Στην καμπύλη επιφάνεια του κυλίνδρου:

$\theta = 90^\circ$ οπότε $\cos\theta = 0$ και

$$\int E \cos\theta \, dA = 0.$$

▷▷ Νόμος Gauss: $2\cancel{A}E = \dfrac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\rho \cdot \cancel{A}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}}$$

όπως είχαμε βρει προηγουμένως!

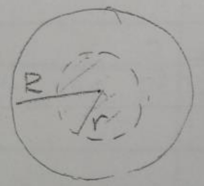
---

③ Πεδίο σε διηλεκτρική σφαίρα. (*) [Μετά και σε αγώγιμη]

Σφαίρα ακτίνας R περιέχει ολικό φορτίο Q που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε όλο τον όγκο της.

1) Ποιο είναι το ηλ. πεδίο στο εσωτερικό?

2) ——— " ——— εξωτερικό?



1) Είναι: $\rho = \dfrac{Q}{\text{όγκος}} = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{3Q}{4\pi R^3}$.

Στο εσωτερικό: Επιφάνεια Gauss σφαίρα ακτίνας $r < R$

Εδώ $\cos\theta = 1$ $(\theta = 0^\circ)$ και $\int_A E\cos\theta \, dA = \int_A E \, dA = E\int_A dA = 4\pi r^2 E$

Το Q_{enc} στη σφαίρα ακτίνας r είναι:

$$Q_{enc} = \begin{Bmatrix}\text{πυκνότητα}\\ \text{φορτίου}\end{Bmatrix} \times \{\text{όγκος}\} = \rho \times \frac{4\pi}{3} r^3$$

και επειδή έχουμε βρει $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow Q_{enc} = \frac{3Q}{4\pi R^3}\,\frac{4\pi}{3} r^3 = Q\,\frac{r^3}{R^3}.$$

Άρα νόμος Gauss:

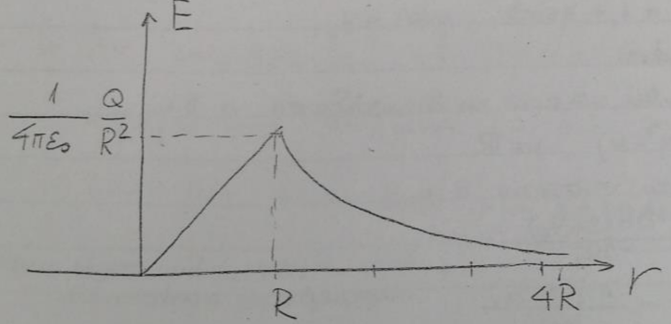
$$4\pi r^2 E = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 4\pi \cancel{r^2} E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \frac{\cancel{r^3}}{R^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Qr}{R^3}\ ,\ r \leq R}$$

2) Έξω από τη σφαίρα:

$$4\pi r^2 E = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{R^2}\ ,\ r>R}$$

$r > R$



Αγωγοί σε ηλεκτρικά πεδία

Καταρχήν:

* Μονωτές (διηλεκτρικά), όπως γυαλί, πορσελάνη το λάστιχο, το νάιλον, είναι υλικά που δεν επιτρέπουν την κίνηση ηλ. φορτίου

  ▷ κακοί αγωγοί → ∄ ελεύθερα ηλεκτρόνια (όλα τα ηλεκτρόνια είναι δεσμευμένα στα άτομα)

  ▷ Αν τοποθετηθεί ηλ. φορτίο → το φορτίο θα μείνει στη θέση του.

* Αγωγοί (μέταλλα) όπως χαλκός, σίδηρος, χρυσός, αργίλιο, έχουν ελεύθερα ηλεκτρόνια (που δεν είναι δεσμευμένα με τα άτομα μολονότι είναι δέσμια στα μέταλλα).

  ▷ Κίνηση ελευθέρων ηλεκτρονίων ~ κίνηση μορίων αερίου σε δοχείο → αέριο ελευθέρων ηλεκτρονίων.

  ▷ Αν τοποθετηθεί ηλ. φορτίο στο άκρο αγωγού → απλώνεται σε όλη την επιφάνειά του ως ότου βρεί μια κατάσταση ισορροπίας

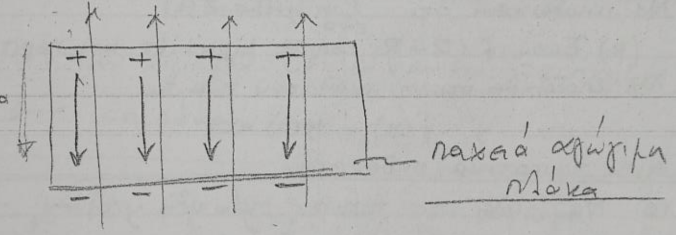
Αν τοποθετηθεί ένας αγωγός σε ηλ. πεδίο

⇒ τα ελεύθερα ηλεκτρόνια επιταχύνονται λόγω της ηλ. δύναμης.

▷ Τα ηλεκτρόνια κινούνται αντίθετα προς τη φορά του ηλ. πεδίου ώς όπου φτάσουν στην επιφάνεια του μετάλλου.

⇒ στη μία άκρη του αγωγού → συσσώρευση ηλεκτρονίων

στην άλλη άκρη —"— → έλλειψη ηλεκτρονίων



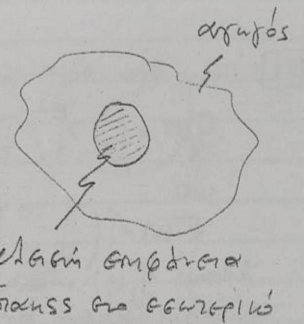
▷▷ Η συσσώρευση αρνητικών κ' θετικών φορτίων συνεχίζεται μέχρι το ηλ. πεδίο που δημιουργείται από αυτά τα φορτία αναιρέσει το αρχικό πεδίο.

▷▷ **Σε ισορροπία:** Το ηλ. πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι μηδέν
(στατική ισορροπία)

Αν ΔΕΝ ήταν μηδέν, τα ηλεκτρόνια θα εξακολουθούσαν να κινούνται ⇒ η κατανομή φορτίων εκτός ισορροπίας

Σε καλό αγωγό (π.χ. χαλκό) η ισορροπία επιτυγχάνεται σε χρόνους ~ κλάσμα του sec.

▷ Σε αγωγό σε <u>στατική ισορροπία</u> κάθε πρόσθετο φορτίο που τοποθετείται (π.χ. από επαφή) <u>παραμένει στην επιφάνειά του.</u>



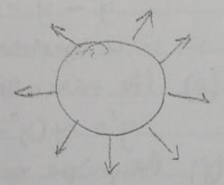
<u>Απόδειξη με νόμο Gauss:</u>

$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Όμως $\vec{E}=0$ οπότε $\underline{Q_{enc}=0}$.

⟹ τα φορτία του αγωγού δεν είναι στο εσωτερικό του αλλά στην επιφάνειά του.

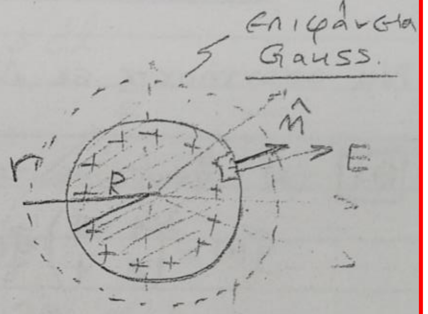
▷▷ **Το ηλ. πεδίο στο εξωτερικό του αγωγού σε στατική ισορροπία είναι $\perp$ στην επιφάνεια**



Αν <u>δεν</u> ήταν θα υπήρχε και συνιστώσα του ηλ. πεδίου εφαπτόμενη στην επιφάνεια ⟹ τα ηλεκτρόνια θα εκινούντο πάνω στην επιφάνεια ⟹ η κατανομή φορτίου <u>δεν</u> θα ήταν σε ισορροπία (άτοπο!)

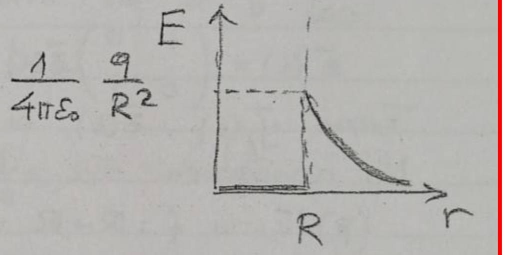
Παράδειγμα [Young, p. 849]

Τοποθετείται φορτίο q πάνω σε συμπαγή αγώγιμη σφαίρα. Να υπολογιστεί το πεδίο παντού (μέσα και έξω από τη σφαίρα).



— Μέσα στη σφαίρα $E=0$.

— Έξω παίρνουμε επιφάνεια Gauss ακτίνας $r > R$



Νόμος Gauss:

$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_A E\,\cancel{\cos\theta}^{\,\theta=0}\,dA =$$

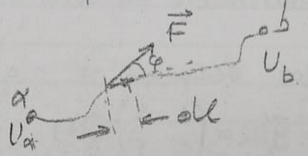
$$= E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}$$

Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια
(Ηλεκτρικό δυναμικό)

Από Μηχανική: Αν δύναμη $\vec{F}$ ενεργεί σε σωματίδιο και το μετακινεί από το α στο b τότε το έργο

$$W_{\alpha\to b} = \int_{\alpha}^{b} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{\alpha}^{b} F\cdot\cos\varphi\, dl$$



Αν η δύναμη είναι διατηρητική (δηλ. το παραγόμενο έργο εξαρτάται μόνο από τα α, b και όχι από το δρόμο $\alpha\to b$), τότε

$$W_{\alpha\to b} = U_\alpha - U_b = -(U_b - U_\alpha) = -\Delta U$$

U: δυναμική ενέργεια

▷ Αν $W_{\alpha\to b} > 0 \Rightarrow U_\alpha > U_b$ και $\Delta U < 0$

όπως σε ένα σώμα που πέφτει από το α στο b υπό την επίδραση της βαρύτητας.

▷ Αν $W_{\alpha\to b} < 0 \Rightarrow U_\alpha < U_b$ και $\Delta U > 0$

όπως όταν πετάμε μια μπάλα προς τα πάνω

▷ Θεώρημα έργου-ενέργειας:

$$K_b - K_\alpha = -\Delta U = -(U_b - U_\alpha) \Rightarrow \boxed{K_\alpha + U_\alpha = K_b + U_b}$$

K: κιν. ενέργεια

ολ. ενέργεια = σταθ.

$$W_{\alpha \to b} = \int_{\alpha}^{b} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -\Delta U = -(U_b - U_\alpha)$$

δυναμική ενέργεια

Στην περίπτωση ηλ. δύναμης ($\Rightarrow$ παρουσίας ηλ. πεδίου)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow \vec{F} = q\vec{E}$$

οπότε

$$\int_{a}^{b} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -U_b + U_\alpha \Rightarrow -q\int_{\alpha}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = U_b - U_\alpha$$

Ορίζουμε: <u>ηλεκτροστατικό δυναμικό στο σημείο P</u>:

$$\boxed{V_P = \frac{U_P}{q}}$$

U_P — δυναμική ενέργεια σημ. φορτίου

q — φορτίο

οπότε

$$V_P = -\int_{\alpha}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + V_{P_0}$$

σταθερά που επιλέγεται αυθαίρετα $\rightarrow$ συνήθως $= 0$

Επίσης: διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων P_1 κ' P_2:

$$V_{P_2} - V_{P_1} = -\int_{P_0}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + V_{P_0} - \left(-\int_{P_0}^{P_1} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + V_{P_0}\right)$$

$$= -\left(\int_{P_1}^{P_0} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}\right)$$

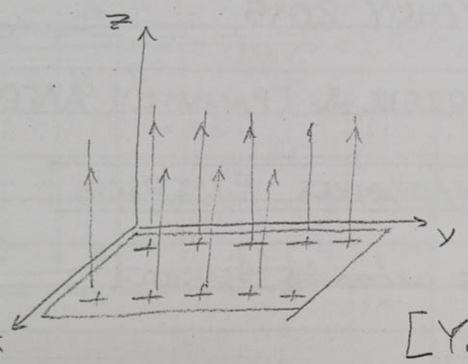
$$\boxed{V_{P_2} - V_{P_1} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}$$

[<u>Μονάδες</u>: V = J.C]

Άρα: διαφορά δυναμικού $V_{P_2} - V_{P_1} = W_{P_1 \to P_2}$

έργο για να πάει το φορτίο $P_1 \to P_2$

Παράδειγμα



Μεγάλη επίπεδη αγώγιμη επιφάνεια φέρει ομοιόμορφο ηλ. φορτίο. Ποιό είναι το ηλ. δυναμικό σε απόσταση z από την επιφάνεια?

[Υποθέτουμε πάνω στην επιφάνεια V=0]

Είναι $E_z = E = \underset{}{\overset{=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}}{\text{σταθ.}}}$ (ανεξάρτητο από το z)

Αν P είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας

$$\underbrace{\cancel{V(P_0)}}_{0} - V(z) = -\int_0^z \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\underbrace{\cancel{\int E_x dx}}_{0} - \underbrace{\cancel{\int E_y dy}}_{0} - \int E_z dz$$

$$= -\int_0^z E_z dz = -Ez$$

Δηλ. $\boxed{V = Ez}$ ~ απόσταση από την επιφάνεια