ΦΥΣΙΚΗ III

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL

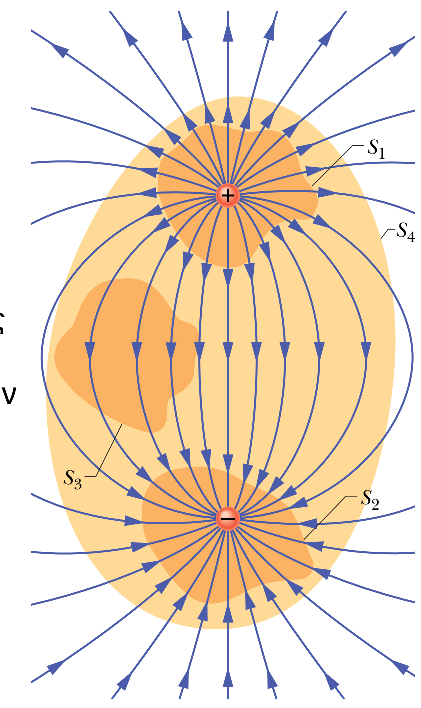
2021 — 2022

Ο νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_S}{\varepsilon_0}$$

Νόμος του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο.

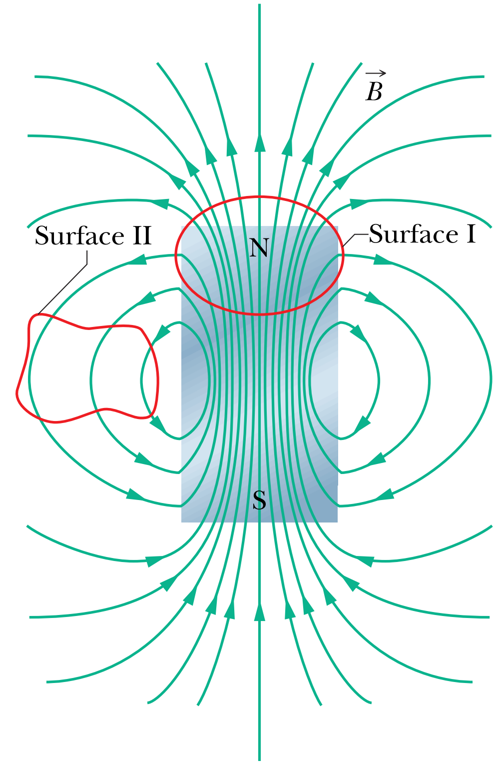
Πηγές ροής του πεδίου είναι τα ηλεκτρικά μονόπολα (φορτία).



$$\Phi_B = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \equiv 0$$

Νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο.

Δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα.



Ο νόμος Ampère-Maxwell

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

Νόμος του Faraday.

$$V_f - V_i = -\int_i^f \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}\Big|_{i=f} \neq 0 \ !$$

Αναιρεί το φυσικό νόημα του ηλεκτρικού δυναμικού: μόνο το στατικό ηλεκτρικό πεδίο είναι συντηρητικό.

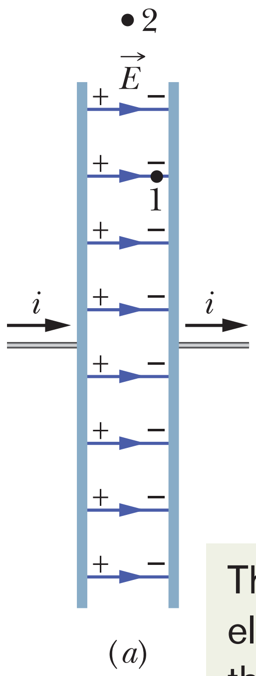
Νόμος του Ampère.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I_C \\ \displaystyle\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} \end{array}\right\} \Rightarrow \oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I_C + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

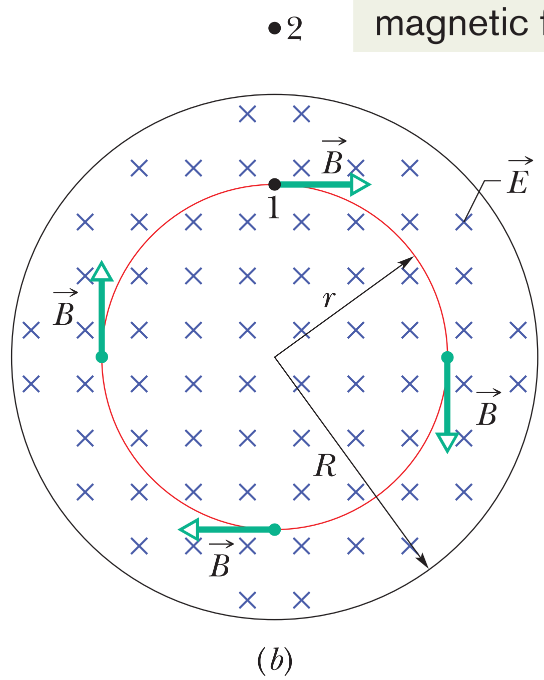
Διόρθωση του Maxwell από συμμετρία προς το νόμο του Faraday.

Νόμος Ampère-Maxwell.

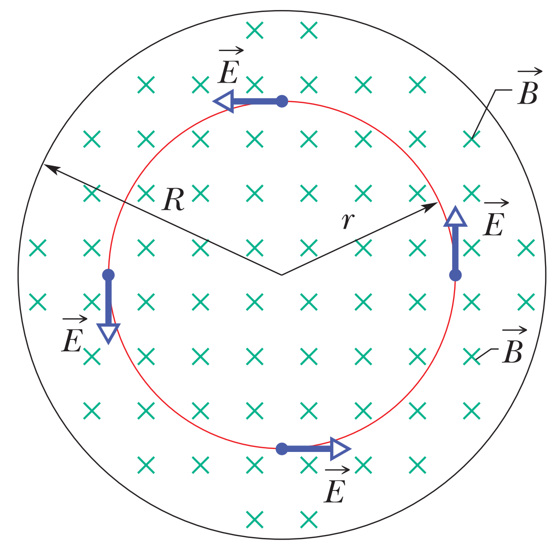
Η Φύση “αντιδρά” στις αλλαγές ροής των πεδίων



The changing of the electric field between the plates creates a magnetic field.



The induced $\vec{E}$ direction here is opposite the induced $\vec{B}$ direction in the preceding figure.



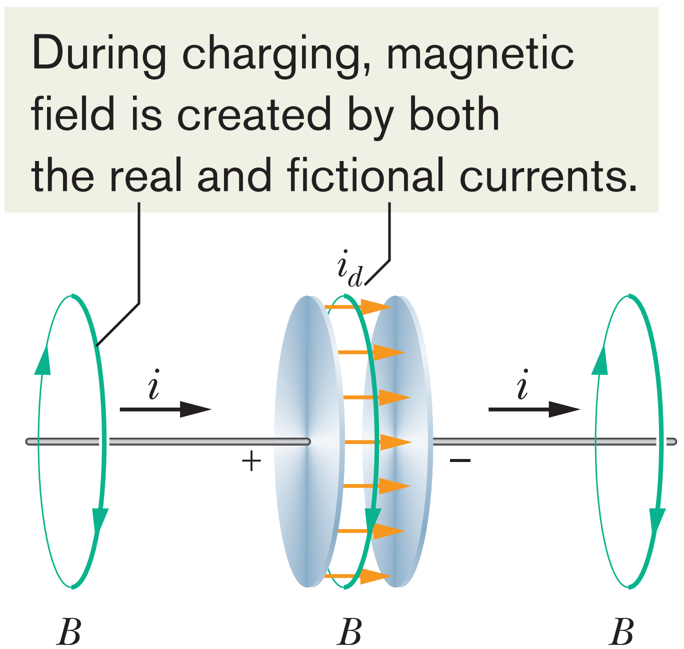
Εφαρμογή του νόμου Faraday: η φορά του ηλεκτρικού πεδίου είναι αντίθετη στη φορά των δεικτών του ρολογιού, λόγω του αρνητικού προσήμου στη χρονική παράγωγο της ροής του μαγνητικού πεδίου.

Εφαρμογή του νόμου Ampère-Maxwell κατά τη φόρτιση ενός πυκνωτή.

Το ρεύμα μετατόπισης

$$\boxed{I_D = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}} \quad \Rightarrow \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 (I_C + I_D)$$

Ο νόμος Ampère-Maxwell με τις πηγές εκφρασμένες σε ρεύματα.



$$\left.\begin{array}{l} q = \varepsilon_0 E A \quad \Rightarrow \quad I_C = \dfrac{dq}{dt} = \varepsilon_0 A \dfrac{dE}{dt} \\[2em] \Phi_E = E A \quad \Rightarrow \quad I_D = \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 A \dfrac{dE}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_D = I_C}$$

Εφαρμογή του νόμου Ampère-Maxwell κατά τη φόρτιση ενός πυκνωτή.

Οι εξισώσεις του Maxwell (ολοκληρωτική μορφή)

Συγκεντρώνοντας τα γενικά αποτελέσματα:

Νόμος του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_S}{\varepsilon_0}$$

Νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Νόμος του Faraday:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Νόμος των Ampère-Maxwell:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I_C + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_{S(C)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

Οι εξισώσεις του Maxwell (διαφορική μορφή)

Εφαρμόζουμε τις σχέσεις που έχουμε ήδη αποδείξει για τυχαίες κλειστές επιφάνειες S και κλειστούς βρόχους C:

Θεώρημα Gauss: $\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \int_{V(S)} \nabla\cdot\mathbf{E}\, d\tau$

Θεώρημα Stokes: $\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_{S(C)} (\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S}$

και για το ηλεκτρικό και για το μαγνητικό πεδίο.

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_S}{\varepsilon_0} \;\Rightarrow\; \int_{V(S)} \nabla\cdot\mathbf{E}\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V(S)} \rho d\tau \quad \forall S \quad \Rightarrow\; \nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \;\Rightarrow\; \int_{V(S)} \nabla\cdot\mathbf{B}\, d\tau = 0 \quad \forall S \quad \Rightarrow\; \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} \;\Rightarrow\; \int_{S(C)} (\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S} = -\int_{S(C)} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \quad \forall S(C) \quad \Rightarrow\; \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I_C + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} \;\Rightarrow\; \int_{S(C)} (\nabla\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{S} = \int_{S(C)} \left(\mu_0\mathbf{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S} \quad \forall S(C)$$

$$\Rightarrow\; \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

Οι εξισώσεις του Maxwell (διαφορική μορφή)

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα:

Νόμος του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο: $$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο: $$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Νόμος του Faraday: $$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Νόμος των Ampère-Maxwell: $$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Πώς προκύπτει η διόρθωση του Maxwell στο νόμο του Ampère

Από την απόκλιση του νόμου Faraday: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \equiv 0$

Από την απόκλιση του νόμου Ampère: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$

Αλλά η απόκλιση του στροβιλισμού είναι πάντα 0: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0 \qquad \forall \mathbf{A}$

$\Rightarrow$

Νόμος Faraday → **OK**.

Νόμος Ampère → **Λάθος** (για χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία).

Από τη διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου: $-\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j}$

Από το νόμο Gauss: $\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \left(\mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \equiv 0$$

$\Rightarrow$ Νόμος Ampère-Maxwell → **OK**: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Οι εξισώσεις Maxwell χωρίς πηγές

Χωρίς πηγές (φορτία και ρεύματα), οι εξισώσεις Maxwell παίρνουν συμμετρική μορφή:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Η συμμετρία τους φαίνεται καθαρότερα όταν αποσυνδέσουμε τα πεδία, ανεβάζοντας την τάξη των εξισώσεων από πρώτη σε δεύτερη:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{aligned}\right. \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2 \mathbf{f}$$

Το μαγνητικό δυναμικό

Είδαμε ότι το χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι συντηρητικό, άρα δεν αρκεί μόνο το ηλεκτρικό δυναμικό V (που προσδιορίζει το στατικό πεδίο) για να προσδιορίσει γενικά το πεδίο:

$$\mathbf{E} = -\nabla V + \cdots$$

Ο νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο μας λέει ότι αυτό μπορεί να εκφραστεί σαν ο στροβιλισμός ενός άλλου διανυσματικού πεδίου $\mathbf{A}$, το οποίο είναι μια συνάρτηση δυναμικού (εφόσον οι χωρικές του παράγωγοι δίνουν ένα πεδίο δύναμης) με τρεις συνιστώσες:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}$$

Τότε, από το νόμο του Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Εφόσον $\nabla \times \nabla V \equiv \mathbf{0}$ για οποιαδήποτε συνάρτηση V, ο νόμος του Faraday ικανοποιείται όταν το ηλεκτρικό πεδίο περιγράφεται στην πιο γενική του μορφή και από τα δύο δυναμικά, το ηλεκτρικό δυναμικό V και το μαγνητικό δυναμικό $\mathbf{A}$:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}$$

Τα δυναμικά με και χωρίς πηγές

Από το νόμο του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = -(\nabla V + \partial \mathbf{A}/\partial t)$:

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Από το νόμο των Ampère-Maxwell για το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = -(\nabla V + \partial \mathbf{A}/\partial t)$ και το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

Επιβάλλουμε στα δυναμικά τη **συνθήκη βαθμίδας Lorenz**: $\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \nabla^2 V = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\[2ex] \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \end{cases}$$

και χωρίς πηγές:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

Πλεονάζοντες βαθμοί ελευθερίας των δυναμικών

Η περιγραφή των 6 συνιστωσών $(E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z)$ του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου από 4 δυναμικά (V, A_x, A_y, A_z) και τις 4 εξισώσεις Maxwell στην πραγματικότητα είναι πλεονασμός

Μπορούμε να προσθέσουμε στο μαγνητικό δυναμικό τη βαθμίδα μιας συνάρτησης χωρίς να αλλάξει το μαγνητικό πεδίο:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\phi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \to \mathbf{B}' = \nabla\times\mathbf{A}' = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\nabla\phi = \nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Για να μην αλλάξει και το ηλεκτρικό πεδίο με την αλλαγή του μαγνητικού δυναμικού, πρέπει να αφαιρέσουμε από το ηλεκτρικό δυναμικό τη χρονική παράγωγο της ίδιας συνάρτησης:

$$V \to V' = V - \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E}' = -\left(\nabla V' + \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}\right) = -\left(\nabla V - \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t}\right)$$

$$= -\left(\nabla V + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{E}$$

Μετασχηματισμοί βαθμίδας των δυναμικών

Οι μετασχηματισμοί των δυναμικών: $V \rightarrow V' = V - \dfrac{\partial \phi}{\partial t} \qquad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \phi$

λέγονται **μετασχηματισμοί βαθμίδας** και επιτρέπουν την επιβολή μιας αυθαίρετης συνθήκης στα δυναμικά, όπως η συνθήκη βαθμίδας του Lorenz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

η οποία ικανοποιείται όταν η συνάρτηση ϕ είναι λύση της εξίσωσης:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

δηλαδή όταν η ϕ είναι αρμονική συνάρτηση