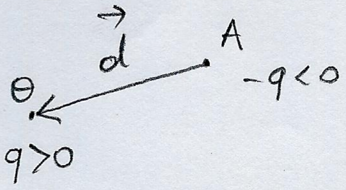
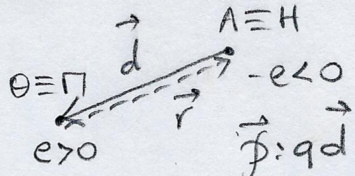
(ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ) ΔΙΠΟΛΙΚΗ ΡΟΠΗ (electric) dipole moment

A



$\vec{d} := \vec{A\Theta}$

$\vec{p} := q\cdot\vec{d}$



$\vec{p} : q\vec{d} = e(-\vec{r})$

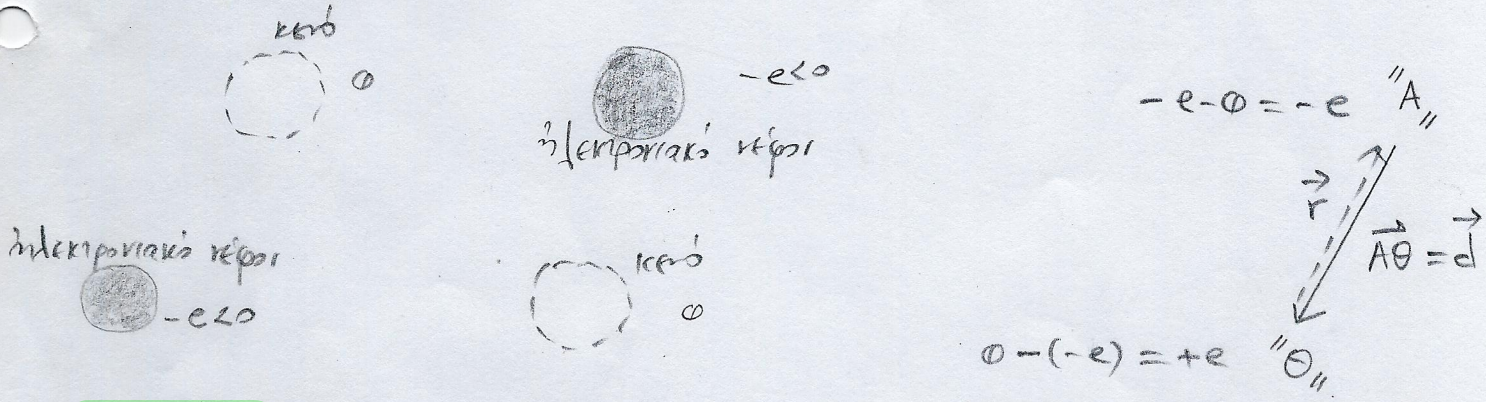
$\vec{p} = -e\vec{r}$

$[U] = N\cdot m = J$ $\qquad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$ δυναμική ενέργεια (potential energy)

$[\vec{\tau}] = N\cdot m$ $\qquad \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$ (μηχανική) ροπή (torque)

ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΙΠΟΛΙΚΗ ΡΟΠΗ ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΣ

transition (electric) dipole moment



Αρχικώς $\qquad$ Τελικώς $\qquad$ Τελικώς − Αρχικώς

$\vec{p} = e\vec{d} = -e\vec{r}$

Τελεστής (ηλεκτρικής) διπολικής ροπής μετάβασης

$$\hat{\vec{d}} = \hat{\vec{p}} := \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{d}_{ij} |\Phi_i\rangle\langle\Phi_j|$$

$$\vec{d}_{ij} = \vec{p}_{ij} = -e\langle\Phi_i|\hat{\vec{r}}|\Phi_j\rangle = \ldots = -e\int d^3r\, \Phi_i(\vec{r})^* \,\vec{r}\, \Phi_j(\vec{r})$$

$$\hat{\vec{r}}|\vec{r}\rangle = \vec{r}|\vec{r}\rangle$$

$$\langle\Phi_i|\hat{\vec{r}}|\Phi_j\rangle = \sum_{|\vec{r}'\rangle}\sum_{|\vec{r}''\rangle} \langle\Phi_i|\vec{r}'\rangle\langle\vec{r}'|\hat{\vec{r}}|\vec{r}''\rangle\langle\vec{r}''|\Phi_j\rangle$$

$$= \sum_{|\vec{r}'\rangle}\sum_{|\vec{r}''\rangle} \Phi_i(\vec{r}')^* \,\vec{r}''\underbrace{\langle\vec{r}'|\vec{r}''\rangle}_{\delta_{\vec{r}'\vec{r}''}}\Phi_j(\vec{r}'')$$

$$= \sum_{|\vec{r}'\rangle} \Phi_i(\vec{r}')^* \,\vec{r}'\, \Phi_j(\vec{r}') = \sum_{|\vec{r}\rangle} \Phi_i(\vec{r})^* \,\vec{r}\, \Phi_j(\vec{r})$$

$$= \int d^3r\, \Phi_i(\vec{r})^* \,\vec{r}\, \Phi_j(\vec{r})$$

ΔΣ

$$\hat{\vec{p}} = \vec{d}_{11}|\Phi_1\rangle\langle\Phi_1| + \vec{d}_{12}|\Phi_1\rangle\langle\Phi_2| + \vec{d}_{21}|\Phi_2\rangle\langle\Phi_1| + \vec{d}_{22}|\Phi_2\rangle\langle\Phi_2|$$

$$\vec{d}_{11} = -e\int d^3r\, \Phi_1(\vec{r})^* \,\vec{r}\, \Phi_1(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{d}_{12} = -e\int d^3r\, \Phi_1(\vec{r})^* \,\vec{r}\, \Phi_2(\vec{r}) \neq 0$$

$\vec{d}_{12} = \vec{d}_{21}$ για $\{\Phi_i(\vec{r})\}$ πραγματικές

$$\vec{d}_{21} = -e\int d^3r\, \Phi_2(\vec{r})^* \,\vec{r}\, \Phi_1(\vec{r}) \neq 0$$

$$\vec{d}_{22} = -e\int d^3r\, \Phi_2(\vec{r})^* \,\vec{r}\, \Phi_2(\vec{r}) = 0$$

$$\hat{\vec{p}} = \vec{d}_{12}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} + \vec{d}_{21}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\vec{p}} = \vec{d}_{12}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

Γ

δυναμική ενέργεια

$$U_\mathcal{E} = -\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}$$

δυναμική ενέργεια m τρόπου

$$U^m_\mathcal{E} = -\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}^m$$

Τελεστής δυναμικής ενέργειας m τρόπου

$$\hat{U}^m_\mathcal{E} = -\hat{\vec{p}}\cdot\hat{\vec{\mathcal{E}}}^m$$

$$\hat{U}^m_\mathcal{E} = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{d}_{ij}\,|\Phi_i\rangle\langle\Phi_j|\cdot\hat{E}^m_x(z,t)\,\hat{x}$$

ΔΣ $$\hat{U}^m_\mathcal{E} = -\vec{d}_{12}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\hat{E}^m_x(z,t)\,\hat{x} = -\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\hat{E}^m_x(z,t)\quad \vec{d}_{12}\cdot\hat{x}$$

$$\vec{d}_{12}\cdot\hat{x} = -e\int d^3r\,\Phi_1^*(\vec{r})\,\vec{r}\,\Phi_2(\vec{r})\cdot\hat{x} =$$

$$= -e\int d^3r\,\Phi_1^*(\vec{r})\,x\,\Phi_2(\vec{r}) = \boxed{-e\,x_{12} = p_{x12} := p}$$

Άρα $$\hat{U}^m_\mathcal{E} = e x_{12}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\hat{E}^m_x(z,t)$$

$$\hat{E}^m_x(z,t) = \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\left(\hat{a}^+_m + \hat{a}_m\right)$$

$$\hat{B}^m_y(z,t) = \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\frac{1}{c}\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)i\left(\hat{a}^+_m - \hat{a}_m\right)$$

$$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\hat{U}^m_\mathcal{E} = e x_{12}\left(\hat{S}_+ + \hat{S}_-\right)\left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\left(\hat{a}^+_m + \hat{a}_m\right)$$

$$\hat{U}^m_\mathcal{E} = \underbrace{e x_{12}\left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)}_{\hbar g^m}\left(\hat{S}_+ + \hat{S}_-\right)\left(\hat{a}^+_m + \hat{a}_m\right)$$

$$\hbar g^m = e x_{12}\left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\quad (gm)$$

$$\hat{U}_\Sigma^m = \hbar g^m \left(\hat{S}_+ + \hat{S}_-\right)\left(\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m\right)$$

χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης ΔΣ – m τρόπου του ΗΜ πεδίου

(στην ατομική φυσική λέγεται συχνά $\hat{H}_{AF}$

AF = atom – field)

$$g_m \Rightarrow \hbar\left|g^m\right| = |\wp| \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \left|\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right|$$

$$\Omega_R^m := 2\sqrt{n}\, g^m \longleftarrow$$

είναι καλύτερα να ορίσουμε τη συχνότητα Rabi ακριβώς έτσι ώστε να υπάρχει πλήρης αναλογία με την ημικλασική περίπτωση

ΤΟ ΓΙΑΤΙ ΘΑ ΦΑΝΕΙ ΠΑΡΑΚΑΤΩ

$$\frac{\hbar\Omega_R}{2\sqrt{n}} = |\wp| \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \left|\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right|$$

$$\Omega_R = \frac{|\wp|}{\hbar}\left(\frac{4\hbar\omega_m n}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \left|\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right| := \frac{|\wp|\, E_{0m}}{\hbar}$$

"πλάτος" ηλεκτρικού πεδίου $\quad E_{0m} = \left(\frac{4\hbar\omega_m n}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right|}_{\text{χωρικά διαμορφωμένο}}$

$$\left[E_{0m}\right] = \left(\frac{J}{\frac{F}{m}\cdot m^3}\right)^{1/2} = \left(\frac{C\cdot V}{\frac{C}{V}\cdot m^2}\right)^{1/2} = \frac{V}{m}$$

μονάδες ηλεκτρικού πεδίου

ΣΥΝΟΨΗ ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΩΝ

(Ε)

$$\hat{H}_{HM,m} = \hbar\omega_m\left(\hat{a}_m^{+}\hat{a}_m + \frac{1}{2}\right)$$ m τρόπος ΗΜ πεδίου $\hbar\omega_m\left(\hat{N}_m + \frac{1}{2}\right)$

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{L}, \quad m\in\mathbb{N}^*$$

κι αγνοώνται τον όρο $\frac{\hbar\omega_m}{2}$

$$\hat{H}_{HM,m} = \hbar\omega_m \hat{a}_m^{+}\hat{a}_m$$ $\hbar\omega_m\hat{N}_m$

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2\hat{S}_+\hat{S}_- + E_1\hat{S}_-\hat{S}_+ \qquad E_2 - E_1 = \hbar\Omega$$ διστάθμικό σύστημα

θέτονται $E_1 = \emptyset$

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_-$$

χωρικά διαμορφωμένο "πλάτος"

$$E_{\varnothing m} = \left|\left(\frac{4\hbar\omega_m n_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right|$$

$$\hat{U}_{\varepsilon}^{m} = \hbar g^{m}\left(\hat{S}_+ + \hat{S}_-\right)\left(\hat{a}_m^{+} + \hat{a}_m\right) = \hat{H}_{\alpha\lambda\lambda,\ HMm-\Delta\Sigma}$$ αλληλεπίδραση m τρόπου ΗΜ πεδίου – ΔΣ

$$\Omega_R^m := 2\sqrt{n_m}\,g_m$$

$$\Omega_R^m := \frac{|\wp|\,E_{\varnothing m}}{\hbar}$$ συχνότητα Rabi

Άρα η ολική Χαμιλτονιανή του m τρόπου γράφεται

$$\hat{H}_{Rm} = \hbar\omega_m\hat{a}_m^{+}\hat{a}_m + \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^{m}\left(\hat{S}_+ + \hat{S}_-\right)\left(\hat{a}_m^{+} + \hat{a}_m\right)$$ ονομάζεται συχνά Χαμιλτονιανή Rabi

ΠΡΟΣΟΧΗ $|\uparrow, n_m\rangle$ κ $|\downarrow, n_m\rangle$ ιδιοκαταστάσεις της $\left(\hbar\omega_m\hat{a}_m^{+}\hat{a}_m + \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_-\right)$ $\hat{H}_{HMm} + \hat{H}_{\Delta\Sigma}$

και όχι της $\hat{H}_{HM,m} + \hat{H}_{\Delta\Sigma} + \hat{H}_{\alpha\lambda\lambda,\ \Delta\Sigma-HMm}$

Ἀς δοῦμε προσεκτικότερα τη Χαμιλτονιανή Ἀλληλεπίδρασης ΔΣ – ΗΜ πεδίου

ΔΣ – ενός τρόπου m του ΗΜ πεδίου

$$\hat U_\Sigma^m = \hbar g^m (\hat S_+ + \hat S_-)(\hat a_m^\dagger + \hat a_m) =$$

$$= \hbar g^m \Big(\underbrace{\hat S_+ \hat a_m^\dagger}_{1ος} + \underbrace{\hat S_+ \hat a_m}_{2ος} + \underbrace{\hat S_- \hat a_m^\dagger}_{3ος} + \underbrace{\hat S_- \hat a_m}_{4ος} \Big)$$

1ος $\hat S_+ \hat a_m^\dagger$

$\rightsquigarrow$ f_i, ω_i

$\begin{pmatrix} \circ \\ \bullet \end{pmatrix}$ πριν

$\begin{pmatrix} \bullet \\ \circ \end{pmatrix}$ μετά $\rightsquigarrow$ $f_f < f_i$, $\omega_f < \omega_i$

$\Delta E > 0$

ἀν έχω πολλούς τρόπους δεν είναι παράδοξος μηχανισμός

2ος $\hat S_+ \hat a_m$

$\rightsquigarrow$ $\begin{pmatrix} \circ \\ \bullet \end{pmatrix}$ πριν

$\begin{pmatrix} \bullet \\ \circ \end{pmatrix}$ μετά

ίσως διατηρεί την ενέργεια

3ος $\hat S_- \hat a_m^\dagger$

$\begin{pmatrix} \bullet \\ \circ \end{pmatrix}$ πριν

$\begin{pmatrix} \circ \\ \bullet \end{pmatrix}$ μετά $\rightsquigarrow$

ίσως διατηρεί την ενέργεια

4ος $\hat S_- \hat a_m$

$\rightsquigarrow$ f_i, ω_i

$\begin{pmatrix} \bullet \\ \circ \end{pmatrix}$ πριν

$\begin{pmatrix} \circ \\ \bullet \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $f_f > f_i$, $\omega_f > \omega_i$

$\Delta E < 0$

ἀν έχω πολλούς τρόπους δεν είναι παράδοξος μηχανισμός

Ἀν αγνοήσουμε τον 1ο και τον 4ο όρο που ο καθένας μόνος του δεν διατηρεί την ενέργεια

$$\Rightarrow \hat U_\Sigma^m = \hbar g^m (\hat S_+ \hat a_m + \hat S_- \hat a_m^\dagger)$$

$$\hat H_{JCm} = \hbar \omega_m \hat a_m^\dagger \hat a_m + \hbar \Omega \hat S_+ \hat S_- + \hbar g_m (\hat S_+ \hat a_m + \hat S_- \hat a_m^\dagger)$$

Jaynes – Cummings Χαμιλτονιανή

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+ \qquad E_2 - E_1 = \hbar\Omega$$

μπορούμε να θέσουμε

$$E_2 = \frac{\hbar\Omega}{2}$$

$\hbar\Omega$ μηδέν

$$E_1 = -\frac{\hbar\Omega}{2}$$

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{S}_+ \hat{S}_- - \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{S}_- \hat{S}_+$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{S}_+ \hat{S}_- &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{S}_- \hat{S}_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hat{S}_+ \hat{S}_- - \hat{S}_- \hat{S}_+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_z \end{aligned}$$

Άρα $\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{\sigma}_z$ η μορφή του $\hat{H}_{\Delta\Sigma}$ στο άρθρο των Jaynes–Cummings

$\hat{a}^+|n\rangle=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \qquad \hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle$

ΑΣΚΗΣΗ

Να αποδειχτούν οι σχέσεις

(α') $[\hat{a},\hat{a}]=0$ (β') $[\hat{a}^+,\hat{a}^+]=0$ (γ') $[\hat{a},\hat{a}^+]=1$ (δ') $\hat{N}|n\rangle=n|n\rangle$

(ε') $[\hat{N},\hat{a}]=-\hat{a}$ (ς') $[\hat{N},\hat{a}^+]=\hat{a}^+$ (ζ') $\hat{N}(\hat{a}|n\rangle)=(n-1)(\hat{a}|n\rangle)$

(η') $\hat{N}(\hat{a}^+|n\rangle)=(n+1)(\hat{a}^+|n\rangle)$

(α') $[\hat{a},\hat{a}]=\hat{a}\hat{a}-\hat{a}\hat{a}=0$ (β') $[\hat{a}^+,\hat{a}^+]=\hat{a}^+\hat{a}^+-\hat{a}^+\hat{a}^+=0$

(γ') $[\hat{a},\hat{a}^+]|n\rangle=\hat{a}\hat{a}^+|n\rangle-\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle=\hat{a}\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle-\hat{a}^+\sqrt{n}\,|n-1\rangle=$

$=\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\,|n\rangle-\sqrt{n}\sqrt{n}\,|n\rangle=(n+1)|n\rangle-n|n\rangle=1\cdot|n\rangle$

$\Rightarrow [\hat{a},\hat{a}^+]=1$

(ε') $[\hat{N},\hat{a}]=[\hat{a}^+\hat{a},\hat{a}]=\hat{a}^+\underbrace{[\hat{a},\hat{a}]}_{0}+\underbrace{[\hat{a}^+,\hat{a}]}_{-1}\hat{a}=-\hat{a}$

(ς') $[\hat{N},\hat{a}^+]=[\hat{a}^+\hat{a},\hat{a}^+]=\hat{a}^+\underbrace{[\hat{a},\hat{a}^+]}_{1}+\underbrace{[\hat{a}^+,\hat{a}^+]}_{0}\hat{a}=\hat{a}^+$

(δ') $\hat{N}|n\rangle=\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle=\hat{a}^+\sqrt{n}\,|n-1\rangle=\sqrt{n}\sqrt{n}\,|n\rangle=n|n\rangle \Rightarrow \hat{N}|n\rangle=n|n\rangle$

(ζ') $\hat{N}(\hat{a}|n\rangle)=\hat{N}\sqrt{n}\,|n-1\rangle=\sqrt{n}\,(n-1)\,|n-1\rangle=(n-1)\sqrt{n}\,|n-1\rangle=(n-1)(\hat{a}|n\rangle)$

(η') $\hat{N}(\hat{a}^+|n\rangle)=\hat{N}\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle=\sqrt{n+1}\,\hat{N}|n+1\rangle=\sqrt{n+1}\,(n+1)|n+1\rangle\Rightarrow$

$(n+1)\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$(n+1)(\hat{a}^+|n\rangle)$