ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΥΝ ΤΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.
ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ RABI.
ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ (RWA, Rotating Wave Approximation)

Είχαμε καταλήξει στο Γραμμικό Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων 1ης τάξεως

$$\boxed{\dot{C}_{k'}(t) = \frac{-i}{\hbar}\sum_{k} C_k(t)\, e^{i(\Omega_{k'}-\Omega_k)t}\, U_{\mathcal{E}k'k}(t)}$$

0

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + U_{\mathcal{E}}(\vec{r},t)$$
$$i\hbar\frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\vec{r},t)$$
$$\Psi(\vec{r},0) = \Phi(\vec{r}) = \text{γνωστή}$$
$$\Phi(\vec{r}) = \sum_k f_k \Phi_k(\vec{r})$$
$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\Phi_k(\vec{r})$$
$$\hat{H}_0\Phi_k(\vec{r}) = E_k\Phi_k(\vec{r})$$
$$E_k = \hbar\Omega_k$$

Θα το λύσουμε για ΔΣ

Ορίζουμε $\Omega := \Omega_2 - \Omega_1 = \dfrac{E_2 - E_1}{\hbar}$

Είχαμε βρεί επίσης

$$U_{\mathcal{E}k'k}(t) = \begin{cases} -\wp\,\mathcal{E}_0\cos\omega t, & k\neq k' \\ 0, & k = k' \end{cases}$$

$$\wp = \wp_z = \wp_{z21} = -e z_{21} = -e z_{12} = \wp_{z12}$$

$$\vec{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0\,\hat{z}\cos\omega t$$

κάναμε την προσέγγιση διπόλου, τη δικαιολογήσαμε για $|\vec{r}|\sim a_0$ και οπτικά μήκη κύματος ($\lambda \gg a_0$)

ω: η κυκλική συχνότητα του μονοχρωματικού, πολωμένου ηλεκτρικού κύματος

$k'=1$
$$\dot{C}_1(t) = -\frac{i}{\hbar}C_1(t)\,\cancelto{1}{e^{i(\Omega_1-\Omega_1)t}}\,\cancelto{0}{U_{\mathcal{E}11}(t)} - \frac{i}{\hbar}C_2(t)\,e^{i(\Omega_1-\Omega_2)t}\,U_{\mathcal{E}12}(t)$$

$$\dot{C}_1(t) = +\frac{i}{\hbar}C_2(t)\,e^{-i\Omega t}\,\wp\,\mathcal{E}_0\cos\omega t = \frac{i\wp\mathcal{E}_0}{\hbar}C_2(t)\,e^{-i\Omega t}\cos\omega t$$

$k'=2$
$$\dot{C}_2(t) = -\frac{i}{\hbar}C_1(t)\,e^{i(\Omega_2-\Omega_1)t}\,U_{\mathcal{E}21}(t) - \frac{i}{\hbar}C_2(t)\,\cancelto{1}{e^{i(\Omega_2-\Omega_2)t}}\,\cancelto{0}{U_{\mathcal{E}22}(t)}$$

$$\dot{C}_2(t) = +\frac{i}{\hbar}C_1(t)\,e^{i\Omega t}\,\wp\,\mathcal{E}_0\cos\omega t = \frac{i\wp\mathcal{E}_0}{\hbar}C_1(t)\,e^{i\Omega t}\cos\omega t$$

$$\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, χωρίς προσέγγιση, είναι

$$\dot{C}_1(t) = i\Omega_R C_2(t)\, e^{-i\Omega t}\cos\omega t = \frac{i}{2}\Omega_R C_2(t)\, e^{-i\Omega t}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \qquad \underline{1η}$$

$$\dot{C}_2(t) = i\Omega_R C_1(t)\, e^{i\Omega t}\cos\omega t = \frac{i}{2}\Omega_R C_1(t)\, e^{i\Omega t}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \qquad \underline{2η}$$

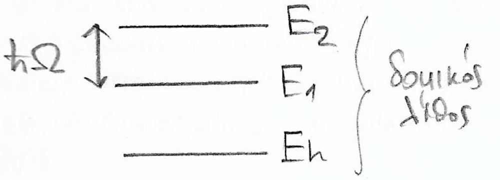
Δηλαδή, η λύση του καθορίζεται από τις παραμέτρους

$\boxed{\Delta := \omega - \Omega}$ detuning αποσυντονισμός

$\boxed{\Sigma := \omega + \Omega}$

$\boxed{\Omega_R := \frac{p E_0}{\hbar} \text{ ή } \frac{-p\cdot E_0}{\hbar} \quad (\text{αν } p>0) \quad (\text{αν } p<0)}$ κυκλική συχνότητα Rabi

● Σημειωτέον, αν υπάρχει αυθόρμητη εκπομπή από την στάθμη 1 σε κατώτερη βοηθητική στάθμη h } A_{1h}



ή από την στάθμη 2 στην στάθμη 1 } A_{21}

Δηλαδή, αν $dW^{αυθ}_{εκπ\, 1\to h} = A_{1h}\, dt \Rightarrow$ η πιθανότητα στη στάθμη 1 θα μειώνεται με ρυθμό

η πιθανότητα ένας δομικός λίθος να πάθει αυθόρμητη εκπομπή από $1 \to h$ με την προϋπόθεση το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται ήδη στη στάθμη 1 για να μπορεί να πάει στην h

$$\frac{d|C_1(t)|^2}{dt} = -A_{1h}\cdot |C_1(t)|^2$$

$$2|C_1(t)|\,\frac{d|C_1(t)|}{dt} = -A_{1h}\cdot|C_1(t)|^2$$

$$\frac{d|C_1(t)|}{dt} = -\frac{A_{1h}}{2}|C_1(t)|$$

$\boxed{\text{● κ ✱ μετατίθενται}}$

?Αντιστρόφως, φαίνεται ευκολότερα

αν $\frac{dC_1(t)}{dt} = -\frac{A_{1h}}{2}C_1(t) \Rightarrow \frac{d|C_1(t)|^2}{dt} = \dot{C}_1(t)^* C_1(t) + C_1^*(t)\dot{C}_1(t)$

δηλ. $\dot{C}_1(t) = -\frac{A_{1h}}{2}C_1(t)$ $\quad = -\frac{A_{1h}}{2}C_1^* C_1 - C_1^*\frac{A_{1h}}{2}C_1$

$\Rightarrow \dot{C}_1^*(t) = -\frac{A_{1h}}{2}C_1^*(t)$ $\quad = -A_{1h}|C_1(t)|^2$

Δηλαδή για να συμπεριλάβουμε αυθόρμητη εκπομπή $1\to h$, πρέπει στην $\underline{1η}$ εξίσωση να προσθέσουμε όρο $-\frac{A_{1h}}{2}C_1(t)$. (ΑΠΟΣΒΕΣΗ) Αυτό αποσβένει το πλάτος, $\dot{C}_1(t) = -\frac{A_{1h}}{2}C_1(t)$ και τον πληθυσμό, $\dot{|C_1(t)|^2} = -A_{1h}|C_1(t)|^2$

Για να συμπεριλάβουμε αυθόρμητη εκπομπή $2 \to 1$, ΔΕΝ πρέπει στη 2η εξίσωση να προσθέσουμε όρο $\boxed{-\frac{A_{21}}{2}C_2(t)}$ και στην 1η εξίσωση όρο $\boxed{+\frac{A_{21}}{2}C_2(t)}$ 2

Υπάρχουν σχετικά προγράμματα noRWA.m
callnoRWA.m
setGlobalOmegaROmega omega.m

Ενώ ο όρος $-\frac{A_{1h}}{2}C_1(t)$ αποσβένει το πλάτος, $\dot{C}_1(t) = -\frac{A_{1h}}{2}C_1(t)$
και τον πληθυσμό $\dot{|C_1(t)|^2} = -A_{1h}|C_1(t)|^2$
της στάθμης 1

ο όρος $-\frac{A_{21}}{2}C_2(t)$ στην 2η εξίσωση για το $\dot{C}_2(t)$
κ ο όρος $+\frac{A_{21}}{2}C_2(t)$ στην 1η εξίσωση για το $\dot{C}_1(t)$.

προσπαθούν να περιγράψουν έναν μη συνεκτικό μηχανισμό (αυθόρμητη εκπομπή με το ηλεκτρόνιο να μεταβαίνει από την 2η στην 1η στάθμη) με συνεκτικούς όρους, δηλαδή εξαρτώμενους από το $C_2(t)$ και όχι το $|C_2(t)|$ όπως θα έπρεπε.

Δείξτε πως για $A_{1h} = 0 = A_{21}$ το άθροισμα των πληθυσμών $P_1(t) + P_2(t)$ διατηρείται είτε χωρίς RWA είτε με RWA.

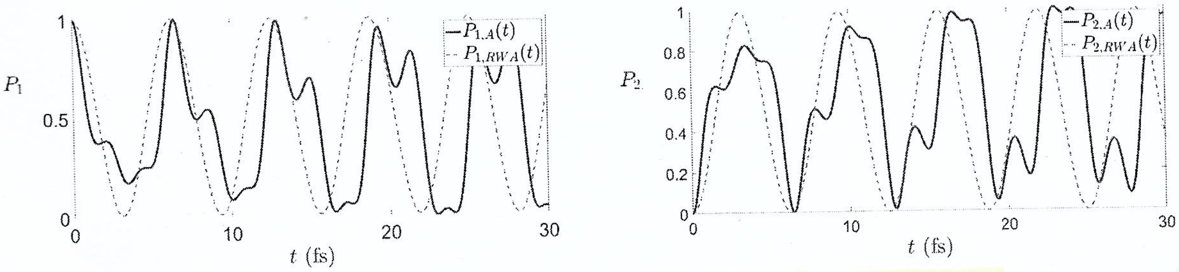
Αν όμως $A_{21} \neq 0$ και εισάγουμε όρους $\underbrace{+\frac{A_{21}}{2}C_2(t)}_{\text{1η εξίσωση}}, \underbrace{-\frac{A_{21}}{2}C_2(t)}_{\text{2η εξίσωση}}$
$A_{1h} = 0$

το άθροισμα των πληθυσμών $P_1(t) + P_2(t)$ ΔΕΝ διατηρείται.

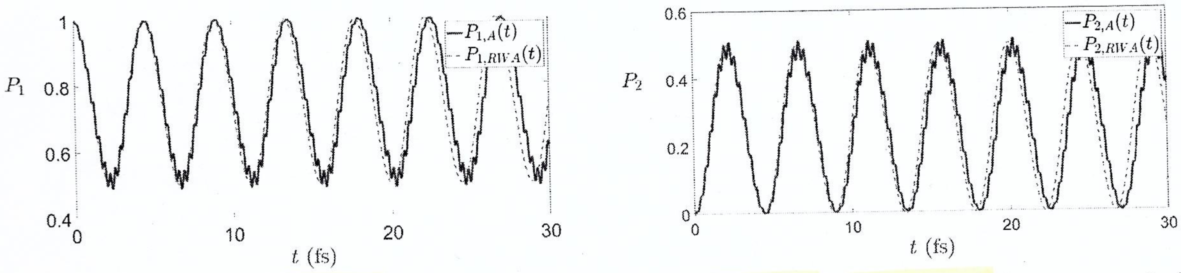
'Από Διπλωματική Εργασία Λ. Χαλκοπιάδη
'Επίβλεψη Κ. Σιμσερίδης

2''

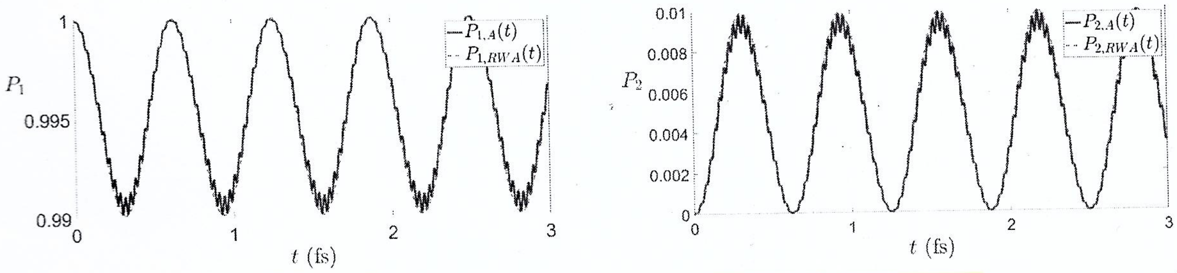
Στις 2 πρώτες γραμμές ∃ dephasing στην RWA.



(i) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ και $\Delta = 0.1fs^{-1}$, όπου $\omega = 1fs^{-1}$ και $\Omega = 0.9fs^{-1}$.
(ii) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ και $\Delta = 0.1fs^{-1}$, όπου $\omega = 1fs^{-1}$ και $\Omega = 0.9fs^{-1}$.

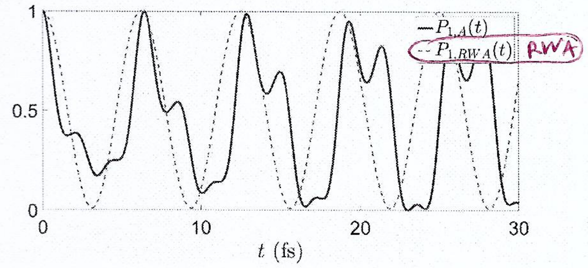


(iii) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ και $\Delta = 1fs^{-1}$, όπου $\omega = 10fs^{-1}$ και $\Omega = 9fs^{-1}$.
(iv) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ και $\Delta = 1fs^{-1}$, όπου $\omega = 10fs^{-1}$ και $\Omega = 9fs^{-1}$.

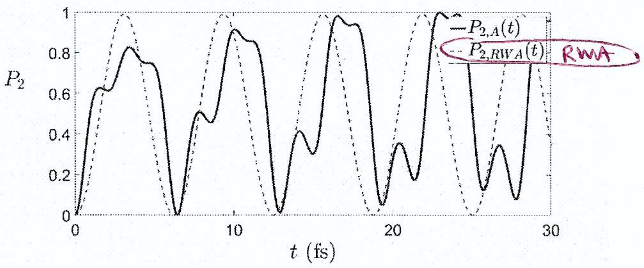


(v) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ και $\Delta = 10fs^{-1}$, όπου $\omega = 100fs^{-1}$ και $\Omega = 90fs^{-1}$.
(vi) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ και $\Delta = 10fs^{-1}$, όπου $\omega = 100fs^{-1}$ και $\Omega = 90fs^{-1}$.

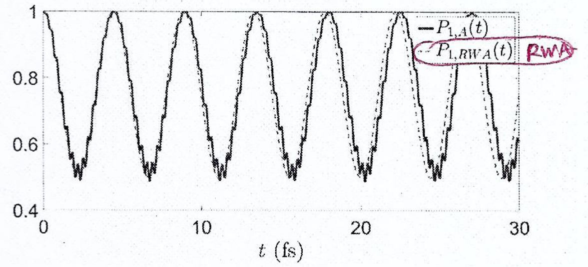
Σχήμα 4.1 *Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κάτω στάθμη, στην αρχή του χρόνου για διαφορετικά* Δ, *για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).*



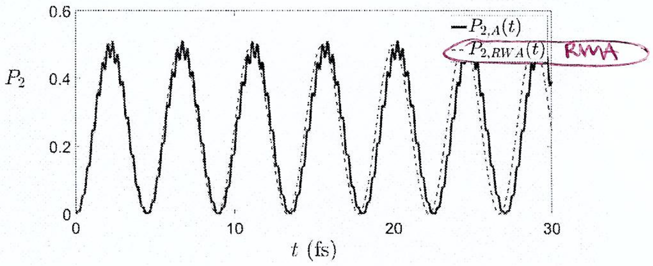
(i) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ *και* $\Delta = 0.1fs^{-1}$, *όπου* $\omega = 1fs^{-1}$ *και* $\Omega = 0.9fs^{-1}$.



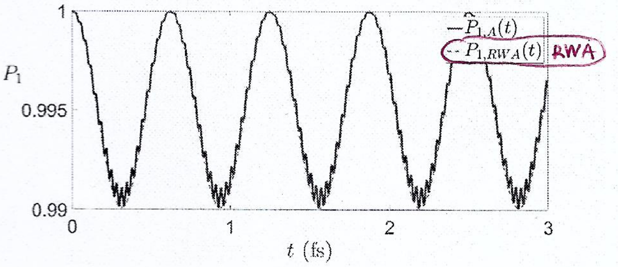
(ii) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ *και* $\Delta = 0.1fs^{-1}$, *όπου* $\omega = 1fs^{-1}$ *και* $\Omega = 0.9fs^{-1}$.



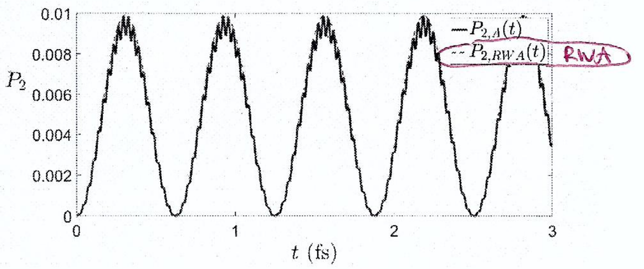
(iii) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ *και* $\Delta = 1fs^{-1}$, *όπου* $\omega = 10fs^{-1}$ *και* $\Omega = 9fs^{-1}$.



(iv) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ *και* $\Delta = 1fs^{-1}$, *όπου* $\omega = 10fs^{-1}$ *και* $\Omega = 9fs^{-1}$.



(v) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ *και* $\Delta = 10fs^{-1}$, *όπου* $\omega = 100fs^{-1}$ *και* $\Omega = 90fs^{-1}$.



(vi) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ *και* $\Delta = 10fs^{-1}$, *όπου* $\omega = 100fs^{-1}$ *και* $\Omega = 90fs^{-1}$.

Σχήμα 4.1 *Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κάτω στάθμη, στην αρχή του χρόνου για διαφορετικά* Δ, *για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).*

$$\dot{C}_1(t) = \boxed{\frac{i\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}}\, C_2(t)\, e^{-i\Omega t}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

$$\dot{C}_2(t) = \boxed{\frac{i\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}}\, C_1(t)\, e^{i\Omega t}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

αν $\wp<0$: $\boxed{\Omega_R := -\frac{\wp\mathcal{E}_0}{\hbar}}$

$\boxed{\Sigma := \omega+\Omega}$

αν $\wp>0$: $\boxed{\Omega_R := \frac{\wp\mathcal{E}_0}{\hbar}}$

$\Delta := \omega-\Omega$
αποσυντονισμός
detuning

ή

$$\dot{C}_1(t) = \frac{i\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}\left[e^{i(\omega-\Omega)t} + \underset{\text{RWA}\to 0}{\cancel{e^{-i(\omega+\Omega)t}}}\right]\cdot C_2(t)$$

$$\dot{C}_2(t) = \frac{i\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}\left[\underset{\text{RWA}\to 0}{\cancel{e^{i(\omega+\Omega)t}}} + e^{-i(\omega-\Omega)t}\right]\cdot C_1(t)$$

Αν το ω του ΗΜ πεδίου ταιριάζει αρκετά με την ενεργειακή διαφορά των δύο σταθμών $\Omega := \Omega_2 - \Omega_1$

$$\omega \sim \Omega := \Omega_2 - \Omega_1$$

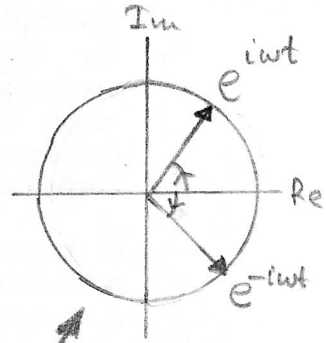
χωρίς να είναι υποχρεωτικό να ταυτίζονται...

$\Rightarrow$ $\omega+\Omega$ μεγάλο <u>υψίσυχνο</u>

$\omega-\Omega$ μικρό <u>χαμηλόσυχνο</u>

Οι όροι $e^{-i(\omega+\Omega)t}$ και $e^{i(\omega+\Omega)t}$ είναι γρήγοροι όροι

Άρα, σε οποιαδήποτε αξιοσημείωτη χρονική κλίμακα, οι γρήγορες αυτές ταλαντώσεις θα έχουν, κατά μέσο όρο, μηδενική ή περίπου μηδενική επίδραση στο αποτέλεσμα.
(ΥΠΟΘΕΣΗ ΑΠΛΟΠΟΙΗΤΙΚΗ...)



<u>προέλευση ονόματος</u>

RWA Rotating Wave Approximation
Προσέγγιση Περιστρεφόμενου Κύματος ; Αγνοούμε αυτούς τους γρήγορους όρους

$$\dot{C}_1(t) = \frac{i\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}\, e^{i\Delta t}\, C_2(t)$$

$$\dot{C}_2(t) = \frac{i\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}\, e^{-i\Delta t}\, C_1(t)$$

$$\dot{C}_1(t) = -\frac{i}{2}\Omega_R e^{i\Delta t} \cdot C_2(t)$$
$$\dot{C}_2(t) = -\frac{i}{2}\Omega_R e^{-i\Delta t} \cdot C_1(t)$$

χρονικώς εξαρτημ. συντελεστές

(μολύβι αν $\wp > 0$)

(μπλε αν $\wp < 0$ ✡)

ορίσαμε

$\Delta := \omega - \Omega$	αποσυντονισμός detuning
$\Omega_R := -\frac{\wp \mathcal{E}_0}{\hbar} > 0$, $\hbar > 0$	συχνότητα Rabi

Δ εκφράζει την διαφορά μεταξύ ω ΗΜ πεδίου και $\Omega := \Omega_2 - \Omega_1 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$

1 • Το $\mathcal{E}_0$ εκφράζει το πόσο ισχυρό είναι το πεδίο, δηλ. το πλάτος του πεδίου

2 • Το $\wp$ εκφράζει το κατά πόσο το πεδίο εμπλέκει τις δύο στάθμες

•1, •2 $\Longrightarrow$ Το Ω_R εκφράζει την ισχύ της διαταραχής κι ορίζεται πάντοτε θετικό.

---

a Θα κάνουμε ένα μετασχηματισμό για να πάρουμε σύστημα διαφ. εξισώσεων με χρονικώς ανεξάρτητους συντελεστές.

$$(M) \begin{cases} C_1(t) = \mathcal{C}_1(t)\, e^{i\frac{\Delta t}{2}} \Rightarrow \dot{C}_1(t) = \dot{\mathcal{C}}_1(t)\, e^{i\frac{\Delta t}{2}} + \mathcal{C}_1(t)\frac{i\Delta}{2} e^{i\frac{\Delta t}{2}} \\ C_2(t) = \mathcal{C}_2(t)\, e^{-i\frac{\Delta t}{2}} \Rightarrow \dot{C}_2(t) = \dot{\mathcal{C}}_2(t)\, e^{-i\frac{\Delta t}{2}} + \mathcal{C}_2(t)\left(-\frac{i\Delta}{2}\right) e^{-i\frac{\Delta t}{2}} \end{cases}$$

$$\dot{\mathcal{C}}_1(t)\cancel{e^{i\frac{\Delta t}{2}}} + \mathcal{C}_1(t)\frac{i\Delta}{2}\cancel{e^{i\frac{\Delta t}{2}}} = -\frac{i}{2}\Omega_R \cancel{e^{i\Delta t}}\, \mathcal{C}_2(t)\cancel{e^{-i\frac{\Delta t}{2}}}$$

$$\dot{\mathcal{C}}_2(t)\cancel{e^{-i\frac{\Delta t}{2}}} + \mathcal{C}_2(t)\left(-\frac{i\Delta}{2}\right)\cancel{e^{-i\frac{\Delta t}{2}}} = -\frac{i}{2}\Omega_R \cancel{e^{-i\Delta t}}\, \mathcal{C}_1(t)\cancel{e^{i\frac{\Delta t}{2}}}$$

$$\dot{\mathcal{C}}_1(t) = -\frac{i\Delta}{2}\mathcal{C}_1(t) + \frac{-i\Omega_R}{2}\mathcal{C}_2(t)$$

$$\dot{\mathcal{C}}_2(t) = -\frac{i\Omega_R}{2}\mathcal{C}_1(t) + \frac{i\Delta}{2}\mathcal{C}_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathcal{C}}_1(t) \\ \dot{\mathcal{C}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & -\frac{i\Omega_R}{2} \\ -\frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1(t) \\ \mathcal{C}_2(t) \end{bmatrix}$$

σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{i\Omega_R}{2} e^{i\Delta t} \\ \frac{i\Omega_R}{2} e^{-i\Delta t} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix}$$

Το σύστημα λύνεται με 3 διαφορετικούς τρόπους a, b, c

a ↙ ΗΤΣΧ μεθ. ΙΔ-ΙΤ

b ↓ ΧΕ

c ↘ Newton

ΛΥΣΗ ΤΟΥ ⊛

Εισάγουμε το διάνυσμα

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{bmatrix}$$

και ονομάζουμε

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & -\frac{i\Omega_R}{2} \\ -\frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} := -iA \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & +\frac{\Omega_R}{2} \\ +\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix}$$

Οπότε το ⊛ γράφεται:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \tilde{A}\vec{x}(t) = -iA\vec{x}(t)$$

Ας δοκιμάσουμε λύσεις της μορφής

$$\vec{x}(t) = \vec{v}\, e^{\tilde{\lambda} t}$$

$$\vec{v}\,\tilde{\lambda}\,\cancel{e^{\tilde{\lambda} t}} = \tilde{A}\vec{v}\,\cancel{e^{\tilde{\lambda} t}}$$

$$\tilde{A}\vec{v} = \tilde{\lambda}\vec{v}$$

ή $\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v}}$ με $\tilde{\lambda} := -i\lambda$

Δηλαδή το όλο θέμα ανάγεται σε ένα πρόβλημα ιδιοανυσμάτων - ιδιοτιμών από τη λύση του οποίου θα προκύψουν

τα ιδιοανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ και

οι αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_1, λ_2

Έχοντας ελέγξει ότι τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, η λύση του προβλήματος είναι

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{2} \sigma_k \vec{v}_k e^{-i\lambda_k t}} \qquad \tilde{\lambda}_k = -i\lambda_k$$

Από τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε τα σ_k

Πρώτα πρώτα, όμως, θα βρούμε τις ιδιοτιμές

$$A\vec{u}=\lambda\vec{u} \Rightarrow A\vec{u}=\lambda I\vec{u} \Rightarrow (A-\lambda I)\vec{u}=0$$

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\Delta}{2} & +\frac{\Omega_R}{2}\\ +\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\Delta}{2}-\lambda & +\frac{\Omega_R}{2}\\ +\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2}-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\det=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\frac{\Delta}{2}-\lambda & +\frac{\Omega_R}{2}\\ +\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2}-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$-\left(\frac{\Delta}{2}-\lambda\right)\left(\frac{\Delta}{2}+\lambda\right)-\frac{\Omega_R^2}{4}=0 \Rightarrow$$

$$-\left(\frac{\Delta^2}{4}-\lambda^2\right)-\frac{\Omega_R^2}{4}=0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2=\frac{\Omega_R^2}{4}+\frac{\Delta^2}{4}=\frac{\Omega_R^2+\Delta^2}{4}$$

$$\boxed{\lambda_{2,1}=\pm\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}}$$

ενώ στην περίπτωση συντονισμού $(\Delta=0)$

$$\boxed{\lambda_{2,1}=\pm\frac{|\Omega_R|}{2}}=\pm\frac{\Omega_R}{2}$$

όριζεται πάντοτε θετικό $\Omega_R>0$

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε αρχικές συνθήκες $C_1(0)=1$, $C_2(0)=0$

λόγω της (M) $\Leftarrow$ αρχικώς το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κάτω στάθμη

$C_1(0)=1 \quad C_2(0)=0$

ΛΥΣΗ για $\Delta = 0$

$$\lambda_{2,1} = \pm \frac{|\Omega_R|}{2} = \pm \frac{\Omega_R}{2}$$ Ω_R πάντοτε θετική

• για $\lambda_1 = -\frac{\Omega_R}{2}$

$$① \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & \frac{\Omega_R}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\Omega_R}{2} U_{11} - \frac{\Omega_R}{2} U_{21} = 0 \\ -\frac{\Omega_R}{2} U_{11} + \frac{\Omega_R}{2} \cdot U_{21} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{11} = U_{21} = K$$

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} K \\ K \end{bmatrix} \qquad \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = 1 \Rightarrow 2|K|^2 = 1 \underset{\pi.\chi.}{\Rightarrow} K = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ το ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -\frac{\Omega_R}{2}$

• για $\lambda_2 = \frac{\Omega_R}{2}$

$$① \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -\frac{\Omega_R}{2} U_{12} - \frac{\Omega_R}{2} U_{22} = 0 \\ -\frac{\Omega_R}{2} U_{12} - \frac{\Omega_R}{2} U_{22} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$U_{12} = -U_{22} = K$$

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} K \\ -K \end{bmatrix} \qquad \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 = 1 \Rightarrow 2|K|^2 = 1 \underset{\pi.\chi.}{\Rightarrow} K = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ το ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = \frac{\Omega_R}{2}$

$$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}C_1(t)\\ C_2(t)\end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{2}\sigma_k \vec{v}_k\, e^{-i\lambda_k t} =$$

$$= \sigma_1\vec{v}_1\, e^{-i\lambda_1 t} + \sigma_2 \vec{v}_2\, e^{-i\lambda_2 t}$$

$$= \sigma_1 \frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} e^{+i\frac{\Omega_R}{2}t} + \sigma_2\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \Rightarrow$$

$(\Delta=0)$

$$\begin{bmatrix} C_1(t)\cancel{e^{-\frac{i\Delta t}{2}}}\\ C_2(t)\cancel{e^{\frac{i\Delta t}{2}}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sigma_1}{\sqrt2}e^{\frac{i\Omega_R t}{2}}+\frac{\sigma_2}{\sqrt2}e^{-\frac{i\Omega_R t}{2}}\\ \frac{\sigma_1}{\sqrt2}e^{\frac{i\Omega_R t}{2}}-\frac{\sigma_2}{\sqrt2}e^{-\frac{i\Omega_R t}{2}}\end{bmatrix}$$

$C_1(0)=1 \quad C_2(0)=0$ αρχική συνθήκη

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{\sqrt2}\\ 0 &= \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sqrt2}\end{aligned}\right\} \quad \sigma_1=\sigma_2=\sigma \;\text{ και }\; \frac{2\sigma}{\sqrt2}=1 \Rightarrow \sigma=\frac{\sqrt2}{2}$$

$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$

$e^{-i\phi}=\cos\phi-i\sin\phi$

$\cos\phi=\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}$

$i\sin\phi=\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2}$

Οπότε,

$$C_1(t)=\frac{1}{2}e^{\frac{i\Omega_R t}{2}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{i\Omega_R t}{2}} = \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

$$C_2(t)=\frac{1}{2}e^{\frac{i\Omega_R t}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{i\Omega_R t}{2}} = i\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

ΑΡΑ

$$P_1(t)=|C_1(t)|^2=\cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

$$P_2(t)=|C_2(t)|^2=\sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$

$\cos 2x = 2\cos^2 x-1$

$$\cos^2 x=\frac{\cos 2x+1}{2}$$

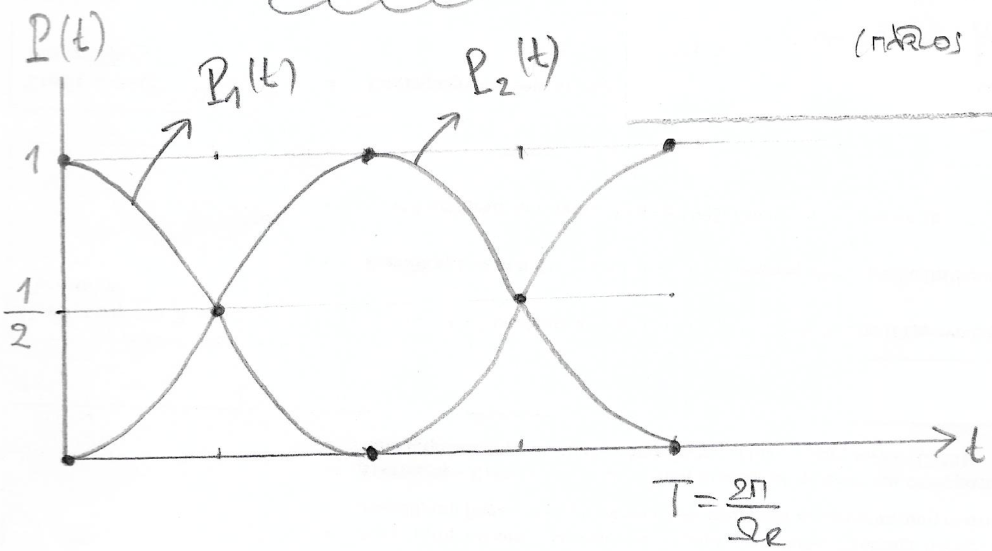
$$|c_1(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) = \frac{\cos(\Omega_R t)+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\Omega_R t)$$

$$|c_2(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\Omega_R t)$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega_R}}$$ περιοδος ταλαντώσεων

στο συντονισμό ($\Delta = 0$)

$$\boxed{A = 1}$$ μέγιστο ποσοστό μεταβιβάσεως
maximum transfer percentage
(πλάτος $= A/2$)



$$\langle |c_1(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2} \qquad \langle |c_2(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2}$$

maximum transfer rate

$$p := \frac{A_2}{T} = \frac{1 \cdot \Omega_R}{2\pi} = \frac{\Omega_R}{2\pi}$$

ορισμός

t_{2mean}

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\Omega_R t_{2mean}) \Rightarrow \cos(\Omega_R \cdot t_{2mean}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Omega_R t_{2mean} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_{2mean} = \frac{\pi}{2\Omega_R}$$

μέσος ρυθμός μεταβιβάσεως
mean transfer rate

$$k := \frac{\langle |c_2(t)|^2 \rangle}{t_{2mean}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2\Omega_R}} = \frac{\Omega_R}{\pi} \qquad \frac{k}{\frac{A_2}{T}} = 2 \Rightarrow k = 2\,\frac{A_2}{T}$$

έκφράζει το μεταβιβαζόμενο ποσοστό, άλλά και τη χρονική κλίμακα του φαινομένου

ΑΣΚΗΣΗ 10

Χρησιμοποιώντας τη γενική λύση του ΔΣ, αποδείξτε πως για αρχική τοποθέτηση του ηλεκτρονίου στην κάτω στάθμη (1), το μέγιστο ποσοστό μεταβιβάσεως στην άνω στάθμη (2) είναι $4\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}$.

$$\vec{x}(t)=\sum_{k=1}^{2}\sigma_k\vec{u}_k e^{-i\lambda_k t} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_1(t)\\ A_2(t)\end{bmatrix}=\sigma_1\vec{u}_1 e^{-i\lambda_1 t}+\sigma_2\vec{u}_2 e^{-i\lambda_2 t}$$

$$\begin{bmatrix} A_1(t)\\ A_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_1 u_{11}e^{-i\lambda_1 t}+\sigma_2 u_{12}e^{-i\lambda_2 t}\\ \sigma_1 u_{21}e^{-i\lambda_1 t}+\sigma_2 u_{22}e^{-i\lambda_2 t}\end{bmatrix}$$

$$|A_1(t)|^2=\left(\sigma_1 u_{11}e^{-i\lambda_1 t}+\sigma_2 u_{12}e^{-i\lambda_2 t}\right)\left(\sigma_1^* u_{11}^* e^{i\lambda_1 t}+\sigma_2^* u_{12}^* e^{i\lambda_2 t}\right)$$

$$|A_1(t)|^2=|\sigma_1|^2\cdot|u_{11}|^2+\sigma_1 u_{11}\sigma_2^* u_{12}^* e^{i(\lambda_2-\lambda_1)t}+\sigma_2 u_{12}\sigma_1^* u_{11}^* e^{i(\lambda_1-\lambda_2)t}+|\sigma_2|^2|u_{12}|^2$$

Αν $\sigma_k, \vec{u}_k$ είναι πραγματικά

$$e^{ix}+e^{-ix}=\begin{matrix}\cos x+i\sin x\\ \cos x-i\sin x\end{matrix}=2\cos x$$

$$|A_1(t)|^2=\sigma_1^2 u_{11}^2+\sigma_2^2 u_{12}^2+2\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}\cos[(\lambda_2-\lambda_1)t] \qquad \omega=\lambda_2-\lambda_1$$

$$|A_1(t)|^2=\sigma_1^2 u_{11}^2+\sigma_2^2 u_{12}^2+2\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}\cos\omega t \qquad \frac{2\pi}{T}=\lambda_2-\lambda_1$$

$$1=\sigma_1^2 u_{11}^2+\sigma_2^2 u_{12}^2+2\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12} \qquad \text{Αρχική Συνθήκη} \qquad T=\frac{2\pi}{\lambda_2-\lambda_1}$$

$$|A_1(t)|^2=1-2\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}+2\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}\cos\omega t$$

$$|A_1(t)|^2=1+2\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}(\cos\omega t-1)$$

$$-1\le\cos\omega t\le 1$$

$$-2\le\cos\omega t-1\le 0$$

$$-4\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}\le 2\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}(\cos\omega t-1)\le 0$$

$$1-4\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}\le 1+2\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}(\cos\omega t-1)\le 1$$

$$1-4\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}\le|A_1(t)|^2\le 1$$

$$\Rightarrow p=\text{maximum transfer percentage}=4\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}$$