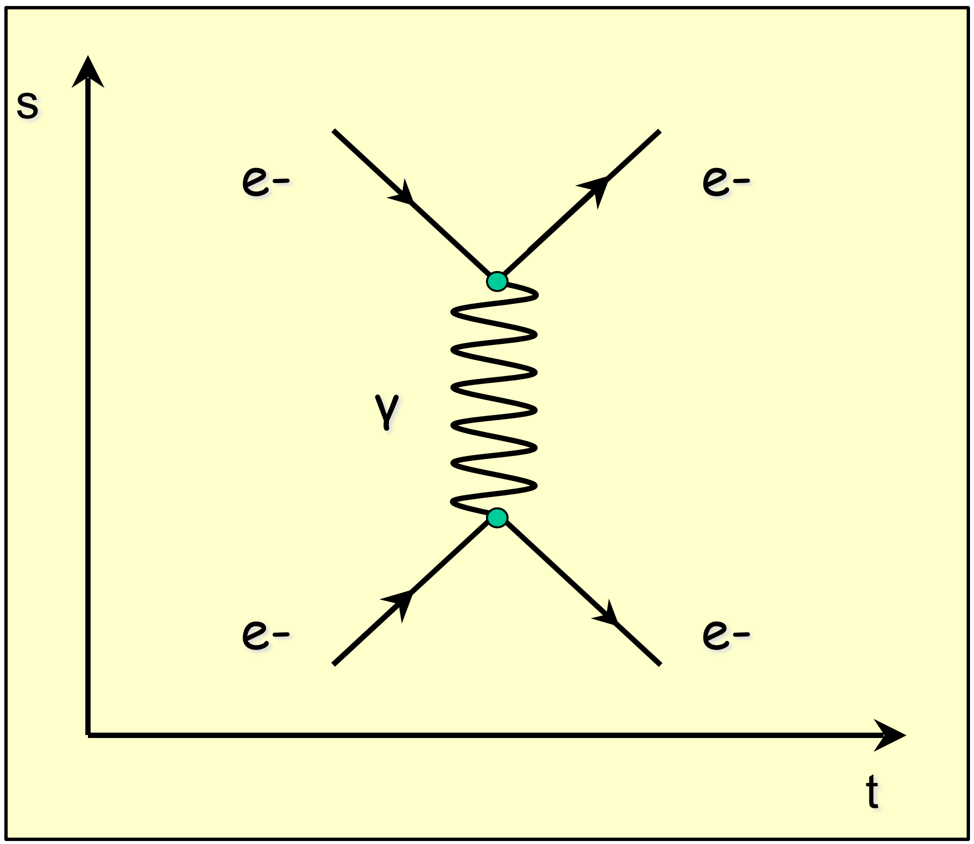
Δεν γνωρίζουμε αν το X εκπέμφθηκε από το A και απορροφήθηκε από το B ή αντίστροφα.



Διαγράμματα Feynman

Εικονικά Σωμάτια Ανταλλαγής (Virtual Particles)

Σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις το σωμάτιο X χαρακτηρίζεται σαν εικονικό. Για το χρόνο που υπάρχει υπακούει στην αρχή της αβεβαιότητας $\Delta E \bullet \Delta t \sim \hbar$ αλλά η μάζα του διαφέρει από τη μάζα ηρεμίας!



Παράδειγμα 1

Στην σκέδαση δύο ηλεκτρονίων (ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση) το ενδιάμεσο φωτόνιο (X=γ) έχει:

Ενέργεια: $E = 0$

Ορμή: $p = 2p_e$

και από τη σχέση $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

Μάζα: $m = 2ip_e/c$

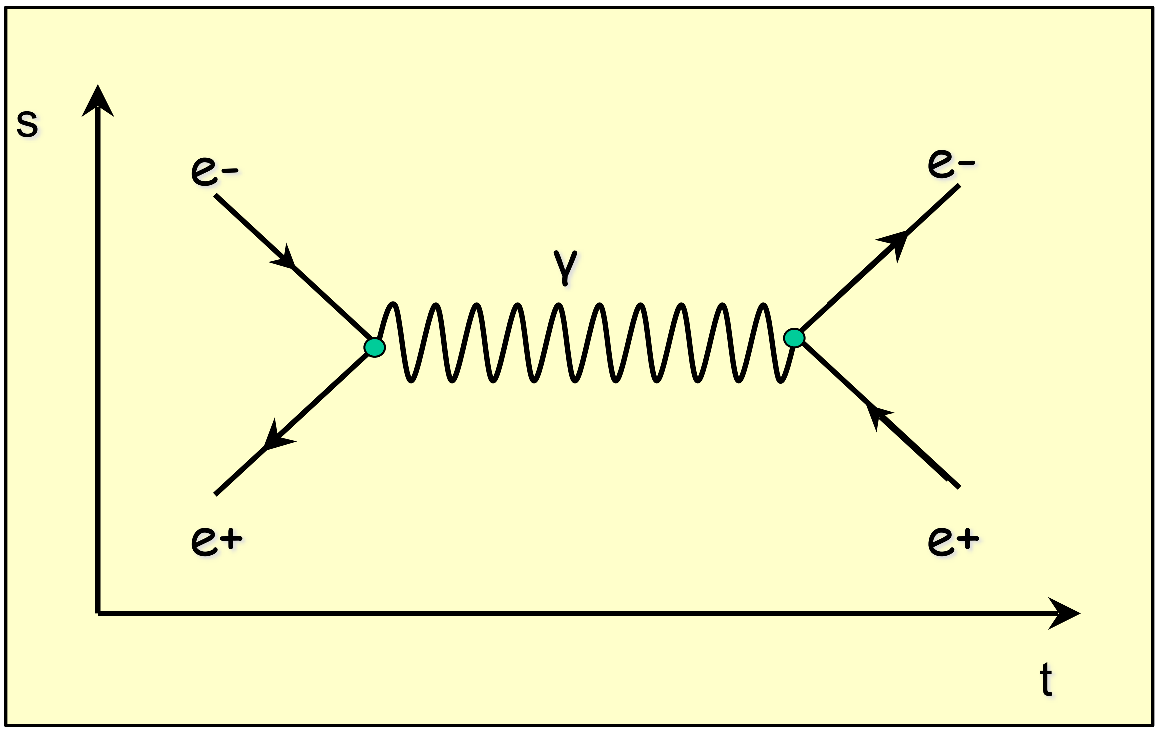
Φανταστική μάζα!

Διαγράμματα Feynman

Εικονικά Σωμάτια Ανταλλαγής (Virtual Particles)

Παράδειγμα 2

Εξαΰλωση ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου (ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση)



Για το φωτόνιο ισχύει:

Ενέργεια: $E = 2E_e$

Ορμή: $p = 0$

και από τη σχέση

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

Μάζα: $m = 2E_e/c^2$

Άρα το φωτόνιο είναι εικονικό!

Διαγράμματα Feynman

Εικονικά Σωμάτια Ανταλλαγής (Virtual Particles)

Το φωτόνιο του προηγούμενου παραδείγματος με $E=2E_e$ και $p=0$ συμπεριφέρεται τελείως αφύσικα παραβιάζοντας την βασική σχέση μεταξύ ενέργειας και ορμής

$$E = p\,c$$

Για την άρση της δυσκολίας αυτής στηριζόμαστε στην αρχή της αβεβαιότητας. Μπορούμε να δεχτούμε ότι το εικονικό αυτό φωτόνιο υφίσταται διακύμανση στην ενέργεια

$$\Delta E = 2E_e$$

(όσο είναι δηλαδή η πλεονάζουσα ενέργεια). Άρα το εικονικό φωτόνιο μπορεί να υπάρχει για χρονικό διάστημα:

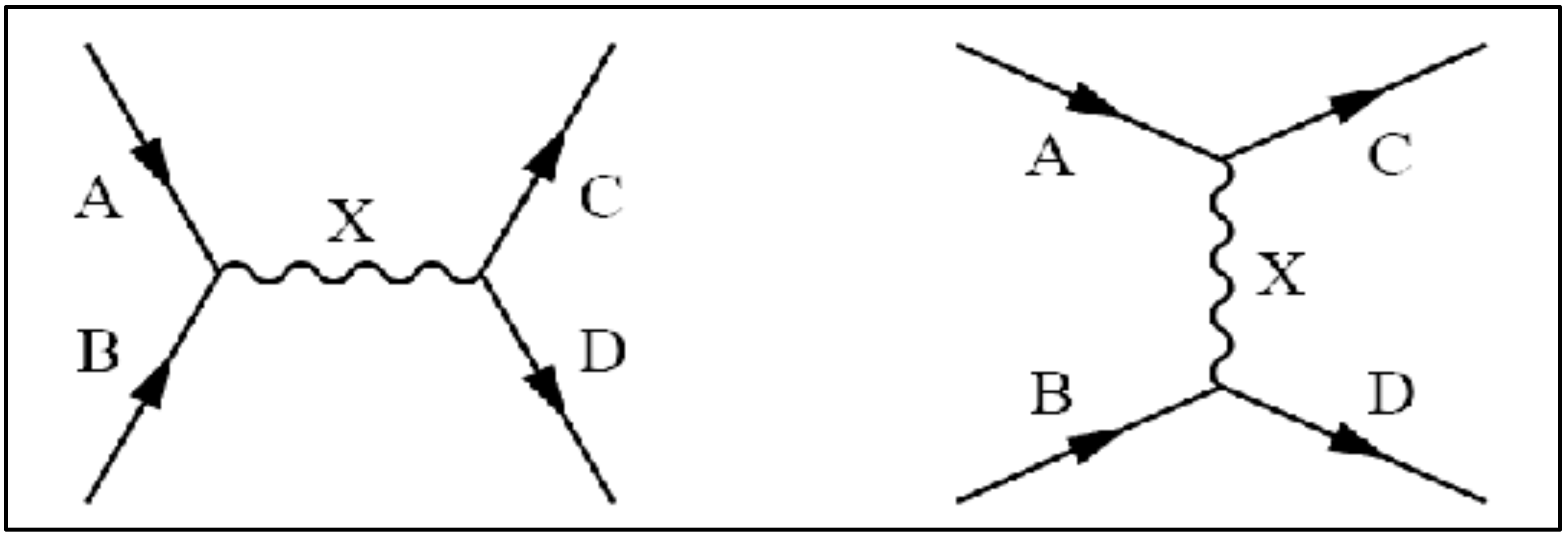
$$\Delta t \approx \hbar / 2E_e$$

Διαγράμματα Feynman

Γενικές Ιδιότητες

Ως επί το πλείστον τα διαγράμματα Feynman παριστούν διεργασίες της μορφής:

$$\boxed{A + B \rightarrow C + D}$$

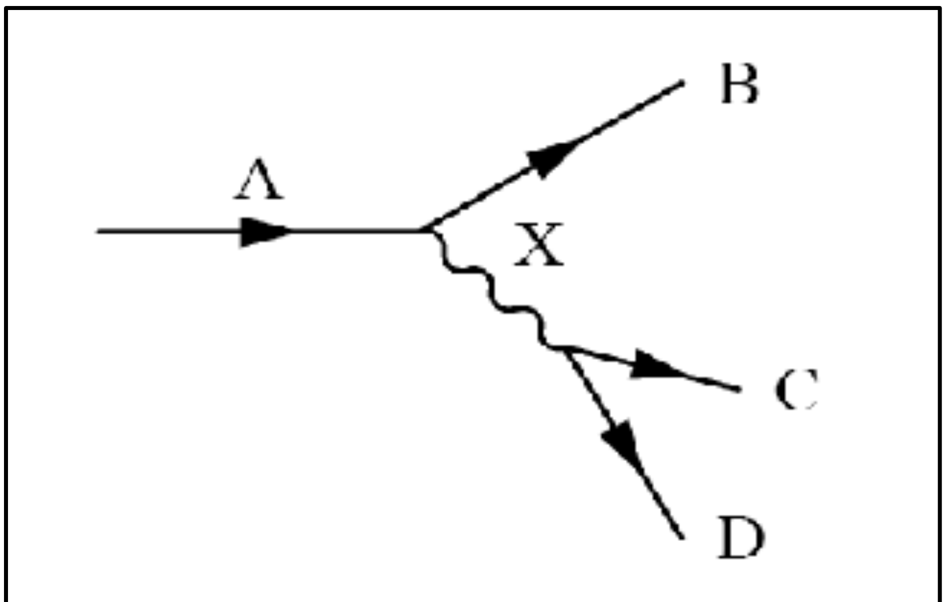


Διαγράμματα Feynman

Γενικές Ιδιότητες

ή της μορφής:

$$A \rightarrow B + C + D$$



A, B, C, D

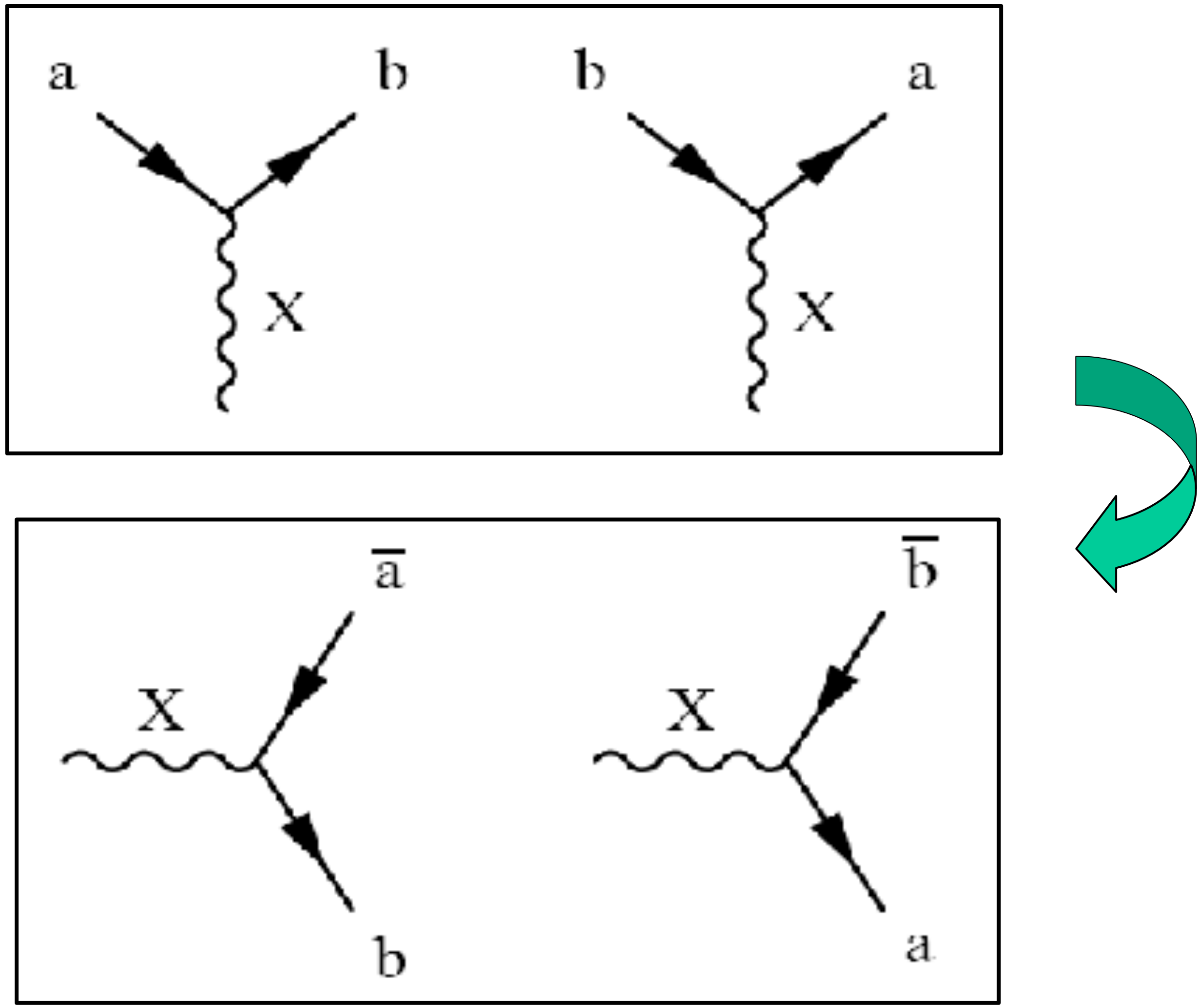
- Κουάρκ
- Λεπτόνια
- Αντικουάρκ
- Αντιλεπτόνια

X

- φωτόνιο (γ)
- γλουόνιο (g)
- W^+ W^- Z^0

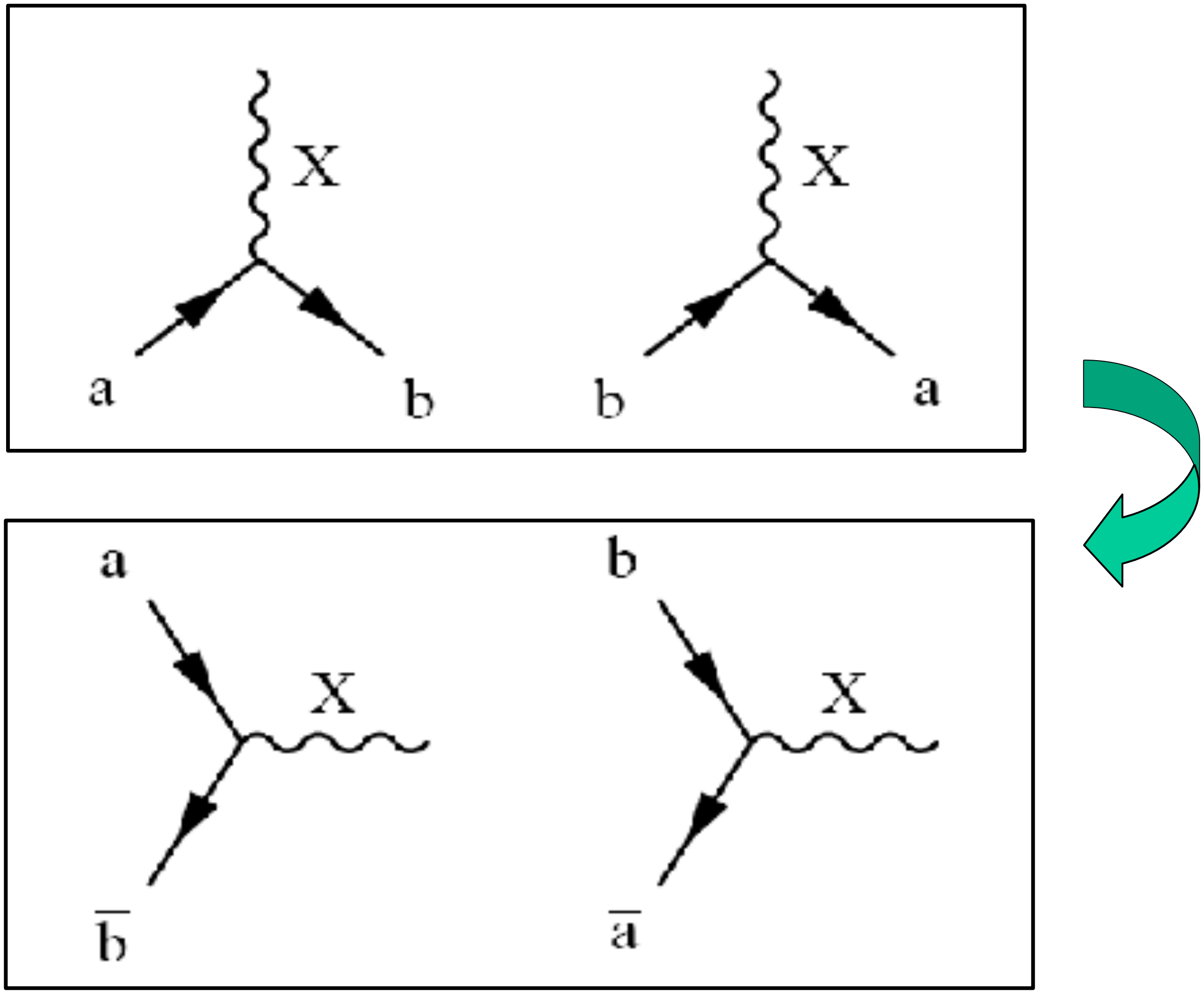
Διαγράμματα Feynman

Γενικές Ιδιότητες: Περιστροφή διαγραμμάτων



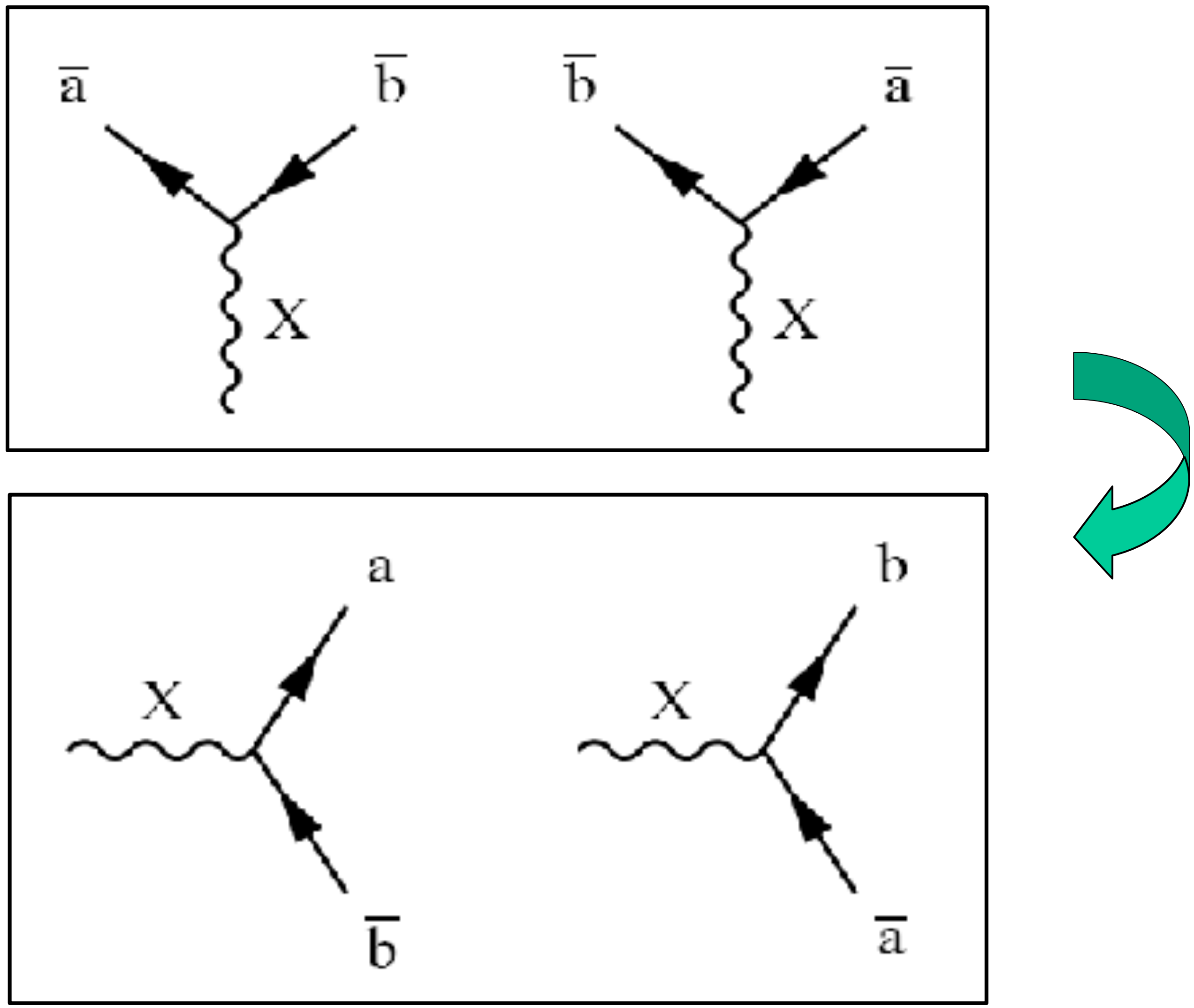
Διαγράμματα Feynman

<u>Γενικές Ιδιότητες:</u> Περιστροφή διαγραμμάτων



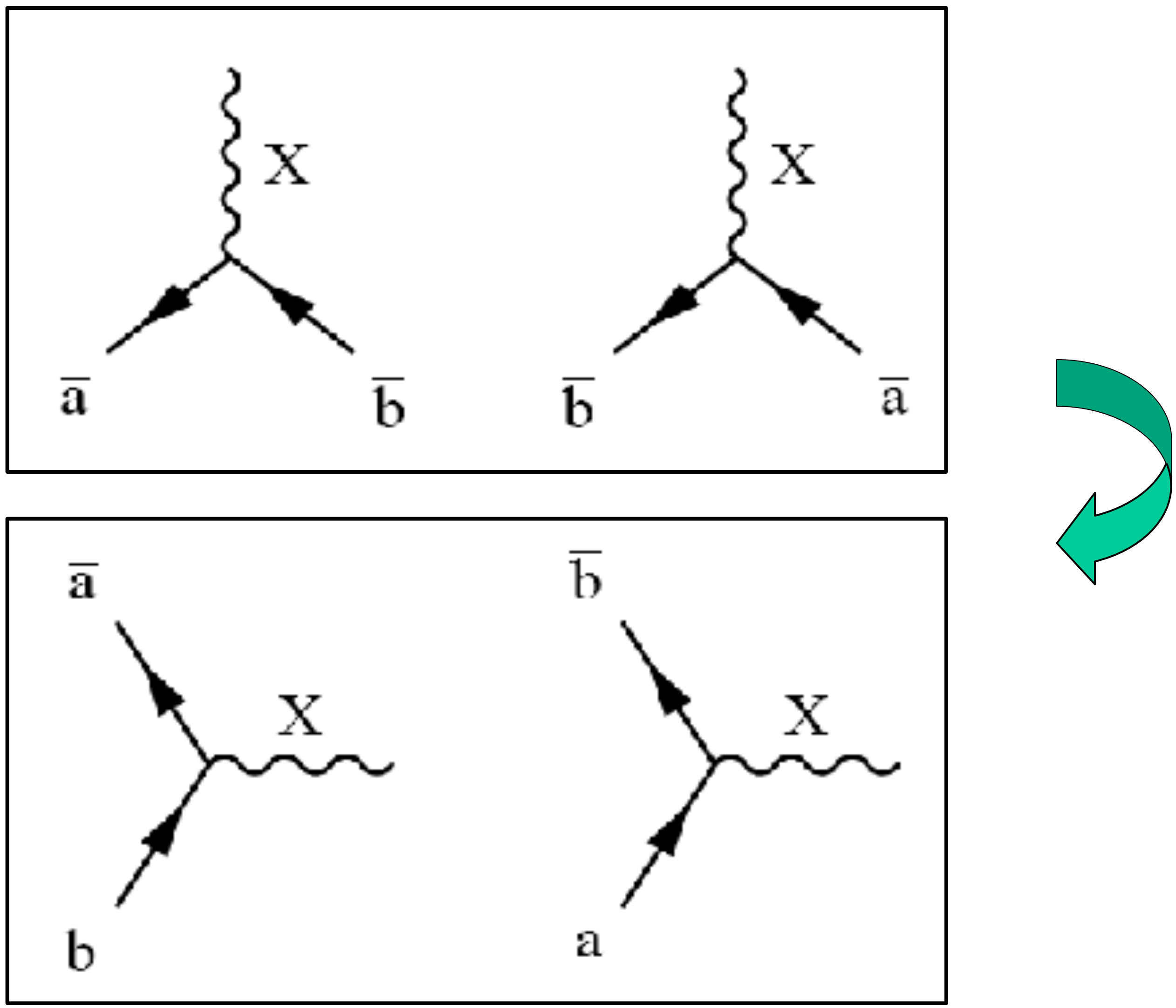
Διαγράμματα Feynman

Γενικές Ιδιότητες: Περιστροφή διαγραμμάτων



Διαγράμματα Feynman

Γενικές Ιδιότητες: Περιστροφή διαγραμμάτων



Διαγράμματα Feynman

Γενικές Ιδιότητες

Σε κάθε κορυφή διαγραμμάτων Feynman διατηρούνται:

- Το Φορτίο
- Ο Βαρυονικός Αριθμός
- Ο Λεπτονικός Αριθμός

Η γεύση του quark διατηρείται στις παρακάτω αλληλεπιδράσεις:

- Ισχυρές (X=gluon)
- Ηλεκτρομαγνητικές (X=φωτόνιο γ)
- Ασθενείς μόνο όταν $X = Z^0$ και όχι στην περίπτωση $X = W^+$ ή $X = W^-$

Διαγράμματα Feynman

Δυνάμεις

Ασθενείς δυνάμεις: Σε όλα τα Quarks και Λεπτόνια

Ηλεκτρομαγνητικές: Σε κάθε φορτισμένο σωματίδιο

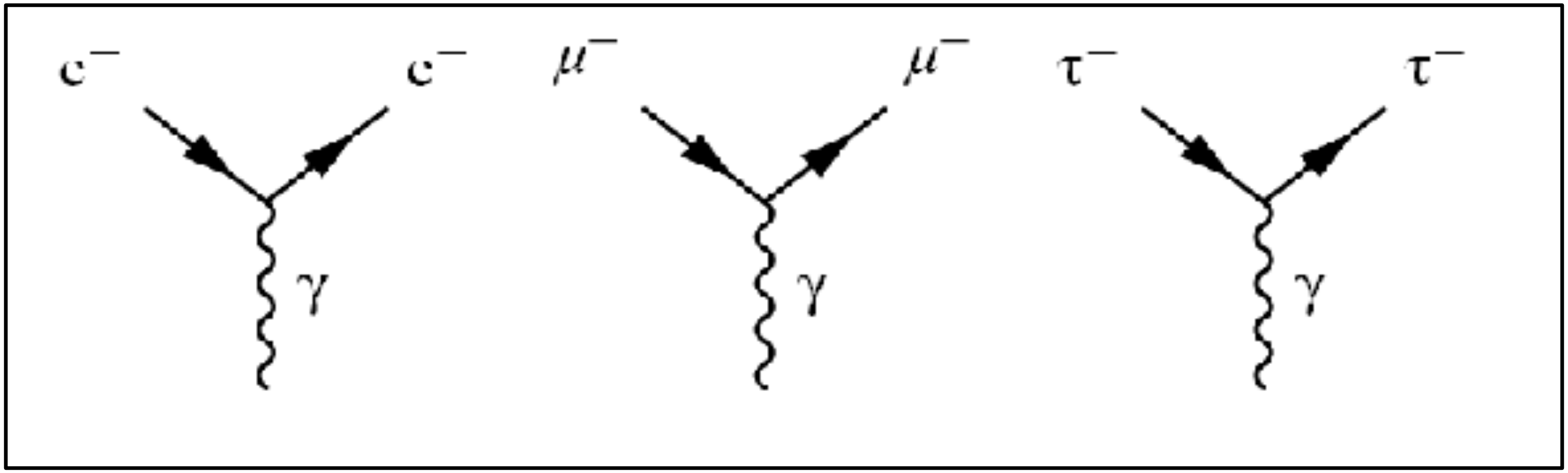
Ισχυρές: Μόνο μεταξύ των Quarks

	ΑΣΘΕΝΕΙΣ	ΗΜΓ	ΙΣΧΥΡΕΣ
Quarks	√	√	√
Φορτισμένα Λεπτόνια	√	√	✕
Ουδέτερα Λεπτόνια	√	✕	✕

Διαγράμματα Feynman

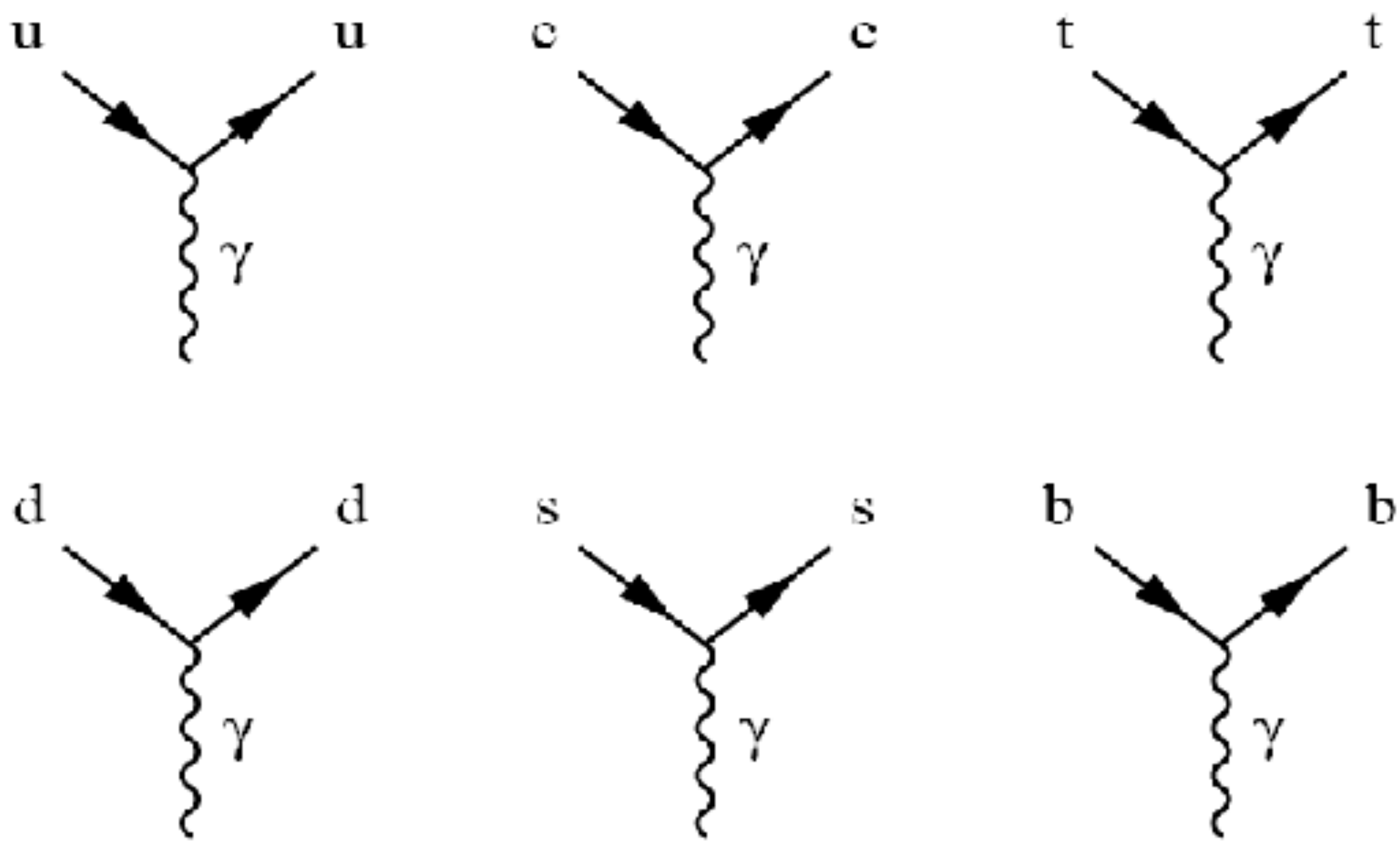
Ηλεκτρομαγνητικές Αλληλεπιδράσεις

X = φωτόνιο (γ) με σύζευξη μόνο σε φορτισμένο σωμάτιο



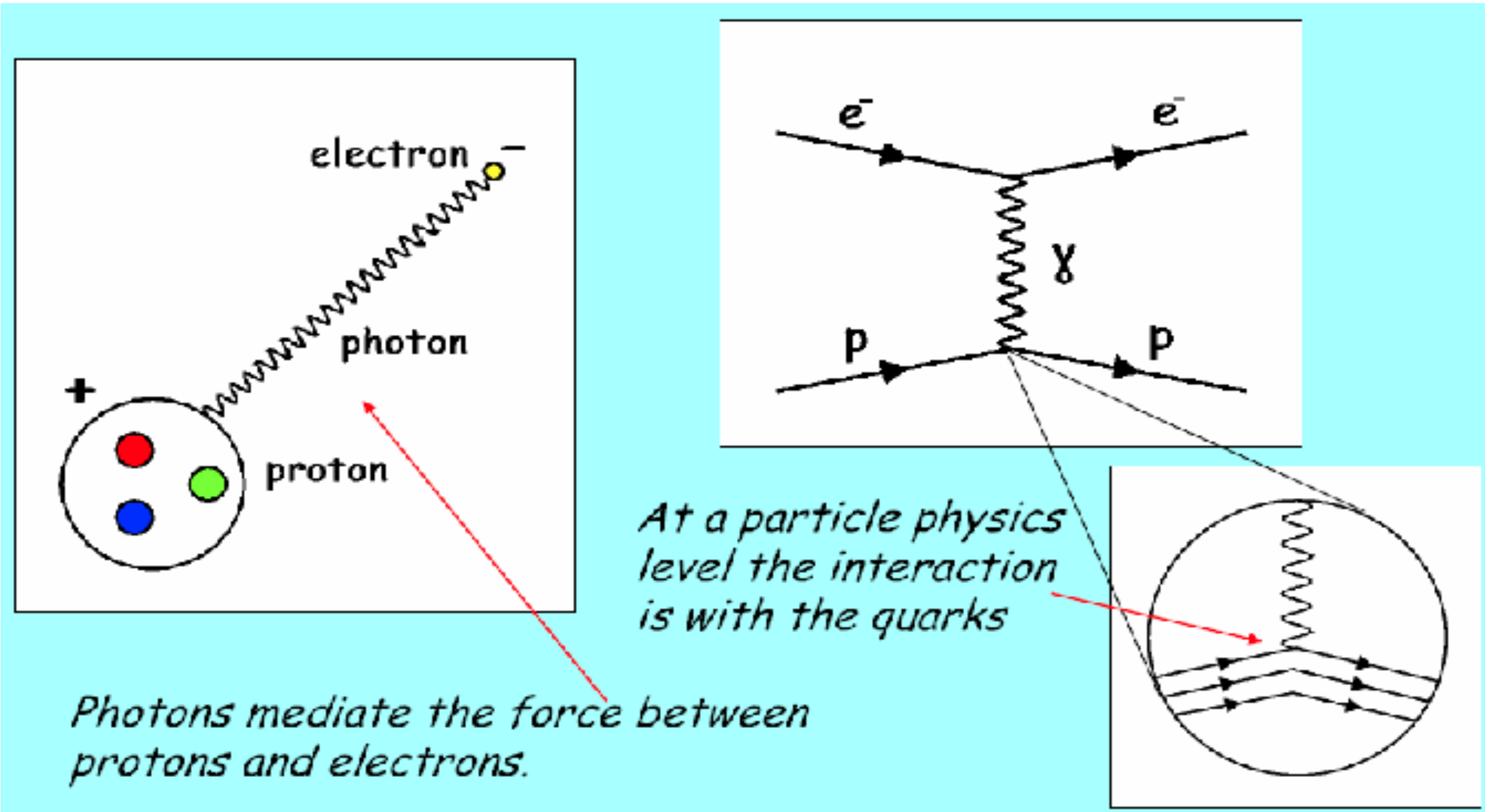
Διαγράμματα Feynman

Ηλεκτρομαγνητικές Αλληλεπιδράσεις



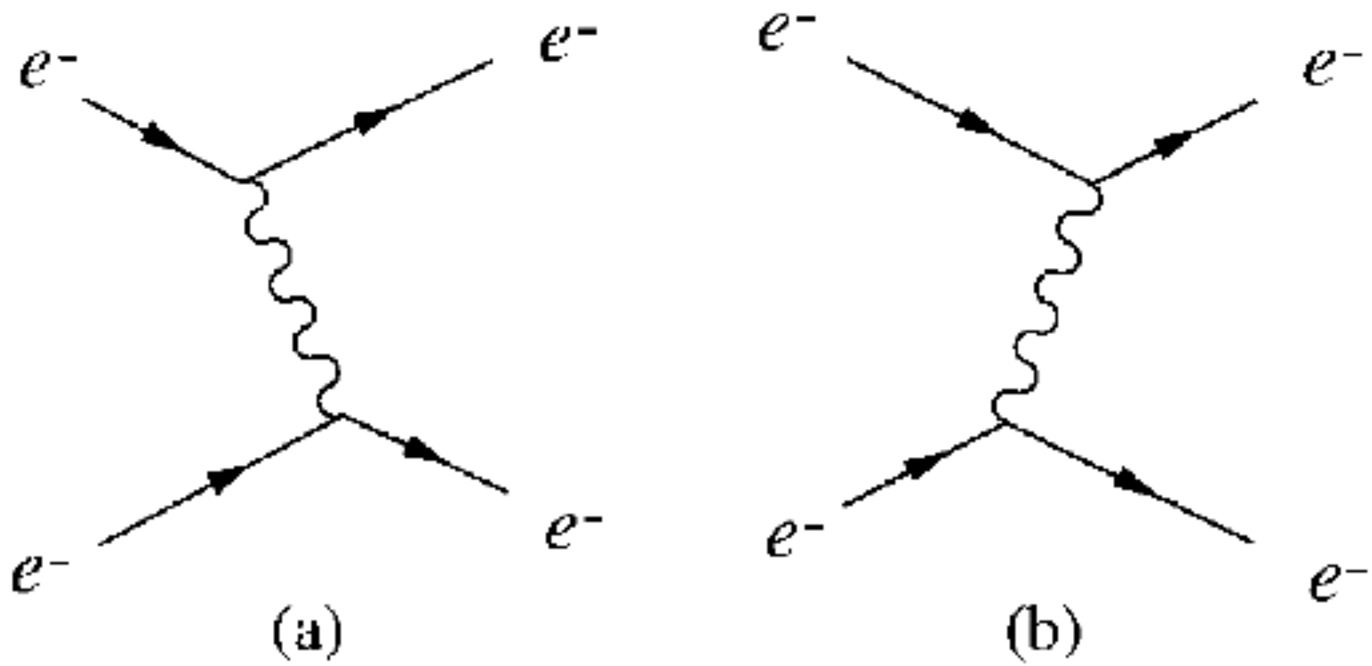
Διαγράμματα Feynman

Ηλεκτρομαγνητικές Αλληλεπιδράσεις



Διαγράμματα Feynman

Ηλεκτρομαγνητικές Αλληλεπιδράσεις

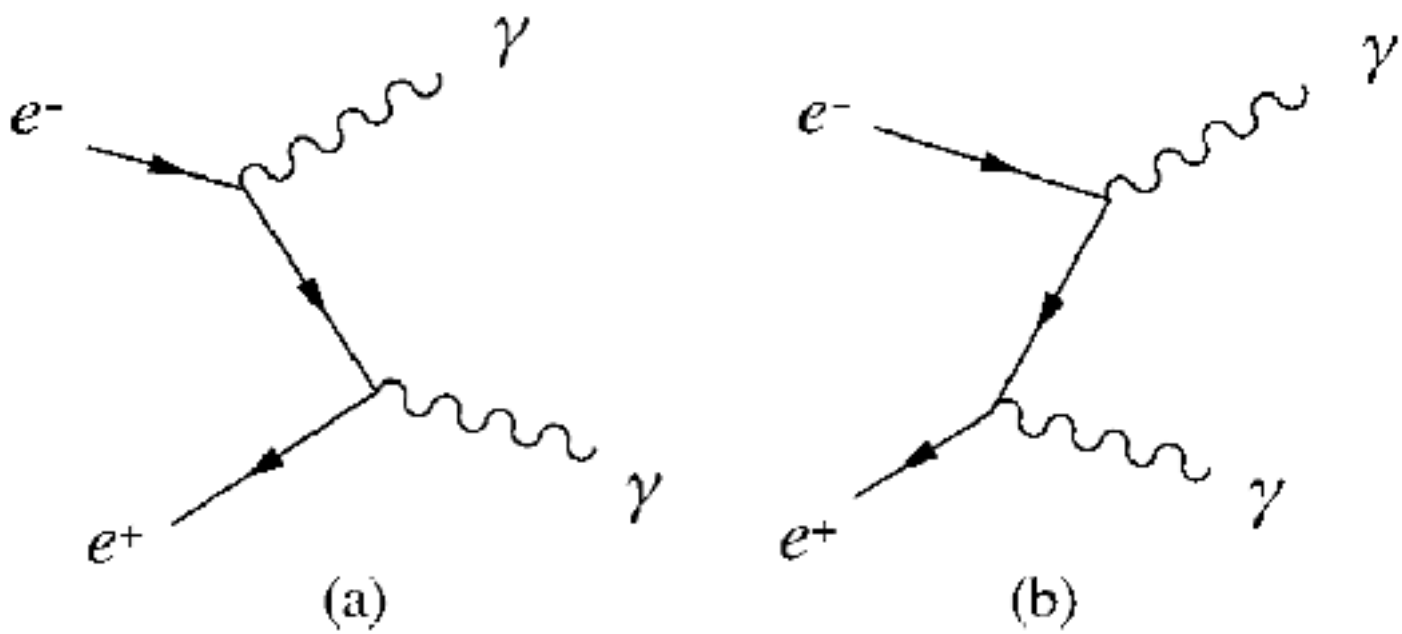


$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$$

Σκέδαση ηλεκτρονίου-ηλεκτρονίου με απλή ανταλλαγή φωτονίου.

Διαγράμματα Feynman

Ηλεκτρομαγνητικές Αλληλεπιδράσεις

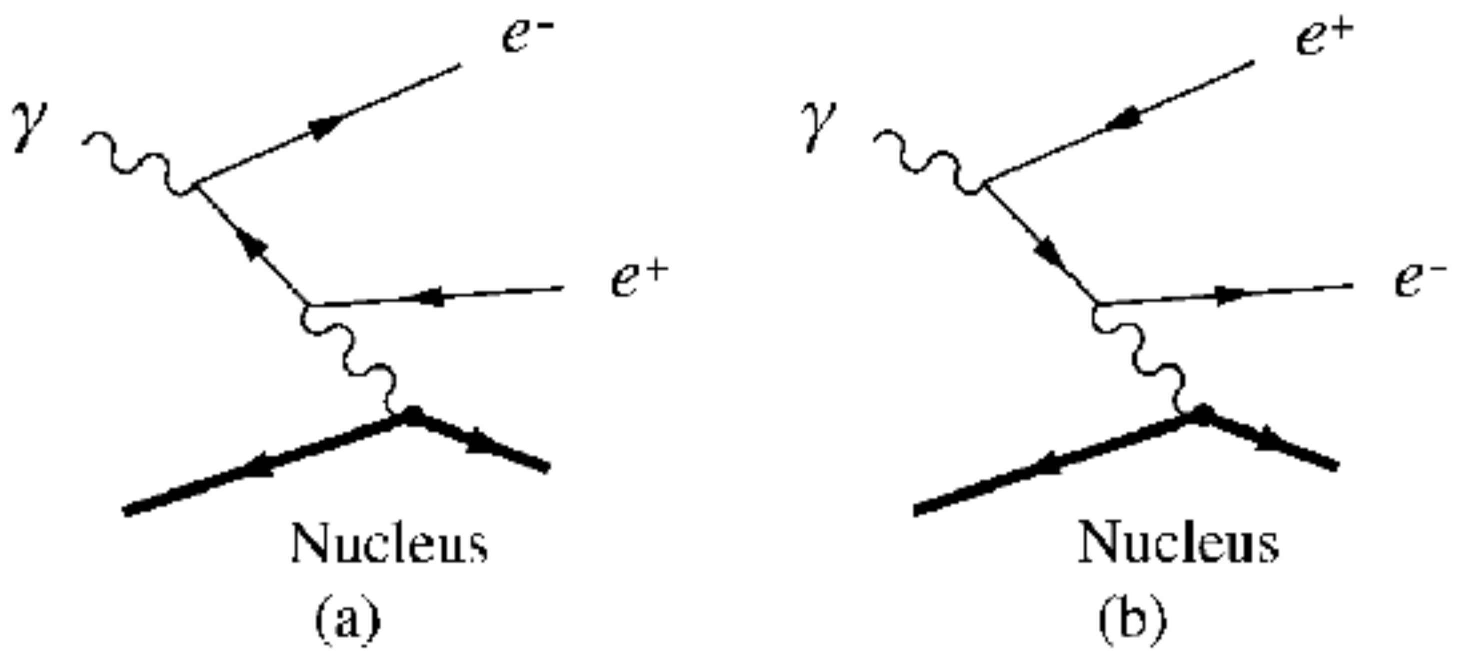


$$e^{-} + e^{+} \rightarrow \gamma + \gamma$$

Εξαΰλωση ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου σε δύο φωτόνια.

Διαγράμματα Feynman

Ηλεκτρομαγνητικές Αλληλεπιδράσεις



$$\gamma + \text{Nucleus}(Z, A) \rightarrow e^{-} + e^{+}$$

Δίδυμη γένεση.

Διαγράμματα Feynman

Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις

Στην ηλεκτρασθενή θεωρία των Glashow, Salam και Weinberg (1968) προτάθηκε η ισότητα της σταθεράς σύζευξης g των $W^{\pm}$ και Z^0 με τα λεπτόνια και τα κουάρκ, με την αντίστοιχη σταθερά των φωτονίων:

$$g = e$$

$$\boxed{f(q^2) = \frac{g^2}{q^2 + M_{W,Z}^2}}$$

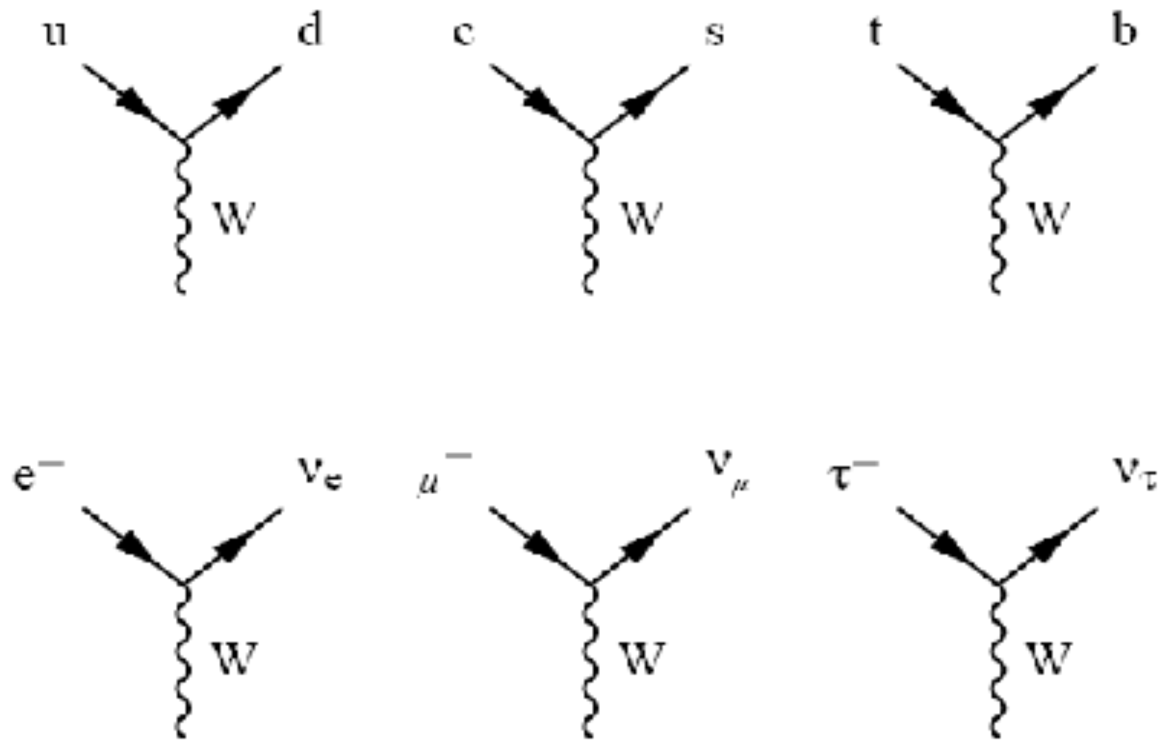
Για $q^2 \to 0$

$$\boxed{f(q^2 \to 0) = \frac{g^2}{M_{W,Z}^2} = G \approx 10^{-5}\, GeV^{-2}}$$

$$\boxed{M_{W,Z} = \frac{e}{\sqrt{G}} = \sqrt{\frac{4\pi a}{G}} \approx 90\, GeV}$$

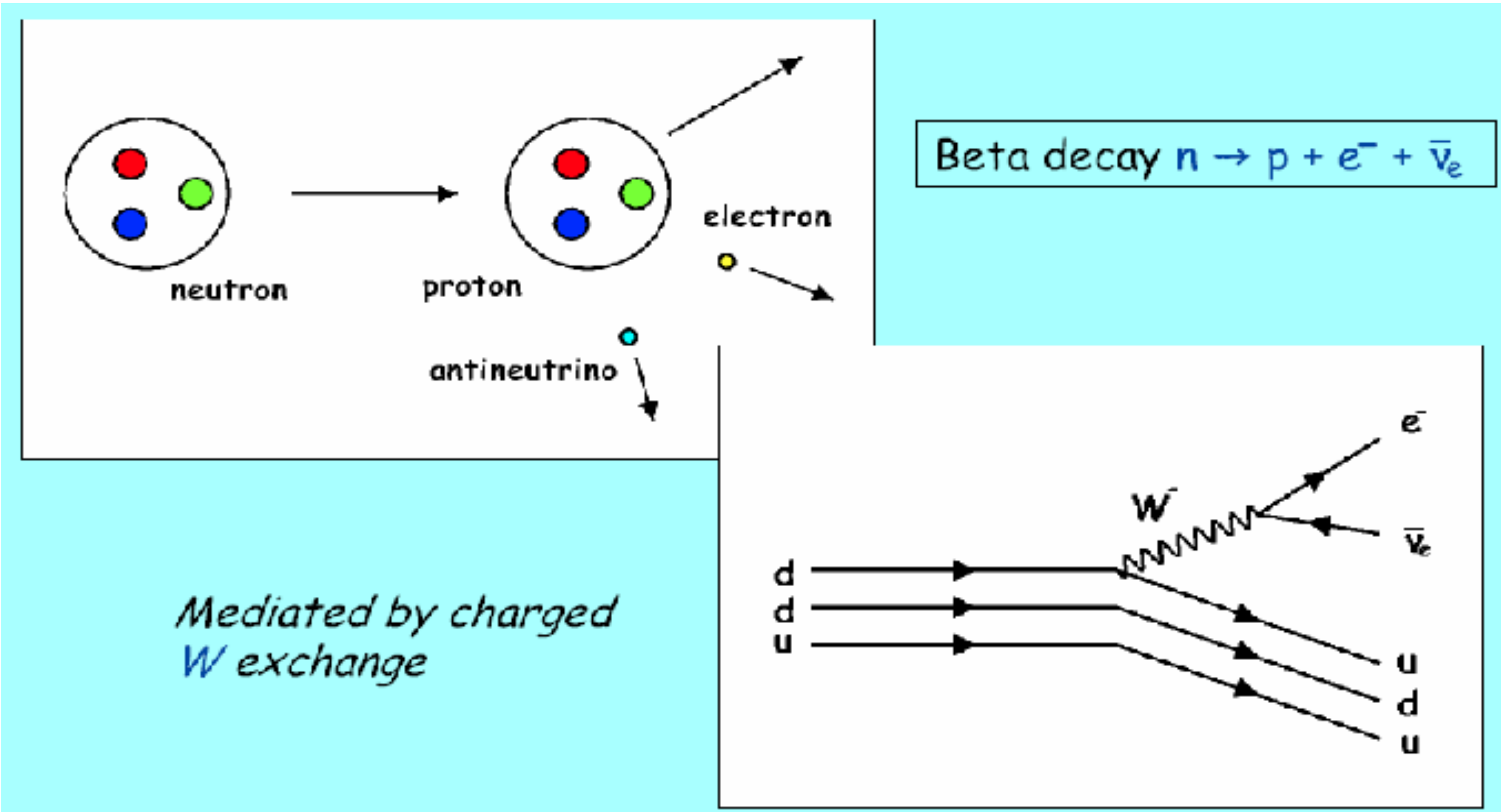
Διαγράμματα Feynman

Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις



Διαγράμματα Feynman

Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις

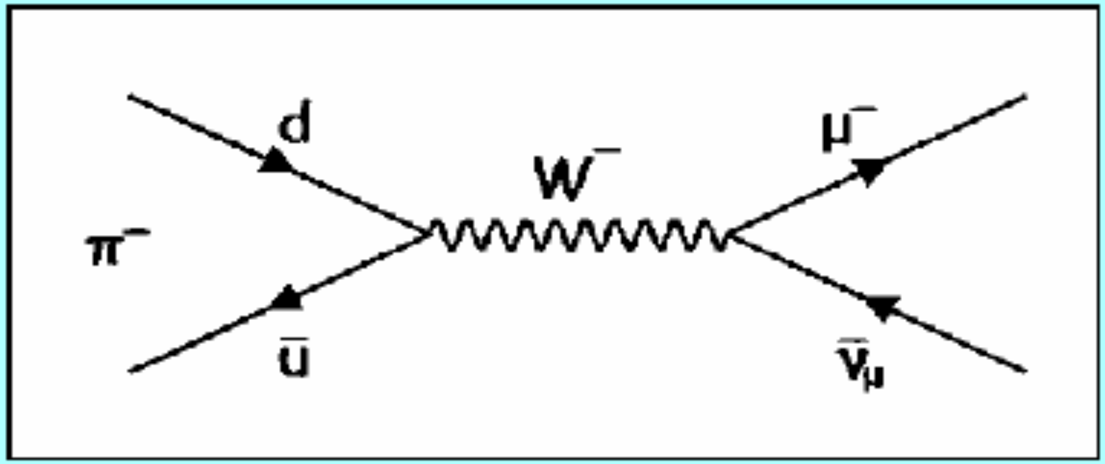


Διαγράμματα Feynman

Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις

$\Delta S = 0$ (No strangeness change)

$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$

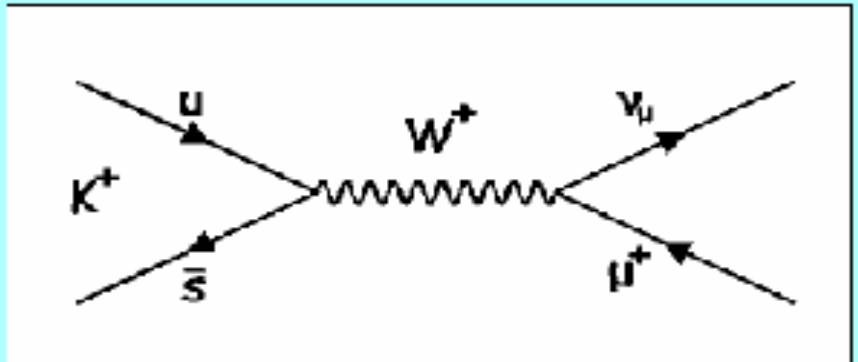


Διαγράμματα Feynman

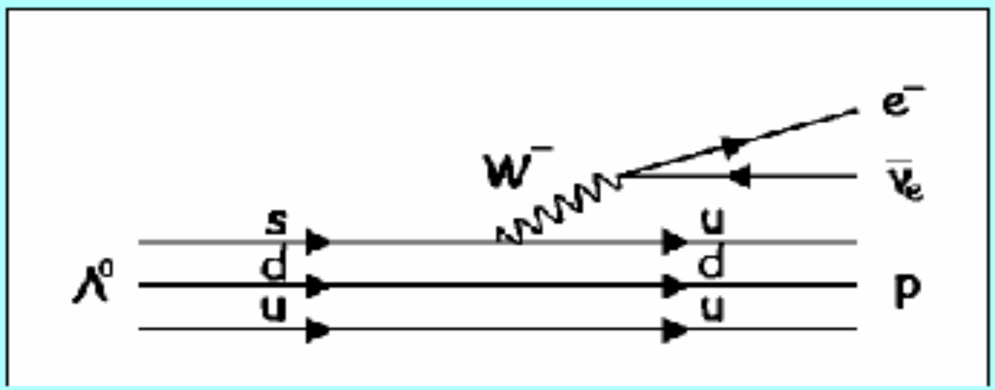
Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις

$\Delta S = 1$ (Strangeness changes)

$K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$

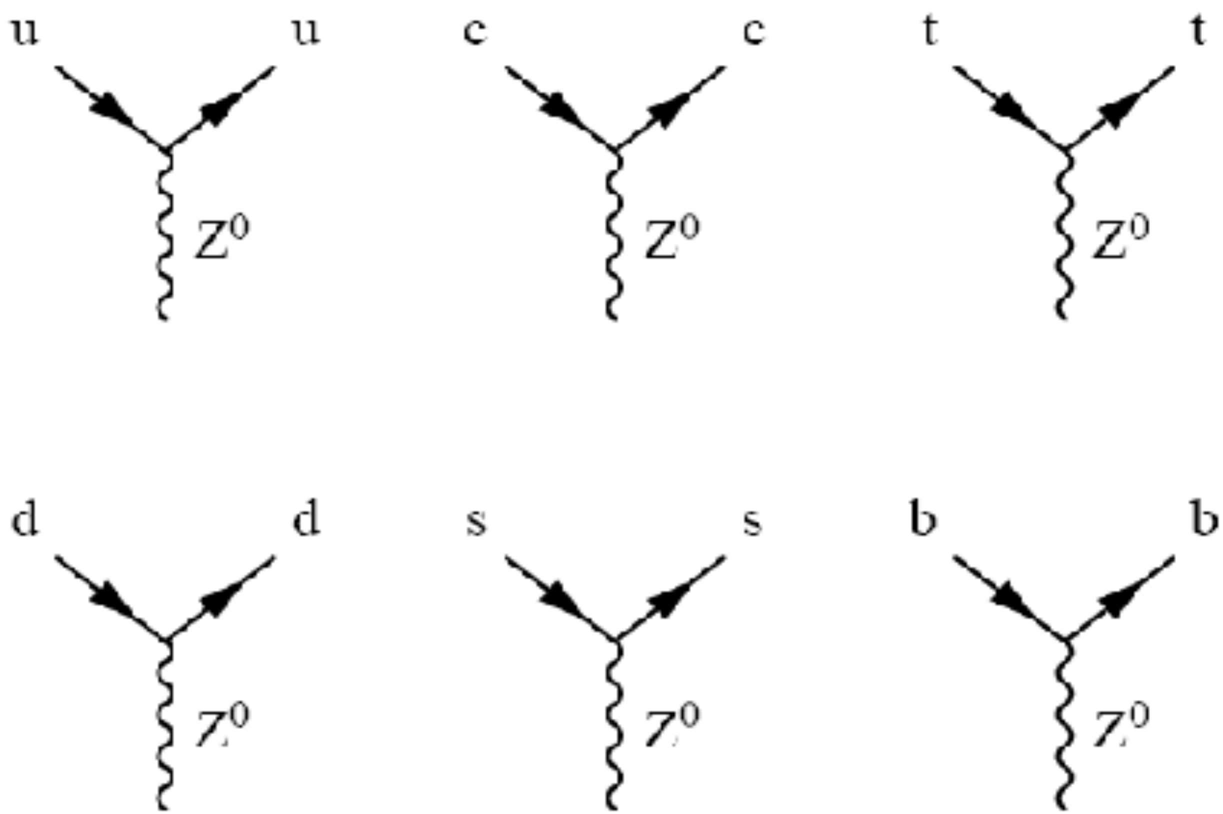


$\Lambda^0 \to p + e^- + \bar{\nu}_e$



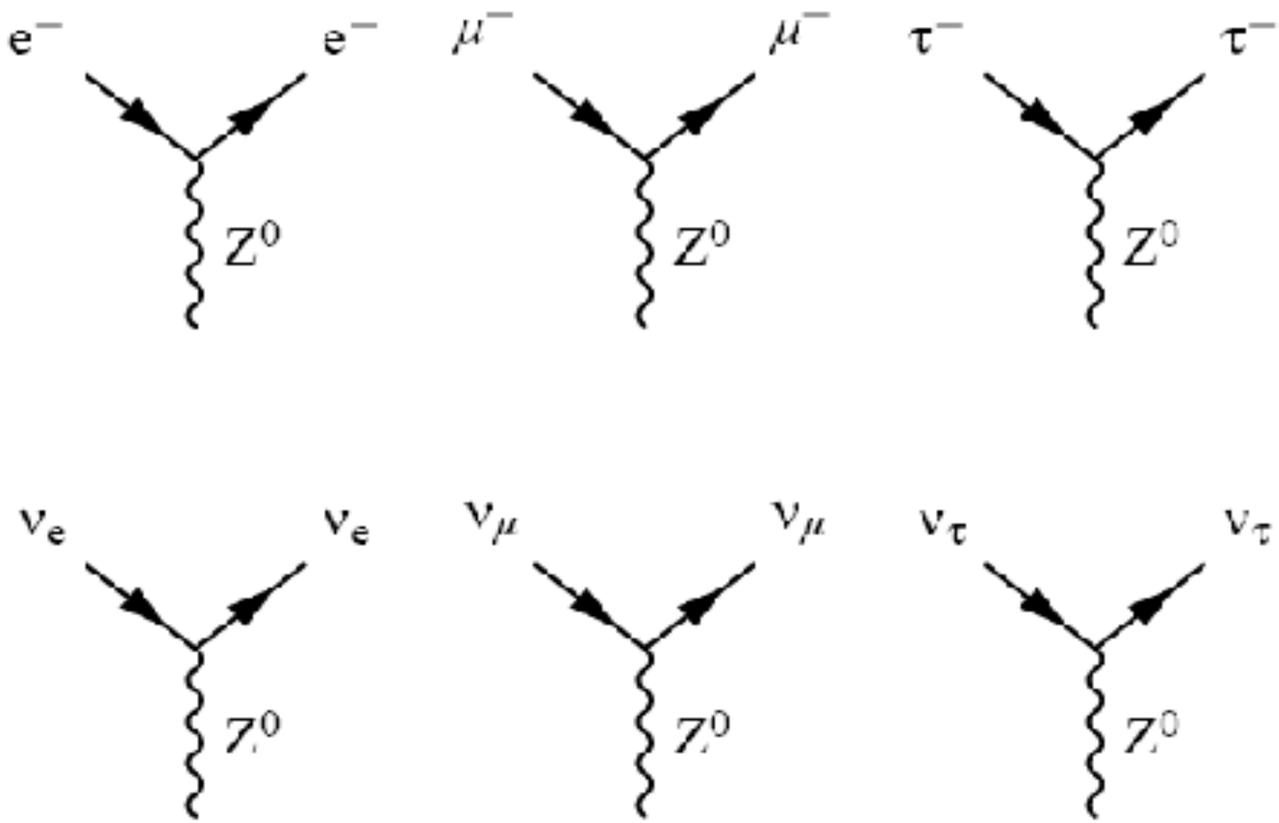
Διαγράμματα Feynman

Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις



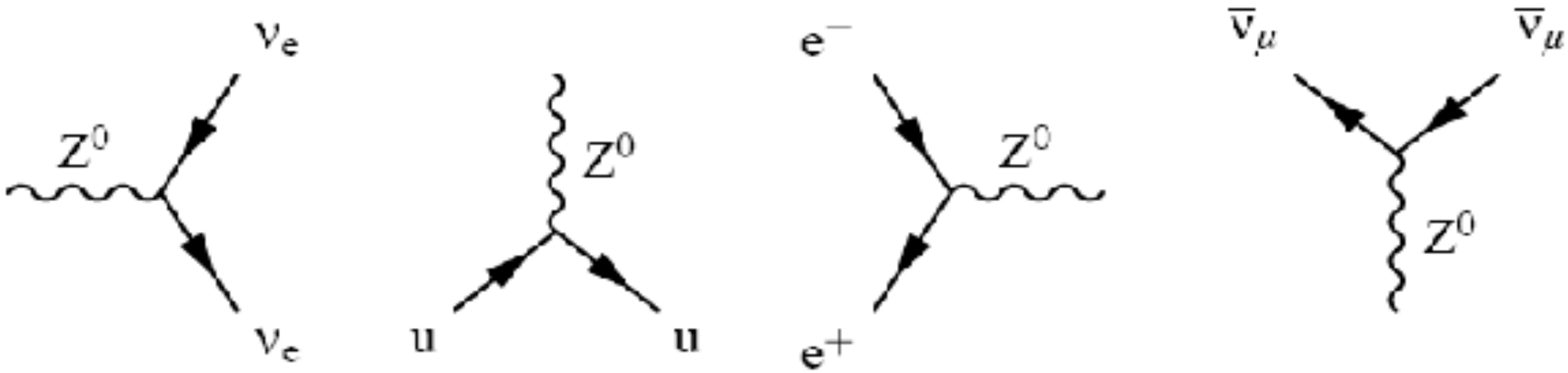
Διαγράμματα Feynman

Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις



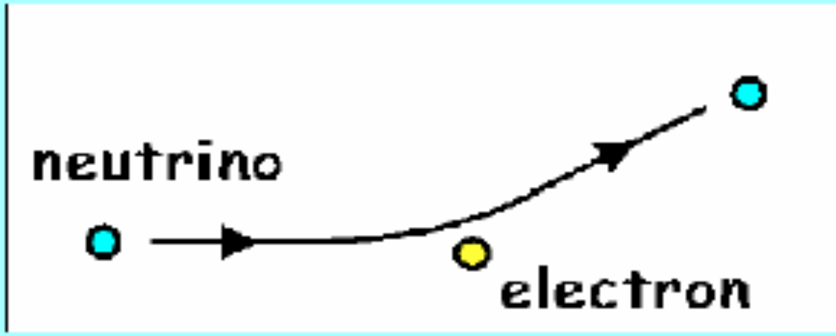
Διαγράμματα Feynman

Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις



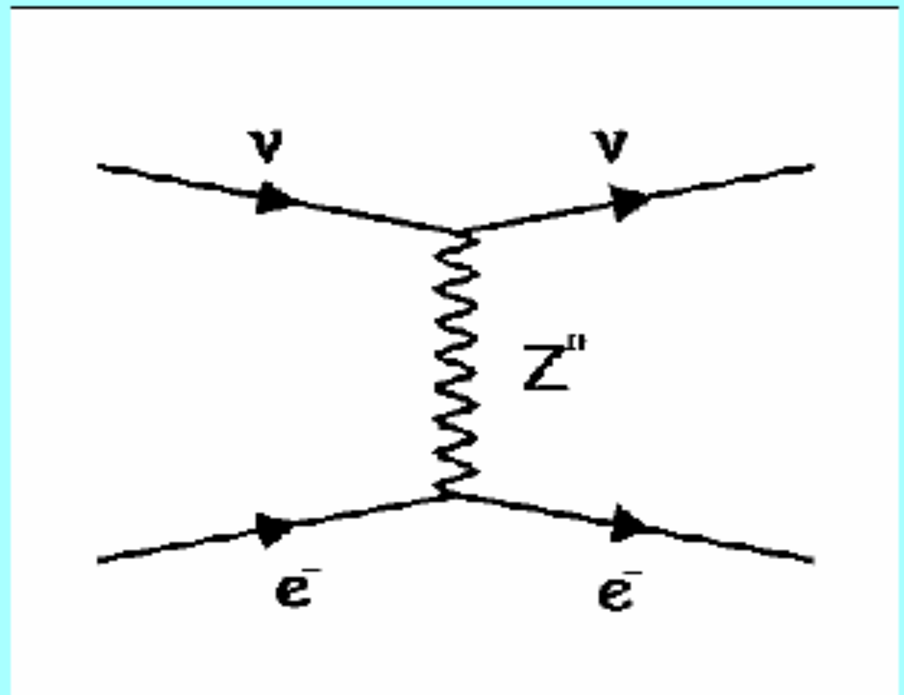
Διαγράμματα Feynman

Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις



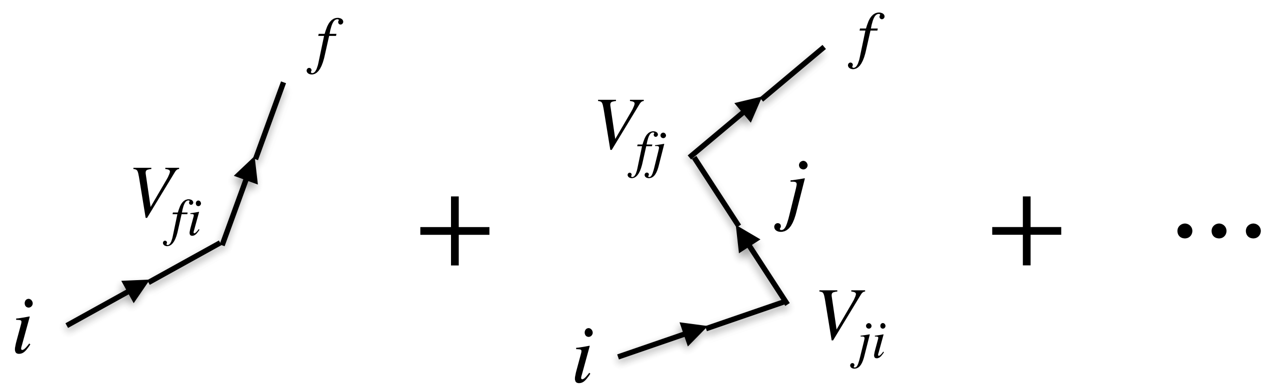
Neutrino scattering off an electron

Mediated by neutral Z exchange



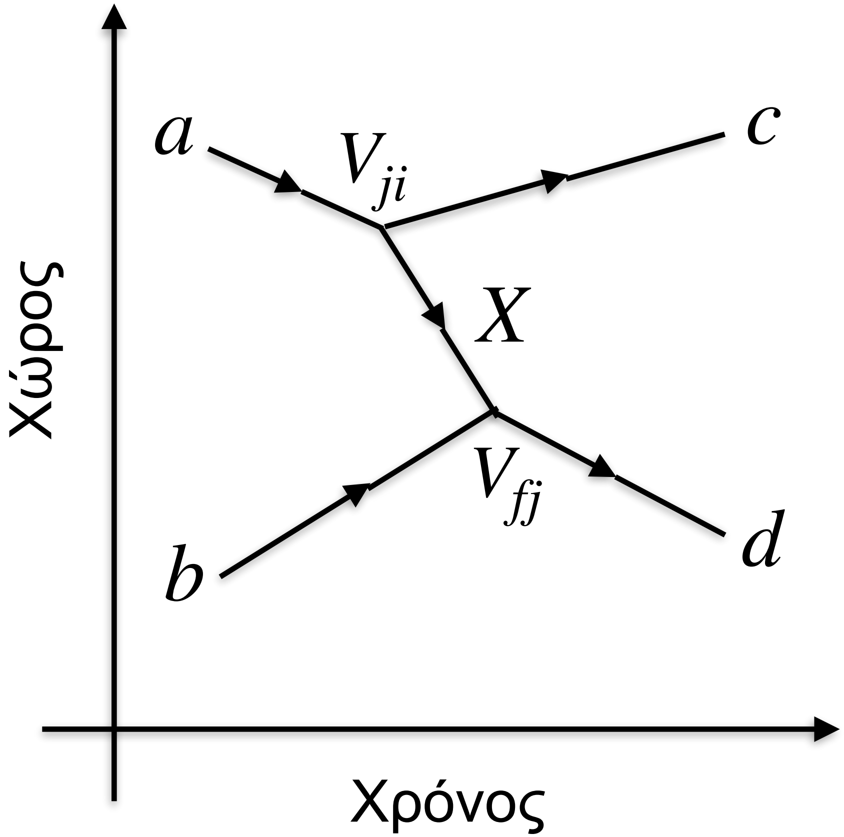
Σκέδαση σωματιδίων σε δεύτερη τάξη κβαντικής θεωρίας διαταραχών

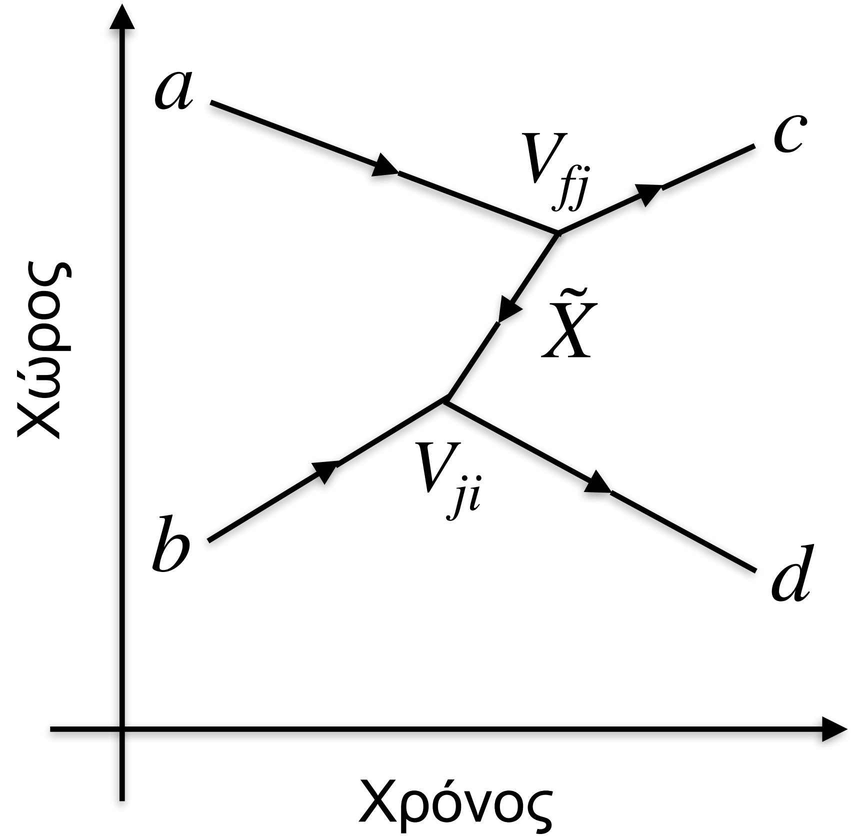
$$T_{fi} = \langle f | V | i \rangle + \sum_{j \neq i} \frac{\langle f | V | j \rangle \langle j | V | i \rangle}{E_i - E_j} + \cdots$$



Στην Κβαντομηχανική, η σκέδαση σωματιδίων περιγράφεται ως μετάβαση από μια αρχική κατάσταση *i* σε μια τελική κατάσταση *f* με διαδοχικές “στιγμιαίες” αλλαγές (“διαταραχές”) στην κινητική κατάσταση ενός σωματιδίου εξαιτίας κάποιας αλληλεπίδρασης *V*. Ανάμεσα στις αλλαγές αυτές, το σωματίδιο κινείται ελεύθερα.

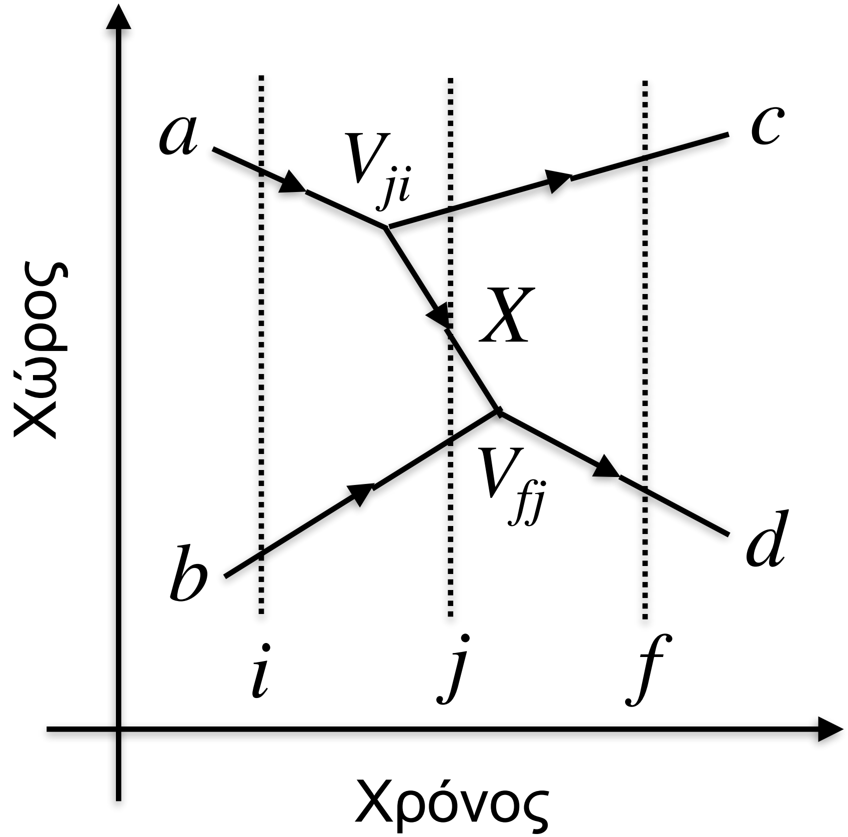
Χρονική διάταξη μιας ανταλλαγής σωματιδίου





Στην Κβαντομηχανική, απαιτείται τα πλάτη πιθανότητας και των δύο χρονο-διατάξεων να προστεθούν ως "δυνατά ενδεχόμενα" πραγματοποίησης της διεργασίας για να έχει το συνολικό πλάτος μετάβασης $a + b \rightarrow c + d$ φυσικό νόημα.

Πλάτος μετάβασης σε δεύτερη τάξη διαταραχών



Το σωματίδιο X εκπέμπεται από το a → η ενέργεια δεν διατηρείται ($E_i \neq E_j$) για ένα διάστημα Δt συμβατό με την αρχή της αβεβαιότητας, μέχρι το X να απορροφηθεί από το σωματίδιο b.

Η ορμή διατηρείται στην εκπομπή του X.

Το X ικανοποιεί τη συνθήκη "επί του φλοιού μάζας": $E_X^2 = \vec{p}_X^{\,2} + m_X^2$.

$$T_{fi}^{ab} = \frac{\langle f|V|j\rangle\langle j|V|i\rangle}{E_i - E_j} = \frac{\langle d|V|X+b\rangle\langle c+X|V|a\rangle}{(E_a+E_b)-(E_c+\underbrace{E_X+E_b}_{E_d})}$$

Πλάτος μετάβασης σε δεύτερη τάξη διαταραχών

Σχετικιστικά συναλλοίωτη κανονικοποίηση:

$$V_{nl} = \mathscr{M}_{nl} \prod_k (2E_k)^{-1/2}$$

$$\hbar = c = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{ji} = \langle c + X | V | a \rangle = \dfrac{\mathscr{M}_{a \to c+X}}{(2E_a 2E_c 2E_X)^{1/2}} = \dfrac{g_a}{(2E_a 2E_c 2E_X)^{1/2}} \\ V_{fj} = \langle d | V | X + b \rangle = \dfrac{\mathscr{M}_{X+b \to d}}{(2E_X 2E_b 2E_d)^{1/2}} = \dfrac{g_b}{(2E_X 2E_b 2E_d)^{1/2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad T_{fi}^{ab} = \frac{1}{2E_X} \cdot \frac{1}{(2E_a 2E_b 2E_c 2E_d)^{1/2}} \cdot \frac{g_a g_b}{E_a - E_c - E_X}$$

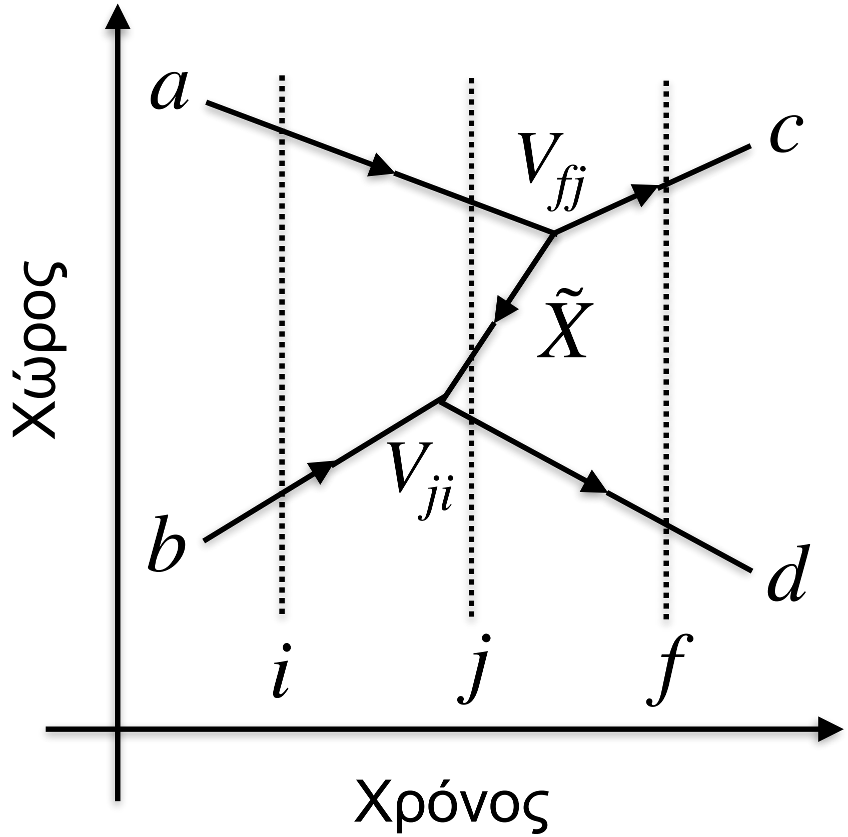
$$\mathscr{M}_{fi}^{ab} = (2E_a 2E_b 2E_c 2E_d)^{1/2} T_{fi}^{ab} = \frac{1}{2E_X} \cdot \frac{g_a g_b}{E_a - E_c - E_X}$$

Πλάτος μετάβασης σε δεύτερη τάξη διαταραχών

Το σωματίδιο X εκπέμπεται από το b → η ενέργεια δεν διατηρείται ($E_i \neq E_j$) για ένα διάστημα Δt συμβατό με την αρχή της αβεβαιότητας, μέχρι το X να απορροφηθεί από το σωματίδιο a.

Η ορμή διατηρείται στην εκπομπή του X.

Το X ικανοποιεί τη συνθήκη "επί του φλοιού μάζας": $E_X^2 = \vec{p}_X^{\,2} + m_X^2$.



$$T_{fi}^{ba} = \frac{\langle f | V | j \rangle \langle j | V | i \rangle}{E_i - E_j} = \frac{\langle c | V | a + X \rangle \langle X + d | V | b \rangle}{(E_a + E_b) - (\underbrace{E_a + E_X}_{E_c} + E_d)}$$

Πλάτος μετάβασης σε δεύτερη τάξη διαταραχών

$$V_{ji} = \langle X + d \,|\, V \,|\, b \rangle = \frac{\mathcal{M}_{b\to X+d}}{(2E_b 2E_d 2E_X)^{1/2}} = \frac{g_b}{(2E_b 2E_d 2E_X)^{1/2}}$$

$$V_{fj} = \langle c \,|\, V \,|\, a + X \rangle = \frac{\mathcal{M}_{a+X\to c}}{(2E_X 2E_a 2E_c)^{1/2}} = \frac{g_a}{(2E_X 2E_a 2E_c)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \qquad T_{fi}^{ba} = \frac{1}{2E_X} \cdot \frac{1}{(2E_a 2E_b 2E_c 2E_d)^{1/2}} \cdot \frac{g_b g_a}{E_b - E_d - E_X}$$

$$\mathcal{M}_{fi}^{ba} = (2E_a 2E_b 2E_c 2E_d)^{1/2} T_{fi}^{ba} = \frac{1}{2E_X} \cdot \frac{g_a g_b}{E_b - E_d - E_X}$$

Πλάτος μετάβασης σε δεύτερη τάξη διαταραχών

$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^{ab} + \mathcal{M}_{fi}^{ba} = \frac{g_a g_b}{2E_X}\left(\frac{1}{E_a - E_c - E_X} + \frac{1}{\underbrace{E_b - E_d}_{E_c - E_a} - E_X}\right)$$

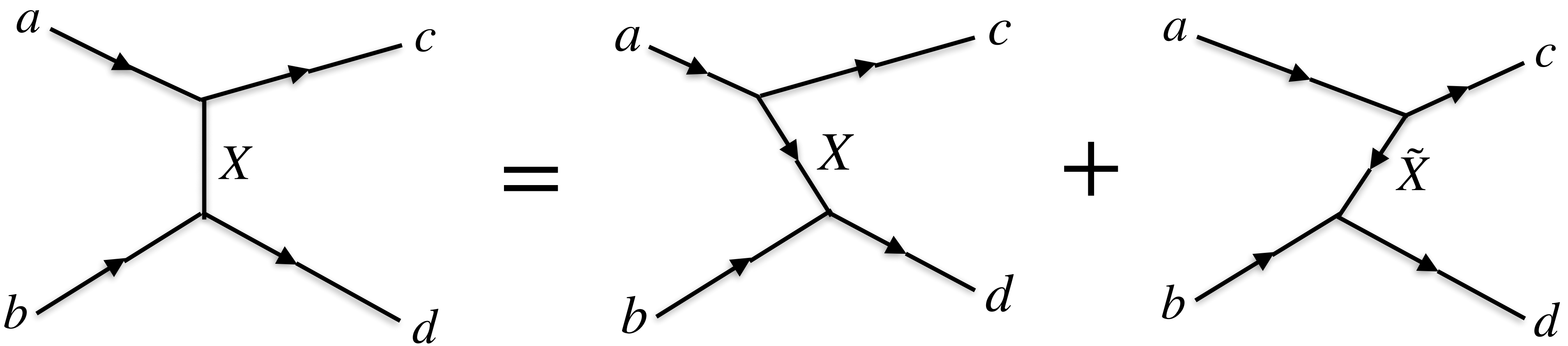
$$= \frac{g_a g_b}{2E_X}\left(\frac{1}{E_a - E_c - E_X} - \frac{1}{E_a - E_c + E_X}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c)^2 - E_X^2} \\ E_X^2 &= \vec{p}_X^{\,2} + m_X^2 = (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 + m_X^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \mathcal{M}_{fi} = \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c)^2 - (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 - m_X^2}$$

$$= \frac{g_a g_b}{(p_a - p_c)^2 - m_X^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_a g_b}{q^2 - m_X^2}}$$

Εικονικά σωματίδια και διαγράμματα Feynman



Με τον όρο **διάγραμμα Feynman** εννοείται το άθροισμα των πλατών μετάβασης που αντιστοιχούν στα δύο χρονικά διατεταγμένα διαγράμματα σκέδασης → το σωματίδιο X δεν έχει χρονική κατεύθυνση. Μεταφέρει 4-ορμή q^μ ανάμεσα στα 4 αλληλεπιδρώντα σωματίδια, η οποία διατηρείται (δηλ. και η ενέργεια και η ορμή). Το X **δεν ικανοποιεί τη συνθήκη** $E_X^2 = \vec{p}_X^{\,2} + m_X^2$, δηλ. κινείται "εκτός φλοιού μάζας" και γι' αυτό χαρακτηρίζεται **εικονικό**.

Το μη σχετικιστικό όριο σε πρώτη τάξη διαταραχών

Το σωματίδιο σκεδάζεται χωρίς μεταβολή της ενέργειάς του μέσα σε κάποιο δυναμικό:

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c)^2 - (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 - m_X^2} \quad \longrightarrow \quad M_{fi} = \frac{-g_a g_b}{(\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 + m_X^2} = \frac{-g_a g_b}{\vec{q}^{\,2} + m_X^2}$$

Εφόσον $\Delta E = |E_a - E_c| = 0$, η αβεβαιότητα στο χρόνο Δt γίνεται άπειρη, δηλαδή το δυναμικό πρέπει να είναι στατικό: $V = V(\vec{r})$

Στην περίπτωση αυτή το πλάτος μετάβασης υπολογίζεται σε πρώτη τάξη διαταραχών:

$$M_{fi} = \langle f \,|\, V(\vec{r}) \,|\, i \rangle = \int \psi_f^* V(\vec{r}) \psi_i d^3 r = -\, g_a \int e^{-i\vec{p}_c \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) e^{i\vec{p}_a \cdot \vec{r}} d^3 r = -\, g_a \int V(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3 r$$

Δηλαδή ανάγεται σε μετασχηματισμό Fourier του δυναμικού από το χώρο θέσης στο χώρο ορμής του σωματιδίου.

Μετασχηματισμός Fourier κεντρικού δυναμικού

$$V(\vec{r}) = V(r) \Rightarrow M_{fi} = g_a \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} V(r) e^{iqr\cos\theta} r^2 dr d\cos\theta d\phi$$

Σφαιρικές συνεταγμένες

Μετά τις γωνιακές ολοκληρώσεις:

$$= 2\pi g_a \int_0^\infty V(r) r^2 \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} dr = 4\pi g_a \int_0^\infty V(r) r^2 \frac{\sin qr}{qr} dr$$

Για δυναμικό που ενισχύεται αντίστροφα με την απόσταση από το κέντρο όταν αυτή είναι μικρή και σβήνει εκθετικά όταν είναι μεγάλη:

$$V(r) = \frac{g_b}{4\pi} \cdot \frac{e^{-m_X r}}{r} \Rightarrow M_{fi} = \frac{g_a g_b}{q} \int_0^\infty e^{-m_X r} \sin qr dr = \frac{g_a g_b}{q^2} \int_0^\infty e^{-(m_X/q)x} \sin x dx$$

Πρώτη παραγοντική ολοκλήρωση:

$$= \frac{g_a g_b}{q^2} \left(1 - \frac{m_X}{q} \int_0^\infty e^{-(m_X/q)x} \cos x dx \right)$$

Δεύτερη παραγοντική ολοκλήρωση:

$$= \frac{g_a g_b}{q^2} \left(1 - \frac{m_X^2}{q^2} \int_0^\infty e^{-(m_X/q)x} \sin x dx \right) = \frac{g_a g_b}{q^2} \left(1 - \frac{m_X^2}{g_a g_b} M_{fi} \right)$$

Το δυναμικό Yukawa

$$V(r) = \frac{g_a g_b}{4\pi} \cdot \frac{e^{-m_X r}}{r} \quad \Rightarrow \quad M_{fi} = \frac{g_a g_b}{|\vec{q}|^2 + m_X^2}$$

Για ένα βαρύ ανταλλασσόμενο σωματίδιο, π.χ. $X = \pi$, W, Z, … η εμβέλεια του δυναμικού είναι μικρή ➞ **δυναμικό Yukawa**

Για ένα ανταλλασσόμενο σωματίδιο χωρίς μάζα, π.χ. $X = \gamma$, η εμβέλεια του δυναμικού $V(r) \sim 1/r$ είναι άπειρη ➞ **δυναμικό Coulomb**

Στο δυναμικό Coulomb g_a και g_b είναι αντίστοιχα τα φορτία του σκεδαζόμενου σωματίου και του κέντρου σκέδασης: $V(r) = q_a q_b / (4\pi r)$

Το δυναμικό Yukawa

Είναι λύση της **εξίσωσης Klein-Gordon** με κεντρική συμμετρία:

$$\left.\begin{array}{l} E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2 \\ E \to i\partial/\partial t \\ \vec{p} \to -i\vec{\nabla} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \nabla^2\psi = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + m^2\psi \\ \psi = U(r)e^{-iEt} \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla^2 U(r) = (-E^2 + m^2)U(r)$$

Στο όριο που μηδενίζεται η ενέργεια E η οποία μεταφέρεται από το δυναμικό αλληλεπίδρασης που περιγράφει η εξίσωση Klein-Gordon:

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\nabla^2 U = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dU}{dr}\right)}_{\text{Σφαιρικές συνεταγμένες}} = m^2 U \Rightarrow \dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dU}{dr}\right) = m^2 r^2 U \\ U(r) = \dfrac{f(r)}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d^2 f}{dr^2} = m^2 f \Rightarrow f(r) = e^{\pm mr}$$

Η φυσικά αποδεκτή λύση μηδενίζεται στο άπειρο $\Rightarrow$ $\boxed{U(r) = \dfrac{e^{-mr}}{r}}$