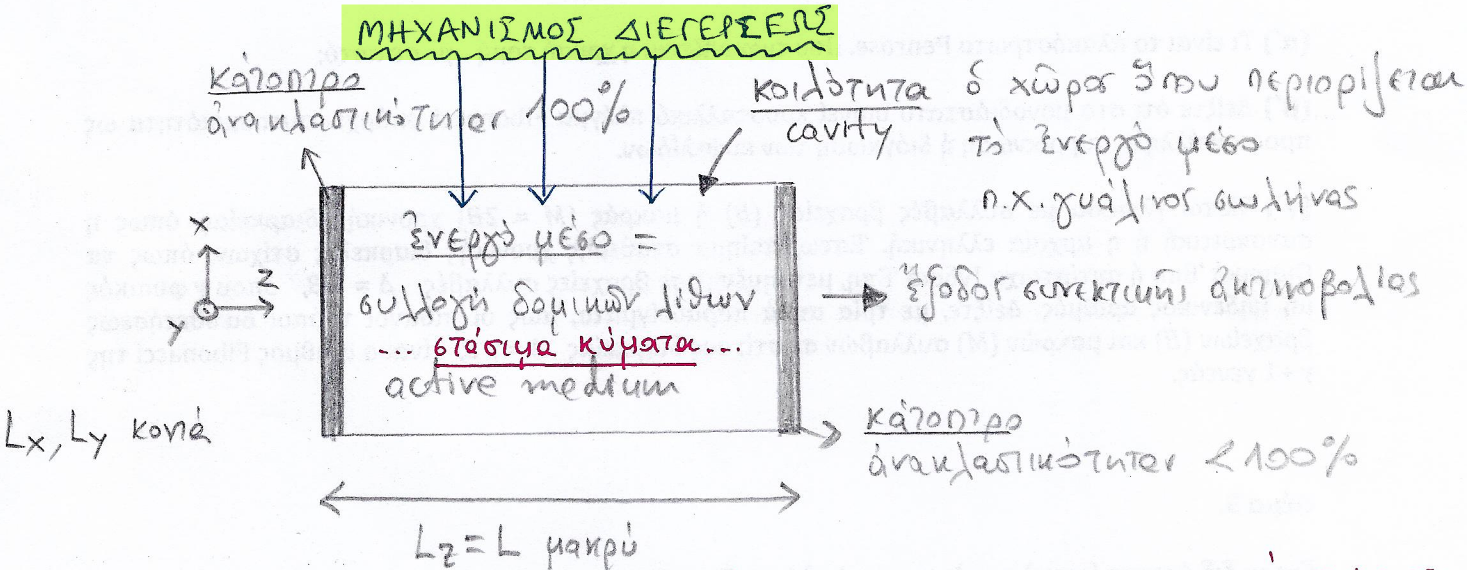
LASER = Light Amplification by **Stimulated Emission** of Radiation

XASER → X-LASER

IRASER → IR-LASER   to lase, lasing ...

UVASER → UV-LASER

atom ASER → atom LASER



η γεωμετρία της κοιλότητας καθορίζει τους επιτρεπόμενους κανονικούς τρόπους:

διαμήκεις τρόποι (longitudinal modes) z οπτικός άξων

εγκάρσιοι τρόποι (transverse modes) xy

ιδέες, θεωρία A. Einstein 1916-1917 Stimulated Emission

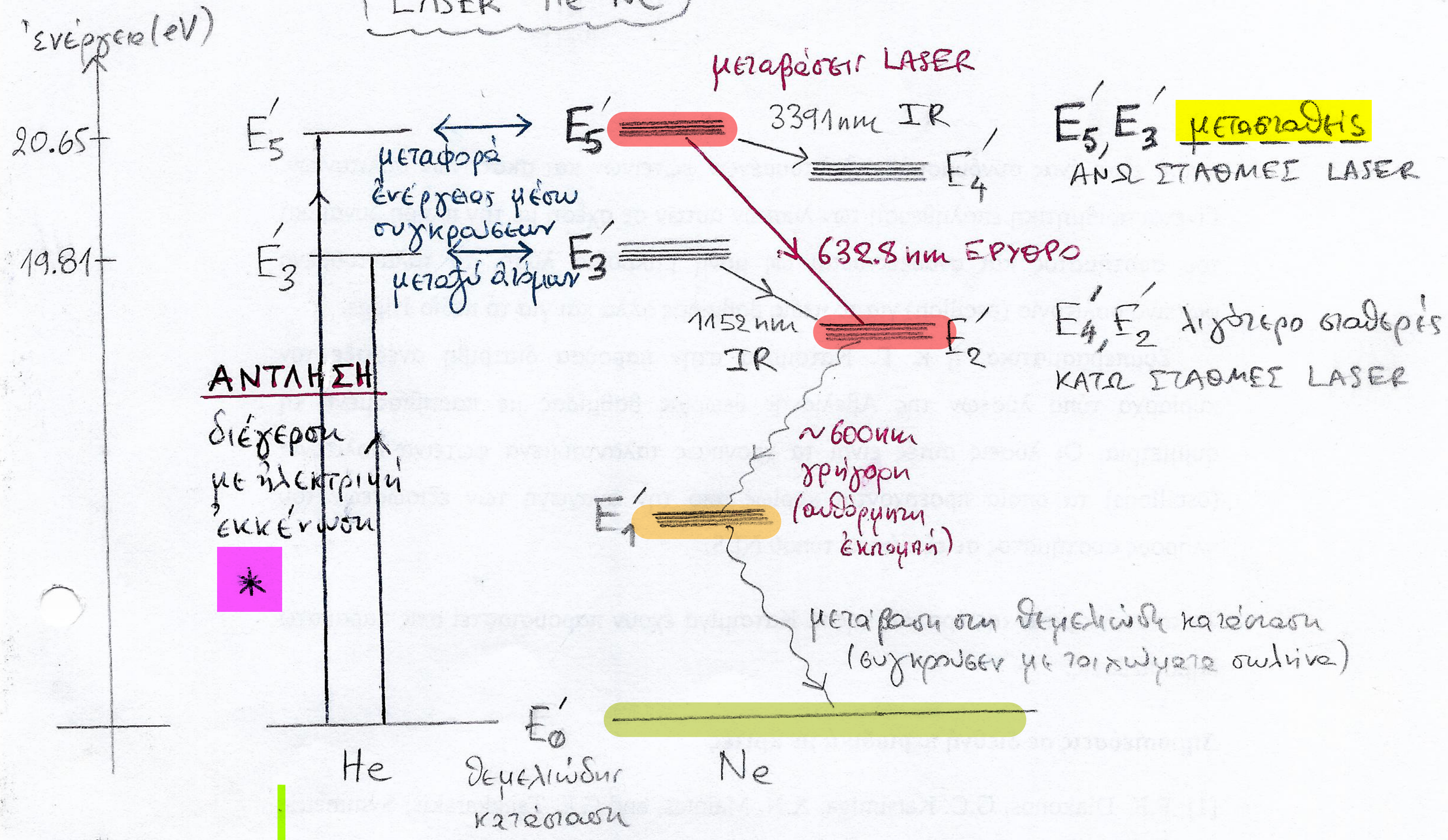
1950-1960 κατασκευάζονται τα πρώτα MASER κ LASER

1964 Nobel στους
Nikolay Basov
Aleksandr Prokhorov
Charles Townes

Τότε μερικοί είπαν "λύση σε αναζήτηση προβλήματος" (LASER)

σήμερα τα LASER χρησιμοποιούνται φυσική, θετικές επιστήμες ως εργαλείο
ιατρική, επικοινωνίες, καθ. ζωή, στρατό,
βιομηχανία, κοσμητική ...

LASER He-Ne



$\dfrac{\#Ne}{\#He} \simeq \dfrac{1}{10}$ τα περισσότερα είναι He, αλλά η εκπομπή συνεκτικής ακτινοβολίας οφείλεται στα Ne

* Τα επιταχυνόμενα ηλεκτρόνια συγκρούονται με άτομα He ή Ne και τα διεγείρουν, μεταβιβάζοντάς τους την κινητική τους ενέργεια. Η μεταβίβαση αυτή είναι αποτελεσματικότερη στα άτομα He (έχουν μικρή μάζα)

* Μετά, άτομα He διεγείρουν άτομα Ne $E_5 \simeq E_5'$, $E_3' \simeq E_3$

Δηλαδή τα άτομα He δεν συμμετέχουν στο lasing, αλλά αυξάνουν την απόδοση της διέγερσης των ατόμων Ne που συμμετέχουν στο lasing

Μετασταθής (metastable) εκ του ιταλικού meta = ημι, ήμισυ, μισό = μισοσταθερός

δηλ. ο χρόνος ζωής των E_5', E_3' δεν είναι μεν "άπειρος", αλλά είναι σημαντικός

Αντιθέτως, ο χρόνος ζωής των E_4', E_2' είναι κατά πολύ μικρότερος

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΟ ΓΙΑ ΝΑ ΕΠΙΤΕΥΧΘΕΙ ΑΝΑΣΤΡΟΦΗ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ

Τα ενεργειακά επίπεδα έχουν λεπτή δομή ⇒ οι μεταβάσεις δεν είναι συναρτήσεις δέλτα αλλά έχουν εύρος (κατανομή γύρω από ένα κεντρικό μήκος κύματος)

B

$\lambda_1 = 632.8$ nm ερυθρό, ελαφρώς προς πορτοκαλί

$\lambda_2 = 1152$ nm IR

$\lambda_2' = 1523$ nm IR

$\lambda_3 = 3391$ nm IR

$\lambda_4 = 543.5$ nm πράσινο

$\lambda_5 = 594.1$ nm κίτρινο

$\lambda_6 = 604.6$ nm πορτοκαλί

$\lambda_6' = 611.9$ nm πορτοκαλί

Το ποιό από αυτά τα χρώματα θα υποστηριχθεί, εξαρτάται από την κατασκευή της διατάξεως LASER πχ.

→ απόσταση δύο κατόπτρων (L)

→ επένδυση κατόπτρων με υλικό το οποίο ανακλά μόνο ένα χρώμα πχ ερυθρό

Τα φωτόνια αυτού του χρώματος διέρχονται πολλές φορές μέσω της κοιλότητας ⇒ πολλαπλασιάζονται μέσω εξαναγκασμένης εκπομπής ενώ τα άλλα φωτόνια διαπερνούν τα κάτοπτρα και εξέρχονται της κοιλότητας

Έτσι ∃ η πορτοκαλί, κίτρινα, πράσινα LASER He-Ne αλλά μεγαλύτερη απόδοση έχει το ερυθρό στα 632.8 nm

∃ ακόμα η δυνατότης συντονισμού (tuning) ⇒ δύο ή περισσότερα μήκη κύματος

η ενίσχυση που προσφέρει το ενεργό μέσο είναι ~ 2% σε ένα πέρασμα από το ένα κάτοπτρο στο άλλο

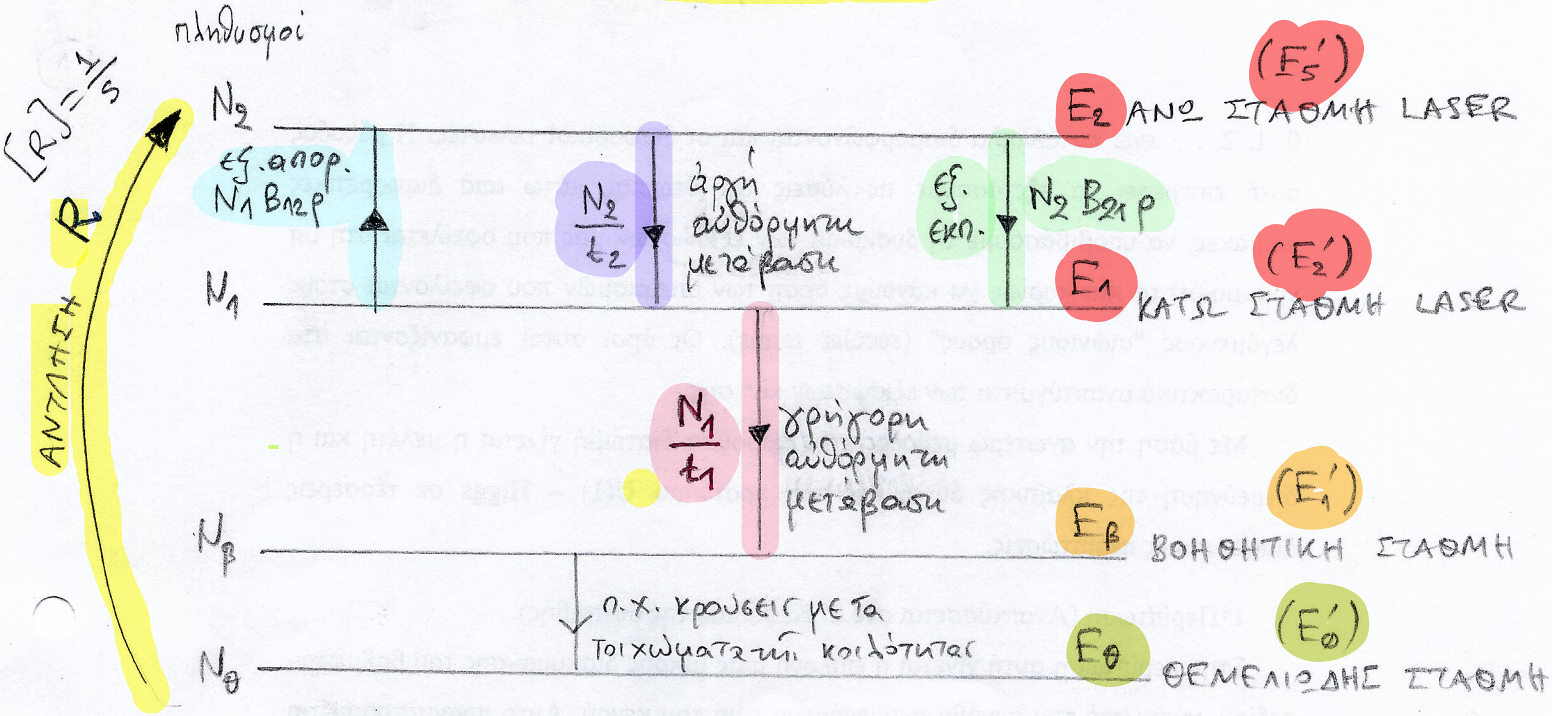
Ισχύς εξόδου 0.1 – 100 mW

ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΤΟΠΤΡΩΝ

100% 99%

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΥΘΜΩΝ

Γ



• $dW^{\alpha\upsilon\theta.\epsilon\kappa\pi}_{1\to\beta} = A_{1\beta}\,dt \qquad 1 := A_{1\beta}\,t_1 \Leftrightarrow t_1 := \frac{1}{A_{1\beta}}$

$= \frac{dt}{t_1}$

χρόνος ζωής της στάθμης 1

$dW^{\alpha\upsilon\theta.\epsilon\kappa\pi}_{2\to1} = A_{21}\,dt \qquad 1 := A_{21}\cdot t_2 \Leftrightarrow t_2 := \frac{1}{A_{21}}$

$= \frac{dt}{t_2}$

χρόνος ζωής της στάθμης 2

$dN^{\alpha\upsilon\theta.\epsilon\kappa\pi}_{1\to\beta} = N_1 A_{1\beta}\,dt = \frac{N_1}{t_1}\,dt \Rightarrow \frac{dN^{\alpha\upsilon\theta.\epsilon\kappa\pi}_{1\to\beta}}{dt} = \frac{N_1}{t_1}$ ρυθμός $[\;] = \frac{1}{s}$

$dN^{\alpha\upsilon\theta.\epsilon\kappa\pi}_{2\to1} = N_2 A_{21}\,dt = \frac{N_2}{t_2}\,dt \Rightarrow \frac{dN^{\alpha\upsilon\theta.\epsilon\kappa\pi}_{2\to1}}{dt} = \frac{N_2}{t_2}$ ρυθμός $[\;] = \frac{1}{s}$

• $dW^{\epsilon\xi.\epsilon\kappa\pi}_{2\to1} = B_{21}\,\rho(\nu)\,dt$

$dN^{\epsilon\xi.\epsilon\kappa\pi}_{2\to1} = N_2 B_{21}\,\rho(\nu)\,dt \Rightarrow \frac{dN^{\epsilon\xi.\epsilon\kappa\pi}_{2\to1}}{dt} = N_2 B_{21}\,\rho(\nu)$ ρυθμός $[\;] = \frac{1}{s}$

- $dW^{\text{εξ.απορ}}_{1\to 2} = B_{12}\,\rho(\nu)\,dt$

$dN^{\text{εξ.απορ}}_{1\to 2} = N_1 \cdot B_{12}\,\rho(\nu)\,dt \Rightarrow \dfrac{dN^{\text{εξ.απορ}}_{1\to 2}}{dt} = N_1 B_{12}\,\rho(\nu)$ ρυθμός $[\ ] = \frac{1}{s}$

- Αν είχαμε θερμοδυναμική ισορροπία θα γράφαμε

$$dN_{1\to 2} = dN_{2\to 1} \Leftrightarrow$$

$$N_1\, dW^{\text{εξ.απορ}}_{1\to 2} = N_2\left(dW^{\text{αυθ.εκπ}}_{2\to 1} + dW^{\text{εξ.εκπ}}_{2\to 1}\right) \Leftrightarrow$$

$$N_1 B_{12}\,\rho(\nu T)\,dt = N_2\left(A_{21}\,dt + B_{21}\,\rho(\nu T)\,dt\right)$$

$\ldots \Rightarrow$ νόμος Planck κ $B_{12} = B_{21} := B$ $\quad A_{21} := A$

$\dfrac{A}{B} = \dfrac{8\pi h\nu^3}{c^3}$ $\quad E_2 - E_1 = h\nu$

- ΤΩΡΑ ΟΜΩΣ ΕΧΟΥΜΕ απώλειες και άντληση

απώλειες $\downarrow$ t_0 $\quad$ άντληση $\downarrow$ R

ΕΠΙΣΗΣ $\rho(\nu)$ (όχι $\rho(\nu, T)$)

Άρα, αναμένουμε να δούμε $N_1 = N_1(R, t_0, t_1, t_2)$

$$N_2 = N_2(R, t_0, t_1, t_2)$$

$$\rho = \rho(R, t_0, t_1, t_2)$$

Θα κατασκευάσουμε τις διαφορικές εξισώσεις των ρυθμών

με την απλοποίηση $A_{21} = A$, $B_{21} = B_{12} = B$

$$A = \frac{1}{t_2}$$

Ⓔ

αυθ. εκπ.   ...   .

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{N_2}{t_2} + N_2 B_{21}\rho - \frac{N_1}{t_1} - N_1 B_{12}\rho \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dN_1}{dt} = AN_2 + (N_2 - N_1)B\rho - \frac{N_1}{t_1}}$$

$$[A] = \frac{1}{s}$$

$$[B] = \frac{m^3\,Hz}{sJ} = \frac{m^3}{Js^2}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = R + N_1 B_{12}\rho - \frac{N_2}{t_2} - N_2 B_{21}\rho$$

$$\boxed{\frac{dN_2}{dt} = R + (N_1 - N_2)B\rho - AN_2}$$

$$[\rho] = \frac{J}{m^3\,Hz} = \frac{Js}{m^3} \qquad [R] = \frac{1}{s}$$

$$\left[\frac{d\rho}{dt}\right] = \frac{J}{m^3} = [\text{αριστερό μέλος}]$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \underbrace{-\frac{\rho}{t_0}}_{\text{φαινομενολογικά, η απώλεια στα κάτοπτρα}} + \left[-N_1 B_{12}\rho + N_2 B_{21}\rho + \underline{A'_{21} N_2}\right]\frac{h\nu}{V}F(\nu)$$

Η αυθόρμητη εκπομπή γίνεται προς οποιαδήποτε διεύθυνση, όποτε, δεν καρπωνόμαστε όλο το $A_{21}N_2$ για αύξηση της ΗΜ ακτινοβ. στην κοιλότητα.

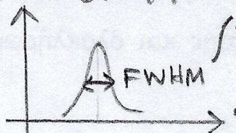
$$\left[\frac{\rho}{t_0}\right] = \left[\frac{J}{m^3}\right]$$

Καρπωνόμαστε μόνο όσα φωτόνια εκπέμπονται σε διεύθυνση περίπου παράλληλη στον άξονα, τον οποίο ορίζουν τα δύο κάτοπτρα

$F(\nu)$ δείχνει τη μορφή της γραμμής εκπομπής

συνάρτηση φασματικής γραμμής

$$[F(\nu)] = \frac{1}{Hz}$$



$$\int F(\nu)d\nu = 1$$

FWHM = Full Width at Half Maximum

Πλήρες Εύρος στο Ήμισυ του Μεγίστου

Για το λόγο αυτό, μας αφορά μόνο ένα μικρό κομμάτι της ολικής στερεάς γωνίας

Για αυτό βάζουμε A'_{21} και όχι A_{21}

$$\left[\frac{h\nu}{V}F(\nu)\right] = \frac{J}{m^3\,Hz} = \frac{Js}{m^3}$$

$$A'_{21} \ll A_{21}$$

$$[\text{δεξιό μέλος}] = \frac{J}{m^3}$$

π.χ. $A'_{21} = 10^{-9} A_{21}$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{t_0} + \left[(N_2 - N_1)B\rho + A'N_2\right]\frac{h\nu}{V}F(\nu)}$$

αν και μικρός, είναι ο μόνος που οδηγεί σε $\frac{d\rho}{dt} > 0$ όταν ακόμα $\nexists\ \rho$ στην κοιλότητα

$$\frac{dN_1}{dt} = AN_2 + (N_2 - N_1)B\rho - \frac{N_1}{t_1}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -AN_2 + (N_1 - N_2)B\rho + R$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{t_0} + \left[(N_2 - N_1)B\rho + A'N_2\right]\frac{h\nu}{V}F(\nu)$$

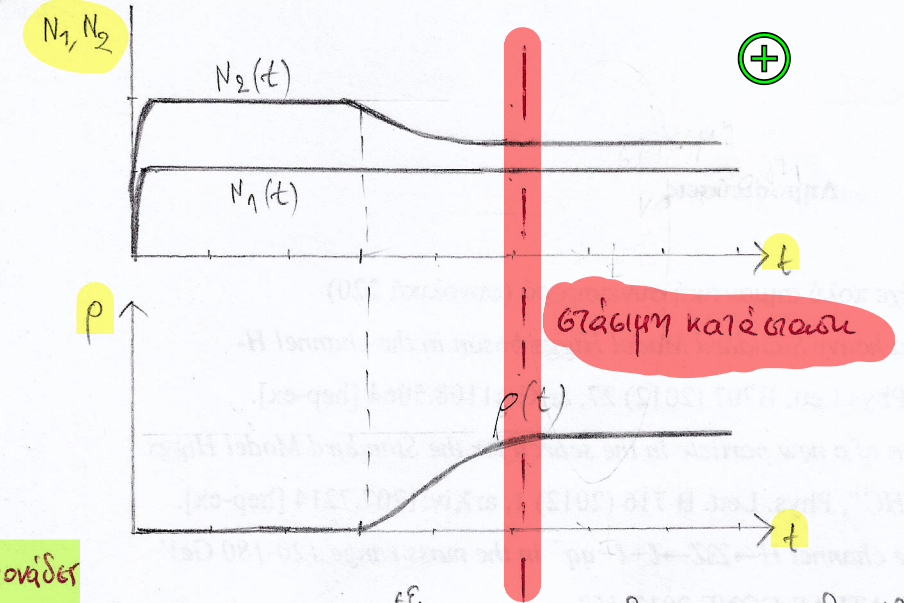
$$n_i := \frac{N_i}{V} \qquad r := \frac{R}{V}$$

$$\frac{dn_1}{dt} = An_2 + (n_2 - n_1)B\rho - \frac{n_1}{t_1}$$

$$\frac{dn_2}{dt} = -An_2 + (n_1 - n_2)B\rho + r$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{t_0} + \left[(n_2 - n_1)B\rho + A'n_2\right]h\nu F(\nu)$$

Προς Ζ



μονάδες

αυθ. εκπ. εξ. εκπ. απορ. αυθ. εκπ προς βοηθ. στάθμη

$\frac{1}{s}$ $$\frac{dN_1}{dt} = AN_2 + (N_2 - N_1)B\rho - \frac{N_1}{t_1}$$

$$A = A_{21} = \frac{1}{t_2} \qquad A_{1\beta} = \frac{1}{t_1}$$

αυθ. εκπ. εξ. απορ. εκπ. άντληση

$\frac{1}{s}$ $$\frac{dN_2}{dt} = -AN_2 + (N_1 - N_2)B\rho + R$$

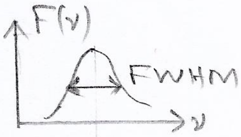
$$B_{21} = B_{12} = B \qquad \rho(\nu)$$

εξ. εκπ. απορ. αυθ. εκπ

$\frac{J}{m^3}$ $$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{t_0} + \left[(N_2 - N_1)B\rho + A'N_2\right]\frac{h\nu}{V}F(\nu)$$

V: όγκος κοιλότητας

φασματική συνάρτηση



$$\int F(\nu)\,d\nu = 1 \qquad [F(\nu)] = \frac{1}{Hz}$$

φαινομενολογικώς οι απώλειες στα κάτοπτρα

Προσοχή στη σταθερά

$$n_i := \frac{N_i}{V} \qquad r := \frac{R}{V}$$

$\frac{1}{m^3 \cdot s}$ $$\frac{dn_1}{dt} = An_2 + (n_2 - n_1)B\rho - \frac{n_1}{t_1}$$

$\frac{1}{m^3 s}$ $$\frac{dn_2}{dt} = -An_2 + (n_1 - n_2)B\rho + r$$

$\frac{J}{m^3}$ $$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{t_0} + \left[(n_2 - n_1)B\rho + A'n_2\right]h\nu F(\nu)$$

Ασκησούλα

Να εκτιμηθεί ο παράγων A' για κυλινδρική κοιλότητα ακτίνας $r = 1\,mm$ και μήκους $L = 10\,cm$, για $\Delta\Sigma$ που βρίσκεται στο κέντρο της κοιλότητας

$$\Delta\Omega \approx \frac{\Delta S}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{\pi r^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = 4\pi\left(\frac{r}{L}\right)^2$$

$$\frac{A'}{A} = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_{o\lambda}} = \left(\frac{r}{L}\right)^2 = \left(\frac{1}{100}\right)^2 = 10^{-4}$$

οπότε, κατά προσέγγιση

$$\frac{A'}{A} = \frac{1}{V}\int_V d^3r\,\frac{\Delta\Omega}{\Omega_{o\lambda}}$$

ΣΤΑΣΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = 0 = \frac{d\rho}{dt}$$

$$\boxed{AN_2 + B\rho(N_2 - N_1) - \frac{N_1}{t_1} = 0} \quad (1)$$

$$\boxed{-AN_2 + B\rho(N_1 - N_2) + R = 0} \quad (2)$$

$$-\frac{\rho}{t_0} + \left[B\rho(N_2 - N_1) + A'N_2\right]\frac{h\nu}{V}F(\nu) = 0$$

$A' << A$
άς το αγνοήσουμε στη στάσιμη κατάσταση

$$\boxed{-\frac{\rho}{t_0} + B\rho(N_2 - N_1)\frac{h\nu}{V}F(\nu) = 0} \quad (3) \rightarrow \boxed{B\rho(N_2 - N_1) = \frac{\rho}{t_0 \frac{h\nu}{V}F(\nu)}} \quad (3')$$

$(1)(2)\oplus \quad R = \frac{N_1}{t_1} \Rightarrow \boxed{N_1 = t_1 R}$ (A)

ανάλογο της άντλησεως με συντ. αναλογίας t_1

$(2)(3')\oplus \quad -AN_2 + R = \frac{\rho}{t_0 \frac{h\nu}{V}F(\nu)} \Rightarrow R - \frac{\rho}{t_0 \frac{h\nu}{V}F(\nu)} = AN_2 \Rightarrow$

$$\boxed{N_2 = \frac{R}{A} - \frac{\rho}{At_0 \frac{h\nu}{V}F(\nu)}} \quad (4)$$

$\underset{\sim\sim}{\rho = 0}$ ή $\underset{\sim\sim}{\rho > 0}$

(π1)

$\underset{\sim\sim}{\rho = 0} \Rightarrow N_2 = \frac{R}{A} \Rightarrow \boxed{N_2 = t_2 R}$ (Βπ1)

ανάλογο της άντλησεως με συντ. αναλογίας t_2

(π2)

$\underset{\sim\sim}{\rho > 0} \xRightarrow{(4)} \left.\begin{matrix} \frac{R}{A} - N_2 > 0 \Rightarrow R > AN_2 \\ N_1 = t_1 R \\ A = 1/t_2 \end{matrix}\right\} \frac{N_1}{t_1} > AN_2 = \frac{N_2}{t_2} \Rightarrow \boxed{\frac{t_2}{N_2} > \frac{t_1}{N_1}}$

για $\rho \neq 0 \Rightarrow$ απλοποιούνται τα ρ στην (3')

$(3'),(4),(A) \Rightarrow \quad B\left(\frac{R}{A} - \frac{\rho}{At_0 \frac{h\nu}{V}F(\nu)}\right) - Bt_1 R = \frac{1}{t_0 \frac{h\nu}{V}F(\nu)} \Rightarrow$ λύνουμε ως προς ρ

$\oplus \quad \left.\rho = Rt_0 \frac{h\nu}{V}F(\nu)\frac{t_2 - t_1}{t_2} - \frac{1}{Bt_2}\right\} \rightarrow$ άν $t_2 < t_1 \Rightarrow \rho < 0 \Rightarrow$

$\rho > 0$

$$\boxed{t_2 > t_1}$$

$\rho > \emptyset$

$\Rightarrow R > \boxed{\dfrac{1}{B t_0 (t_2 - t_1) \frac{h\nu}{V} F(\nu)} := R_c \text{ κρίσιμη ένταση}}$ RC

λύνοντας ως προς R

$\varphi := t_0 \dfrac{h\nu}{V} F(\nu)$ (φ)

$R_c = \dfrac{1}{B\varphi(t_2 - t_1)}$ (5) $\Rightarrow \varphi = \dfrac{1}{BR_c(t_2 - t_1)}$

$\Rightarrow \boxed{\rho = \dfrac{AR}{BR_c} - \dfrac{A}{B}}$ (Γ)

(4) (5) $N_2 = t_2 R - \dfrac{1}{A\varphi}\left(\dfrac{AR}{BR_c} - \dfrac{\cancel{A}}{B}\right)$

$N_2 = t_2 R - \cancel{BR_c}(t_2 - t_1)\dfrac{R}{\cancel{BR_c}} + \dfrac{\cancel{B}R_c(t_2 - t_1)}{\cancel{B}}$

$\Rightarrow \boxed{N_2 = t_1 R + (t_2 - t_1) R_c}$ (ΒΠ?)

$N_2 = \cancel{t_2 R} - \cancel{t_2 R} + t_1 R + R_c(t_2 - t_1) \Rightarrow$

Συνοψίζοντας, στη στάσιμη κατάσταση $\dfrac{dN_1}{dt} = \dfrac{dN_2}{dt} = 0 = \dfrac{d\rho}{dt}$

$$N_1 = t_1 R \quad \forall R$$

$$N_2 = \begin{cases} t_2 R & \forall R \le R_c \\ t_1 R + (t_2 - t_1) R_c & \forall R \ge R_c \end{cases}$$

$\dfrac{t_2}{N_2} > \dfrac{t_1}{N_1}$

$t_2 > t_1$

$$\rho = \begin{cases} \emptyset & \forall R \le R_c \\ \dfrac{AR}{BR_c} - \dfrac{A}{B} = \dfrac{1}{B t_2 R_c} R - \dfrac{1}{B t_2} & \forall R \ge R_c \end{cases}$$

αναστροφή πληθυσμού $\Delta N := N_2 - N_1 \Rightarrow$

$$\Delta N = \begin{cases} (t_2 - t_1) R & \forall R \le R_c \\ (t_2 - t_1) R_c & \forall R \ge R_c \end{cases}$$

Άρα $\Delta N > 0 \iff t_2 > t_1$

Η'

$\rho > \Phi \Rightarrow$ (λύνοντας ως προς R)

$$R > \boxed{\frac{1}{Bt_0(t_2-t_1)\frac{h\nu}{V}F(\nu)} := R_c \text{ κρίσιμη άντληση } = \frac{1}{B\varphi(t_2-t_1)}}^{\,R_c} \Leftrightarrow \varphi = \frac{1}{BR_c(t_2-t_1)} \quad (5)$$

$$\varphi := t_0 \frac{h\nu}{V} F(\nu) \quad (\varphi)$$

$$\oplus \Rightarrow \rho = R\,\frac{1}{BR_c(t_2-t_1)}\,\frac{(t_2-t_1)}{t_2} - \frac{1}{Bt_2} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{A}{B}\frac{R}{R_c} - \frac{A}{B}} \quad (\Gamma)$$

$$\begin{matrix}(4)\\(5)\end{matrix} \Rightarrow N_2 = t_2 R - \frac{1}{\cancel{A}\varphi}\left(\frac{\cancel{A}}{B}\frac{R}{R_c} - \frac{\cancel{A}}{B}\right) = t_2 R - \frac{R}{\varphi B R_c} + \frac{1}{\varphi B}$$

$$N_2 = t_2 R - (t_2-t_1)R + R_c(t_2-t_1) \Rightarrow$$

$$\boxed{N_2 = t_1 R + (t_2-t_1)R_c} \quad (\text{ΒΠ2})$$

(θ)

$$R_c := \frac{1}{B t_0 (t_2 - t_1)\frac{h\nu}{V}F(\nu)}$$

(I) $t_0 \uparrow \Rightarrow \frac{P}{t_0}$ απώλειες στα κάτοπτρα $\downarrow$

$\Rightarrow R_c \downarrow$

(II) $R_c > 0 \Leftrightarrow t_2 > t_1$

(III) $(t_2 - t_1)\uparrow \Rightarrow R_c \downarrow$

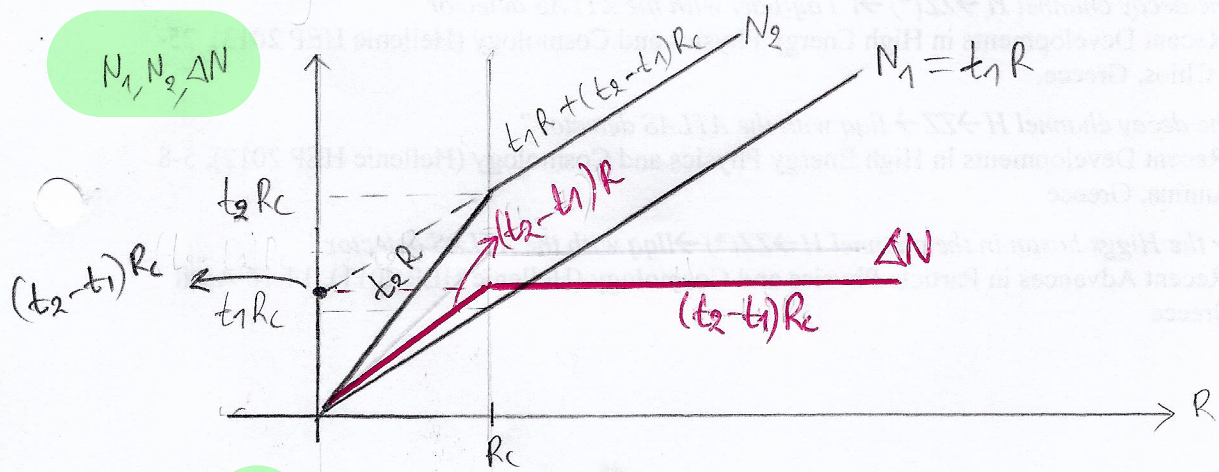
$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \Leftrightarrow \frac{1}{B} = \frac{8\pi h\nu^3 t_2}{c^3} \Rightarrow$$

$$R_c = \frac{8\pi h\nu^3 t_2}{t_0(t_2-t_1)\frac{h\nu}{V}F(\nu)\,c^3} \propto \nu^2 \Rightarrow R_c(\text{μικροκύματα}) < R_c(\text{ορατό})$$

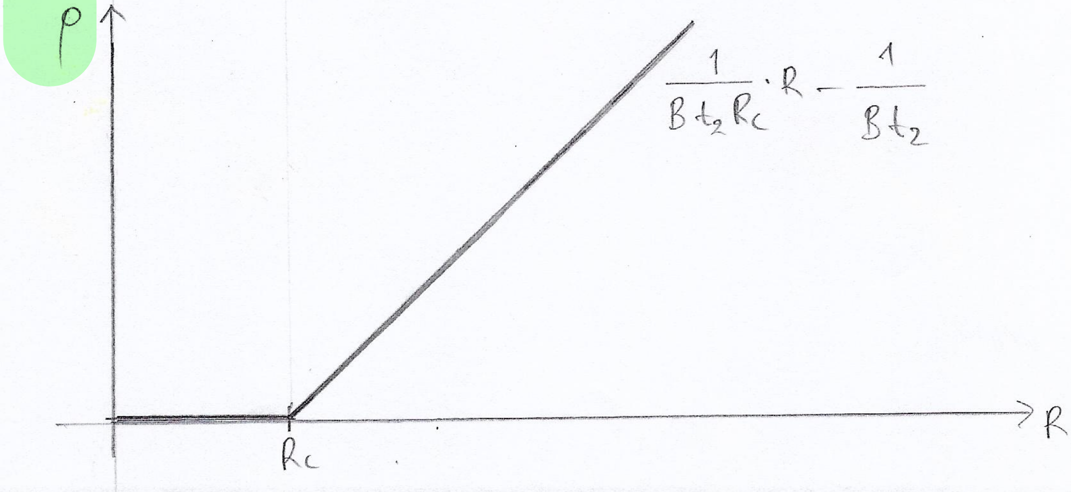
Όλα αυτά έχουν νόημα εφ' όσον επιτρέπεται η μετάπτωση από την άνω στάθμη (2) στην κάτω στάθμη (1) και αντιστρόφως

Θα πρέπει $\int d^3r\, \Phi_1^*(\vec{r})\, \vec{r}\, \Phi_2(\vec{r}) \neq 0$

$N_1, N_2, \Delta N$



P



(I)

$n_i := \frac{N_i}{V}$ $\qquad r := \frac{R}{V}$ $\qquad r_c := \frac{R_c}{V}$

$[n_i] = \frac{1}{m^3}$ $\qquad [r] = \frac{1}{s\cdot m^3}$ $\qquad [r_c] = \frac{1}{s\cdot m^3}$

$n_1 = t_1 r \quad \forall r$

$$n_2 = \begin{cases} t_2 r & \forall r \le r_c \\ t_1 r + (t_2 - t_1) r_c & \forall r \ge r_c \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 0 & \forall r \le r_c \\ \frac{1}{B t_2 r_c}\cdot r - \frac{1}{B t_2} & \forall r \ge r_c \end{cases}$$

$$\Delta n := n_2 - n_1 = \begin{cases} (t_2 - t_1) r & \forall r \le r_c \\ (t_2 - t_1) r_c & \forall r \ge r_c \end{cases}$$

$:n_0$

dW

$\cdot B t_2$ Ας τις κάνουμε αδιάστατες...

$n_0 := t_2 r_c$ $\qquad [n_0] = s \cdot \frac{1}{s m^3} = \frac{1}{m^3}$ ⇒ χρήσιμο για αδιαστατοποίηση των n_i

$\tau := \frac{t}{t_2}$ $\qquad [\tau] = 1$ δηλαδή μετράμε το χρόνο σε πολλαπλάσια του χρόνου ζωής της άνω στάθμης

$\tau_0 := \frac{t_0}{t_2}$ $\qquad [\tau_0] = 1$

$\tau_1 := \frac{t_1}{t_2}$ $\qquad [\tau_1] = 1$

$r_N := \frac{r}{r_c}$ $\qquad [r_N] = 1$

$\rho := B t_2 \rho$ $\qquad [\rho] = \frac{m^3 Hz}{J\,\cancel{s}} \cdot \cancel{s} \cdot \frac{J}{m^3 Hz} = 1$ ⊕

$\nu_1 := \frac{n_1}{n_0}$ $\qquad [\nu_1] = 1$

$\nu_2 := \frac{n_2}{n_0}$ $\qquad [\nu_2] = 1$

εξαρτώνται μόνο από τ_1, r_N

$\nu_1 = \tau_1 r_N \quad \forall r_N$

$$\nu_2 = \begin{cases} r_N & \forall r_N \le 1 \\ \tau_1 r_N + (1 - \tau_1) & \forall r_N \ge 1 \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 0 & \forall r_N \le 1 \\ r_N - 1 & \forall r_N \ge 1 \end{cases}$$

$$\Delta\nu := \nu_2 - \nu_1 = \begin{cases} (1 - \tau_1) r_N & \forall r_N \le 1 \\ (1 - \tau_1) & \forall r_N \ge 1 \end{cases}$$

⊕ π.χ. $dW = B \rho\, dt \Rightarrow [B] = \frac{1}{[\rho]\cdot[dt]} = \frac{m^3 Hz}{J \cdot s}$

ή $[B \rho\, dt] = 1$ ή $[B \rho t] = 1$

ΙΑ

π.χ. για $\tau_1 = 0.5$ $r_N = 1.5$

$\nu_1 = 0.75$

$\nu_2 = 1.25$

$\Delta\nu = 0.5$

$\sigma = 0.5$

π.χ. για $\tau_1 = 0.5$ $r_N = 0.5$

$\nu_1 = 0.25$

$\nu_2 = 0.5$

$\Delta\nu = 0.25$

$\sigma = 0$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΡΥΘΜΩΝ

$$\frac{dn_1}{dt} = An_2 + (n_2 - n_1)B\rho - \frac{n_1}{t_1} \qquad \cdot \frac{t_2}{n_0} \qquad n_i := \frac{N_i}{V}$$

$$\frac{dn_2}{dt} = -An_2 + (n_1 - n_2)B\rho + r \qquad \cdot \frac{t_2}{n_0} \qquad r := \frac{R}{V}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{t_0} + \left[(n_2 - n_1)B\rho + A'n_2\right] h\nu F(\nu) \qquad \cdot B t_2^2$$

$$r_c := \frac{R_c}{V}$$

$$\boxed{\frac{d\nu_1}{d\tau} = \nu_2 + (\nu_2 - \nu_1)\varrho - \frac{\nu_1}{\tau_1}} \quad *1 \qquad R_c := \frac{1}{B t_0 (t_2 - t_1) \frac{h\nu}{V} F(\nu)}$$

$$\boxed{\frac{d\nu_2}{d\tau} = -\nu_2 + (\nu_1 - \nu_2)\varrho + r_N} \quad *2 \qquad r_c = \frac{1}{B t_0 (t_2 - t_1) h\nu F(\nu)}$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \left[\frac{(n_2 - n_1)B\rho B t_2^2 + A'n_2 B t_2^2}{n_0}\right] h\nu F(\nu) \cdot n_0$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \left[(\nu_2 - \nu_1)\varrho + \frac{A'}{A}\nu_2\right] B t_2 h\nu F(\nu) t_2 r_c$$

$$\frac{B t_2 \cancel{h\nu F(\nu)} t_2}{B t_0 (t_2 - t_1) \cancel{h\nu F(\nu)}} = \frac{1}{\tau_0 (1 - \tau_1)}$$

$$\boxed{\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \left[(\nu_2 - \nu_1)\varrho + \frac{A'}{A}\nu_2\right] \frac{1}{\tau_0 (1 - \tau_1)}} \quad *3$$

Οι $*1, *2, *3$ είναι αδιάστατες: όλα τα μεγέθη είναι αδιάστατα

τα ν_1, ν_2, ϱ εξαρτώνται από τα $\tau_0, \tau_1, r_N, \frac{A'}{A}$

laser.m

calllasercommands.m

γενικώς

ΑΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

στάσιμη κατάσταση

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = -\frac{\nu_1}{\tau_1} + \varrho(\nu_2-\nu_1) + \nu_2$$

$$\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \varrho(\nu_1-\nu_2) - \nu_2$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \left[\varrho(\nu_2-\nu_1) + \frac{A'}{A}\nu_2\right]\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)}$$

$$\nu_1 = \tau_1 r_N$$

$$\nu_2 = \begin{cases} r_N & r_N<1 \\ \tau_1 r_N + (1-\tau_1) & r_N \geq 1 \end{cases}$$

$$\varrho = \begin{cases} 0 & r_N<1 \\ r_N - 1 & r_N \geq 1 \end{cases}$$

$$\Delta\nu := \nu_2-\nu_1 = \begin{cases} (1-\tau_1) r_N & r_N<1 \\ (1-\tau_1) & r_N \geq 1 \end{cases}$$

Επί παραδείγματι: $\tau_0 = 10$, $\frac{A'}{A} = 10^{-9}$, $\tau_1 = 0.5$ $r_N = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$

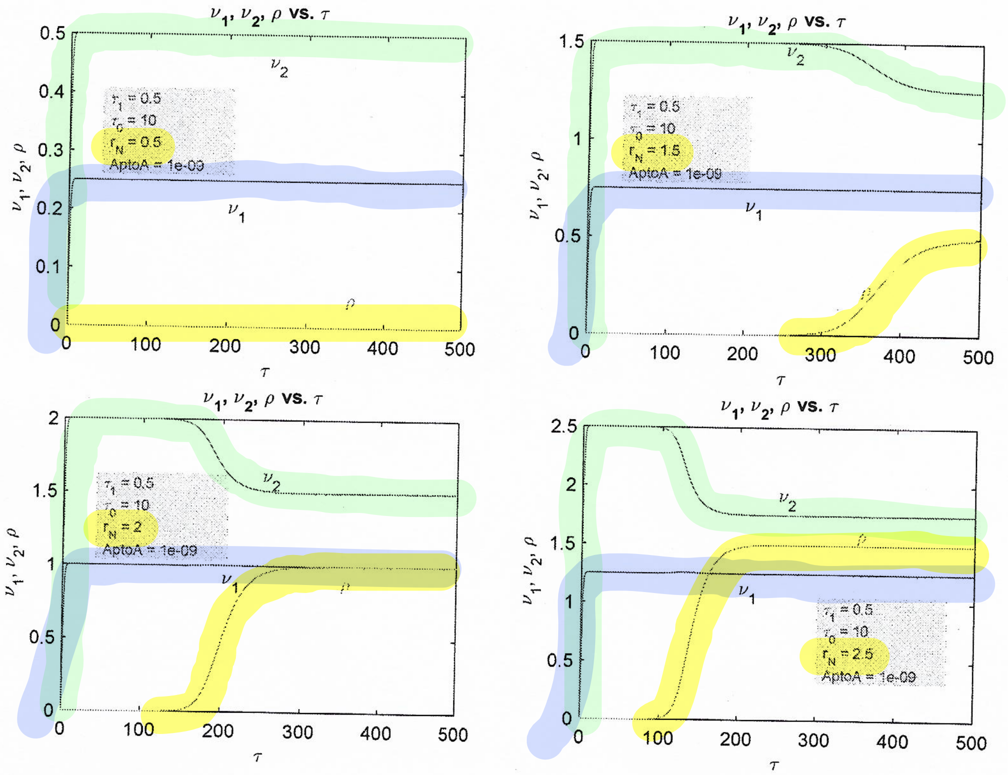
	Στη στάσιμη κατάσταση			
r_N	ν_1	ν_2	ϱ	$\Delta\nu$
0.5	0.25	0.5	0	0.25
1	0.5	1.0	0	0.5
1.5	0.75	1.25	0.5	0.5
2	1.0	1.5	1.0	0.5
2.5	1.25	1.75	1.5	0.5

Επίσης $r_N \uparrow \Rightarrow \frac{d\nu_2}{d\tau} \uparrow \Rightarrow$

$\frac{A'}{A}\nu_2 \uparrow \Rightarrow \frac{d\varrho}{d\tau} \uparrow \Rightarrow$

η ϱ γίνεται γρηγορότερα αισθητή

Εν είδει παραδείγματος, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να δούμε την επίδραση της μεταβολής του r_N στη μεταβολή των ν_1, ν_2, ϱ συναρτήσει του τ. Ας υποθέσουμε ότι κρατάμε σταθερά τα $\tau_0 = 10$, $\frac{A'}{A} = 10^{-9}$ και $\tau_1 = 0.5$. Ας μεταβάλουμε το r_N θέτοντας τις τιμές 0.5, 1.5, 2.0, 2.5. Το αποτέλεσμα της επιλύσεως των εξισώσεων των ρυθμών με τα προγράμματα μας φαίνεται στο Σχήμα 5.9. Παρατηρούμε αρχικά ότι όταν πια οι τιμές των ν_1, ν_2, ϱ έχουν σταθεροποιηθεί, δηλαδή έχουμε φτάσει στην στάσιμη κατάσταση, αυτές συμπίπτουν με τις προβλέψεις των Εξ. 5.69, 5.70, 5.71. Ακόμα, αξίζει να σημειώσουμε γιατί υπάρχει διαφορά στο χρόνο που χρειάζεται η ϱ για να γίνει αισθητή. Ο λόγος είναι ότι αυξάνοντας την αδιάστατη άντληση r_N, αυξάνεται ο ν_2 λόγω της Εξ. 5.74, οπότε στην Εξ. 5.75 αυξάνεται ο όρος $\frac{A'}{A}\nu_2$ που είναι ο μοναδικός που οδηγεί σε $\frac{d\varrho}{d\tau} > 0$ όταν το ϱ είναι αμελητέο.



Σχήμα 5.9: Η επίδραση της μεταβολής του r_N στη μεταβολή των ν_1, ν_2, ϱ συναρτήσει του τ. Κρατάμε σταθερά τα $\tau_0 = 10$, $\frac{A'}{A} = 10^{-9}$ και $\tau_1 = 0.5$, ενώ μεταβάλλουμε το r_N θέτοντας τις τιμές 0.5, 1.5, 2.0, 2.5. Στην εικόνα εμφανίζεται ρ αλλά πρόκειται για το αδιάστατο ϱ της Εξ. 5.75.