$$i\begin{bmatrix}\dot c_1(t)\\ \dot c_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\omega & g\sqrt{n}\\ g\sqrt{n} & \Omega+(n-1)\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{bmatrix}\qquad x(t):=\begin{bmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{bmatrix}\qquad A:=\begin{bmatrix}n\omega & g\sqrt{n}\\ g\sqrt{n} & \Omega+(n-1)\omega\end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t)\qquad\qquad A\qquad\qquad \vec{x}(t)$$

$\Rightarrow\ i\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)$, ΔΛΜ $\vec{x}(t)=\vec{u}e^{-i\lambda t}\ \Rightarrow\ A\vec{u}=\lambda\vec{u}$

πρόβλημα ιδιοανυσμάτων - ιδιοτιμών

$A\vec{u}=\lambda\vec{u}\ \Rightarrow\ \dots$

$\lambda_1,\ \vec{u}_1\qquad \vec{u}_1e^{-i\lambda_1 t}$ μερική λύση

$\lambda_2,\ \vec{u}_2\qquad \vec{u}_2e^{-i\lambda_2 t}$ μερική λύση

γενική λύση

$\Rightarrow\ \vec{x}(t)=\sigma_1\vec{u}_1e^{-i\lambda_1 t}+\sigma_2\vec{u}_2e^{-i\lambda_2 t}$

για $t=0$ (αρχ. συνθήκη) $\quad \vec{x}(0)=\sigma_1\vec{u}_1+\sigma_2\vec{u}_2$

$$\underset{2\times1}{\begin{bmatrix}c_1(0)\\ c_2(0)\end{bmatrix}}=\sigma_1\underset{2\times1}{\begin{bmatrix}u_{11}\\ u_{21}\end{bmatrix}}+\sigma_2\underset{2\times1}{\begin{bmatrix}u_{12}\\ u_{22}\end{bmatrix}}\qquad (*)$$

Χρησιμοποιώντας τους πίνακες $\quad X(0):=\begin{bmatrix}c_1(0)\\ c_2(0)\end{bmatrix}\quad U:=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}\quad \Sigma:=\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{bmatrix}$

συνιστώσες 1ου ιδιοανύσματος — συνιστώσες 2ου ιδιοανύσματος

η σχέση $(*)$ γράφεται

$$\underset{2\times1}{\begin{bmatrix}c_1(0)\\ c_2(0)\end{bmatrix}}=\underset{2\times2}{\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}}\underset{2\times1}{\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{bmatrix}}$$

δηλαδή $\quad X(0)=U\cdot\Sigma\ \Rightarrow\ \Sigma=U^{-1}\cdot X(0)\quad$ αρκεί δηλ. ο U να είναι αντιστρέψιμος

ΧΡΟΝΟΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

$$\hat{H}_{JC}|\psi_A\rangle = E|\psi_A\rangle \qquad |\psi_A\rangle = c_1|\downarrow n\rangle + c_2|\uparrow n-1\rangle$$

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\omega \hat{a}^{+}\hat{a} + \hbar\Omega \hat{S}_{+}\hat{S}_{-} + \hbar g(\hat{S}_{+}\hat{a} + \hat{S}_{-}\hat{a}^{+})$$

$$\hbar\omega c_1 n|\downarrow n\rangle + \hbar\omega c_2(n-1)|\uparrow n-1\rangle$$
$$\hbar\Omega c_1|\emptyset n\rangle + \hbar\Omega c_2|\uparrow n-1\rangle$$
$$\hbar g c_1\sqrt{n}|\uparrow n-1\rangle + \hbar g c_2\sqrt{n-1}|\emptyset n-2\rangle$$
$$\hbar g c_1\sqrt{n+1}|\emptyset n+1\rangle + \hbar g c_2\sqrt{n}|\downarrow n\rangle = Ec_1|\downarrow n\rangle + Ec_2|\uparrow n-1\rangle$$

- επί $\langle\downarrow n|$ $\qquad \hbar\omega c_1 n + \hbar g c_2\sqrt{n} = Ec_1$
- επί $\langle\uparrow n-1|$ $\qquad \hbar\omega c_2(n-1) + \hbar\Omega c_2 + \hbar g c_1\sqrt{n} = Ec_2$

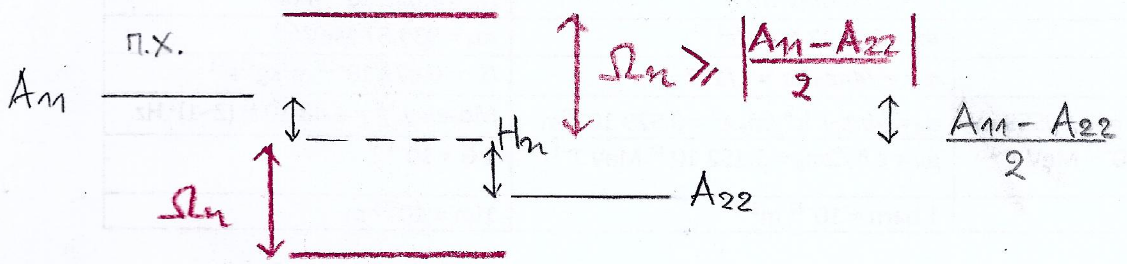
$$\begin{bmatrix} n\omega & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \Omega+(n-1)\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{E}{\hbar}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ το έχουμε ήδη λύσει

$$\lambda_1 = H_n - \Omega_n \qquad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\Delta - 2\Omega_n}{2g\sqrt{n}} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad H_n = \frac{\Omega + (n-1)\omega + n\omega}{2} = \frac{A_{11}+A_{22}}{2}$$

$$\Omega_n = \sqrt{\left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2 + ng^2}$$

$$\lambda_2 = H_n + \Omega_n \qquad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\Delta + 2\Omega_n}{2g\sqrt{n}} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad = \sqrt{\left(\frac{A_{11}-A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2} \qquad A_{12} = A_{21}$$



ἡμικλασικά @ ΔΣ $\quad \mathcal{A}_R = \dfrac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2} \qquad T_R = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}} = \dfrac{1}{f_R}$

$\Delta := \omega - \Omega \qquad \Omega_R := \dfrac{\wp \mathcal{E}_0}{\hbar}$, για $\wp > 0$

$\Omega_R := \dfrac{-\wp \mathcal{E}_0}{\hbar}$, για $\wp < 0$ — ἡ Ω_R ὁρίζεται θετική

$\Omega_R := \dfrac{|\wp| \mathcal{E}_0}{\hbar}$

$$\boxed{f_R = \frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2\pi} \xrightarrow{\text{για } \Delta=0} \frac{\Omega_R}{2\pi} = \frac{|\wp|\,\mathcal{E}_0}{h}}$$

ἡ συχνότητα δηλαδή (ἐκτὸς ἀπὸ τὴν ἐξάρτηση ἀπὸ τὸ Δ) ἐξαρτᾶται

- ἀπὸ τὸ "πλάτος" τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου $\mathcal{E}_0$. $\quad \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_a \cdot \exp\left[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi)\right]$
- καὶ ἀπὸ τὸ $\wp := \wp_{z12} = \wp_{z21} = -e z_{12} = -e z_{21}$ $\quad = \underbrace{\vec{\mathcal{E}}_a \cdot \exp\left[i(\vec{k}\cdot\vec{R} + \phi)\right]}_{\vec{\mathcal{E}}_0} e^{-i\omega t} \qquad \vec{r} \simeq \vec{R}$

κι ἂν οἱ $\Phi_1(\vec{r})$ καὶ $\Phi_2(\vec{r})$ ἔχουν ἴδια ὁμοτιμία $\wp = 0$ ὁπότε δὲν ὑπάρχει ταλάντωση $\qquad$ π.χ. $\vec{r} = \vec{r}_H \simeq \vec{r}_\pi = \vec{R}$

κβαντομηχανικά @ ΔΣ $\quad \mathcal{A} = \dfrac{g^2 n}{\Omega_n^2} = \dfrac{g^2 n}{\left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2 + g^2 n} = \dfrac{4g^2 n}{4g^2 n + \Delta^2}$

π.χ. @ ἀπορρόφηση φωτονίου

$g = g_m$
$n = n_m$
$\omega = \omega_m$

$$T = \frac{\pi}{\Omega_n} = \frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2 + g^2 n}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4g^2 n + \Delta^2}}$$

$\omega_m = \dfrac{m\pi c}{L}, \; m \in \mathbb{N}^*$ $\quad$ ὁπότε καλύτερα να ὁρίσουμε $4g^2 n = \Omega_R^2 \Leftrightarrow \boxed{\Omega_R = 2\sqrt{n}\,|g|}$

$$\hbar |g_m| = |\wp| \left| \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \right| \Rightarrow$$

εἴχαμε ὁρίσει $\wp := \wp_{x12} = -e x_{12}$

$$\hbar \frac{\Omega_R}{2\sqrt{n}} = |\wp| \left| \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \right| \Rightarrow$$

$$\Omega_R = \frac{|\wp|}{\hbar} \left| \left(\frac{4\hbar\omega_m n}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \right| := \frac{|\wp|\,E_{0m}}{\hbar}$$

"πλάτος" $\quad E_{0m} = \left| \left(\dfrac{4\hbar\omega_m n}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \cdot \sin\left(\dfrac{m\pi z}{L}\right) \right|$

Οπότε, επειδή η πυκνότητα ενεργείας είναι

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$

εδώ θα έχουμε

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} E_{\phi m}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{4\hbar\omega_m n_m}{\varepsilon_0 V} \sin^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$= \frac{2\hbar\omega_m \cdot n_m}{V} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2m\pi z}{L}\right) \right\}$$

$$= \frac{\hbar\omega_m \cdot n_m}{V} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{2m\pi z}{L}\right) \right\} \leftarrow \frac{J}{m^3}$$

η οποία είναι πράγματι πυκνότητα ενέργειας
και μάλιστα, εκτός από τη διαμόρφωση $\{\ldots\}$
ο αριθμητής είναι ο αριθμός των φωτονίων επί την ενέργεια του κάθε φωτονίου
κι ο παρονομαστής ο όγκος της κοιλότητας

$$E_m = \int dV\, U = \int_0^L dz \cdot S \cdot U = S \int_0^L dz \cdot U = S \frac{\hbar\omega_m n_m}{S} = \hbar\omega_m n_m$$

$$\int_0^L dz \left\{ 1 - \cos\left(\frac{2m\pi z}{L}\right) \right\} = \int_0^L dz - \int_0^L dz \cos\left(\frac{2m\pi z}{L}\right)$$

$$\psi := \frac{2m\pi z}{L}$$

$$d\psi = \frac{2m\pi}{L} dz$$

$$\frac{L}{2m\pi} \int_0^{2m\pi} d\psi \cos\psi = 0$$

$$\int_0^L dz\, U = \frac{\hbar\omega_m n_m}{S \cdot L} L = \frac{\hbar\omega_m n_m}{S} \rightarrow \frac{J}{m^2}$$