$$E_m = \frac{M_m \omega_m^2}{2} q_m^2 + \frac{M_m}{2} \dot{q}_m^2 = \frac{M_m \omega_m^2}{2} q_m^2 + \frac{P_m^2}{2M_m}$$ ενέργεια m τρόπου

q_m γεν. θέση

$\dot{q}_m$ γεν. ταχύτητα

P_m γεν. ορμή

$$\hat{H}_{HM,m} = \frac{M_m \omega_m^2}{2} \hat{q}_m^2 + \frac{\hat{P}_m^2}{2M_m}$$ Χαμιλτονιανή m τρόπου

$$E_{m,n_m} = \hbar \omega_m \left(n_m + \frac{1}{2}\right)$$ Ιδιοενέργειες m τρόπου

$m \in \mathbb{N}^*$ $\quad n_m \in \mathbb{N}$

$$\hat{q}_m = q_m \qquad \hat{P}_m = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_m} \qquad [\hat{q}_m, \hat{P}_m] = i\hbar$$

Εισάγουμε τους τελεστές

$$\hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2M_m \hbar \omega_m}} \left(M_m \omega_m \hat{q}_m + i\hat{P}_m\right)$$ "καταστροφής"

$$\hat{a}_m^+ = \frac{1}{\sqrt{2M_m \hbar \omega_m}} \left(M_m \omega_m \hat{q}_m - i\hat{P}_m\right)$$ "δημιουργίας"

Ισχύει η ιδιότητα

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_m^+] = \hat{a}_m \hat{a}_m^+ - \hat{a}_m^+ \hat{a}_m = 1$$

Απόδ.

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = \frac{1}{2M\hbar\omega}(M\omega\hat{q} + i\hat{p})(M\omega\hat{q} - i\hat{p})$$

$$- \frac{1}{2M\hbar\omega}(M\omega\hat{q} - i\hat{p})(M\omega\hat{q} + i\hat{p}) =$$

$$= \frac{1}{2M\hbar\omega}\Big(M^2\omega^2\hat{q}^2 + \hat{p}^2 - M\omega\hat{q}i\hat{p} + i\hat{p}M\omega\hat{q} - M^2\omega^2\hat{q}^2 - \hat{p}^2$$
$$- M\omega\hat{q}i\hat{p} + i\hat{p}M\omega\hat{q}\Big)$$

(β)

$$= \frac{1}{2M\hbar\omega}\left(-2M\omega i\,\hat{q}\hat{p} + 2i\hat{p}M\omega\hat{q}\right) = \frac{1}{\hbar}\left(-i\hat{q}\hat{p} + i\hat{p}\hat{q}\right)$$

$$= \frac{1}{\hbar}(-i)\left(\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q}\right) = \frac{-i}{\hbar}[\hat{q},\hat{p}] = \frac{-i}{\hbar}\,i\hbar = 1 \Rightarrow [\hat{a},\hat{a}^{\dagger}] = 1$$

$$\hat{a}_m^{\dagger} + \hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2M_m\hbar\omega_m}}\,2M_m\omega_m\hat{q}_m = \sqrt{\frac{2M_m\omega_m}{\hbar}}\,\hat{q}_m \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{q}_m = \sqrt{\frac{\hbar}{2M_m\omega_m}}\left(\hat{a}_m^{\dagger} + \hat{a}_m\right)}$$

$$\hat{a}_m^{\dagger} - \hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2M_m\hbar\omega_m}}(-2i)\hat{p}_m = (-i)\sqrt{\frac{2}{M_m\hbar\omega_m}}\,\hat{p}_m \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{p}_m = i\sqrt{\frac{M_m\hbar\omega_m}{2}}\left(\hat{a}_m^{\dagger} - \hat{a}_m\right)}$$

ΑΡΑ

$$\hat{H}_{HM,m} = \frac{M_m\omega_m^2}{2}\hat{q}_m^2 + \frac{\hat{p}_m^2}{2M_m} = \frac{M_m\omega_m^2}{2}\,\frac{\hbar}{2M_m\omega_m}\left(\hat{a}_m^{\dagger} + \hat{a}_m\right)\left(\hat{a}_m^{\dagger} + \hat{a}_m\right)$$

$$+ \frac{1}{2M_m}(-1)\frac{M_m\hbar\omega_m}{2}\left(\hat{a}_m^{\dagger} - \hat{a}_m\right)\left(\hat{a}_m^{\dagger} - \hat{a}_m\right)$$

$$= \frac{\hbar\omega_m}{4}\left(\hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m^{\dagger} + \hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m + \hat{a}_m\hat{a}_m^{\dagger} + \hat{a}_m\hat{a}_m - \hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m^{\dagger} + \hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m + \hat{a}_m\hat{a}_m^{\dagger} - \hat{a}_m\hat{a}_m\right)$$

$$\hat{H}_{HM,m} = \frac{\hbar\omega_m}{4}\left(2\hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m + 2\hat{a}_m\hat{a}_m^{\dagger}\right) = \frac{\hbar\omega_m}{2}\left(\hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m + \hat{a}_m\hat{a}_m^{\dagger}\right)$$

Αλλά $[\hat{a}_m, \hat{a}_m^{\dagger}] = \hat{a}_m\hat{a}_m^{\dagger} - \hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m = 1 \Rightarrow \hat{a}_m\hat{a}_m^{\dagger} = 1 + \hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\hat{H}_{HM,m} = \frac{\hbar\omega_m}{2}\left(2\hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m + 1\right) \Rightarrow \boxed{\hat{H}_{HM,m} = \hbar\omega_m\left(\hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m + \frac{1}{2}\right)}$$

όπως $\boxed{E_{m,n_m} = \hbar\omega_m\left(n_m + \frac{1}{2}\right)}$

γ

Αν ονομάσουμε $|n_m\rangle$ την κατάσταση του ΗΜ πεδίου με n_m αριθμό φωτονίων στον ΗΜ τρόπο m

$$\hat{H}_{HM,m} |n_m\rangle = E_{m,n_m} |n_m\rangle$$

$$\hbar\omega_m \left(\hat{a}_m^{+} \hat{a}_m + \frac{1}{2} \right) |n_m\rangle = \hbar\omega_m \left(n_m + \frac{1}{2} \right) |n_m\rangle$$

$$\hat{a}_m^{+} \hat{a}_m |n_m\rangle = n_m |n_m\rangle$$

Άρα ο τελεστής $\hat{N}_m = \hat{a}_m^{+} \hat{a}_m$ μετρά τον αριθμό των φωτονίων στον ΗΜ τρόπο m.

$$[A+B, C] = [A,C] + [B,C]$$

$$[AB, C] = A[B,C] + [A,C]B$$

$$\hat{H} = \kappa \hat{q}^2 + \lambda \hat{p}^2$$

$$\hat{a} = \mu \hat{q} + \nu \hat{p}$$

$$\hat{a}^{+} = \mu \hat{q} - \nu \hat{p}$$

με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων μπορεί να αποδειχτεί ότι

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega \hat{a} \qquad [\hat{H}, \hat{a}^{+}] = \hbar\omega \hat{a}^{+}$$

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle - \hat{a}\hat{H}|n\rangle = -\hbar\omega \hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle - E_n \hat{a}|n\rangle = -\hbar\omega \hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)\hat{a}|n\rangle$$

ιδιοκατάσταση με ενέργεια κατεβασμένη κατά $\hbar\omega$ (ένα φωτόνιο λιγότερο)

$$\Rightarrow \hat{a}|n\rangle = \xi |n-1\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}^{+}|n\rangle - \hat{a}^{+}\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \hat{a}^{+}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}^{+}|n\rangle - E_n \hat{a}^{+}|n\rangle = \hbar\omega \hat{a}^{+}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}^{+}|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)\hat{a}^{+}|n\rangle$$

ιδιοκατάσταση με ενέργεια ανεβασμένη κατά $\hbar\omega$ (ένα φωτόνιο περισσότερο)

$$\Rightarrow \hat{a}^{+}|n\rangle = \rho |n+1\rangle$$

ΙΔΙΟ

... πρέξεις

$$[\hat{H},\hat{a}] = -\hbar\omega\,\hat{a}$$

$$[\hat{H},\hat{a}]|n\rangle = -\hbar\omega\,\hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle - \hat{a}\hat{H}|n\rangle = -\hbar\omega\,\hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle - \hat{a}E_n|n\rangle = -\hbar\omega\,\hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{H}\,\hat{a}|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)\,\hat{a}|n\rangle$$

↓

ιδιοκατάσταση με ενέργεια κατεβασμένη κατά $\hbar\omega$ (ένα φωτόνιο λιγότερο)

$$\hat{a}|n\rangle = \xi\,|n-1\rangle$$

$$[\hat{H},\hat{a}^{+}] = \hbar\omega\,\hat{a}^{+}$$

$$[\hat{H},\hat{a}^{+}]|n\rangle = \hbar\omega\,\hat{a}^{+}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}^{+}|n\rangle - \hat{a}^{+}\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\,\hat{a}^{+}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}^{+}|n\rangle - \hat{a}^{+}E_n|n\rangle = \hbar\omega\,\hat{a}^{+}|n\rangle$$

$$\hat{H}\,\hat{a}^{+}|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)\,\hat{a}^{+}|n\rangle$$

↓

ιδιοκατάσταση με ενέργεια ανεβασμένη κατά $\hbar\omega$ (ένα φωτόνιο περισσότερο)

$$\hat{a}^{+}|n\rangle = \rho\,|n+1\rangle$$

Δ ΙΔΙΟ

$$[\hat{H},\hat{a}] = [\hbar\omega(\hat{a}^{+}\hat{a}+\tfrac{1}{2}),a] = \hbar\omega[\hat{a}^{+}\hat{a}+\tfrac{1}{2},\hat{a}] =$$

$$= \hbar\omega\left([\hat{a}^{+}\hat{a},\hat{a}] + [\tfrac{1}{2},\hat{a}]\right) = \hbar\omega[\hat{a}^{+}\hat{a},\hat{a}] =$$

$$= \hbar\omega\left(\underbrace{[\hat{a}^{+},\hat{a}]}_{-1}\hat{a} + \hat{a}^{+}\underbrace{[\hat{a},\hat{a}]}_{0}\right) = -\hbar\omega\hat{a}$$

$$[\hat{H},\hat{a}^{+}] = [\hbar\omega(\hat{a}^{+}\hat{a}+\tfrac{1}{2}),\hat{a}^{+}] = \hbar\omega[\hat{a}^{+}\hat{a}+\tfrac{1}{2},\hat{a}^{+}] =$$

$$= \hbar\omega\left([\hat{a}^{+}\hat{a},\hat{a}^{+}] + [\tfrac{1}{2},\hat{a}^{+}]\right) = \hbar\omega[\hat{a}^{+}\hat{a},\hat{a}^{+}]$$

$$= \hbar\omega\left(\hat{a}^{+}\underbrace{[\hat{a},\hat{a}^{+}]}_{1} + \underbrace{[\hat{a}^{+},\hat{a}^{+}]}_{0}\hat{a}\right) = \hbar\omega\hat{a}^{+}$$

$$\hat{a}|n\rangle = \xi|n-1\rangle, \quad \langle n|\hat{a}^\dagger = \xi^*\langle n-1| \Rightarrow \langle n|a^\dagger a|n\rangle = |\xi|^2\langle n-1|n-1\rangle \Rightarrow$$

$$n\langle n|n\rangle = |\xi|^2\langle n-1|n-1\rangle \Rightarrow |\xi|^2 = n \Rightarrow \xi = \sqrt{n} \text{ π.χ.}$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$[a, a^\dagger] = 1 \Rightarrow aa^\dagger = 1 + a^\dagger a$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \rho|n+1\rangle, \quad \langle n|a = \rho^*\langle n+1| \Rightarrow \langle n|aa^\dagger|n\rangle = |\rho|^2\langle n+1|n+1\rangle$$

$$\langle n|(1+a^\dagger a)|n\rangle = |\rho|^2\langle n+1|n+1\rangle$$

$$(1+n) = |\rho|^2 \quad \Rightarrow \text{π.χ. } \rho = \sqrt{n+1}$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$\hat{a}_m^{+}|n_m\rangle = \sqrt{n_m+1}\,|n_m+1\rangle$$

$$\hat{a}_m|n_m\rangle = \sqrt{n_m}\,|n_m-1\rangle$$

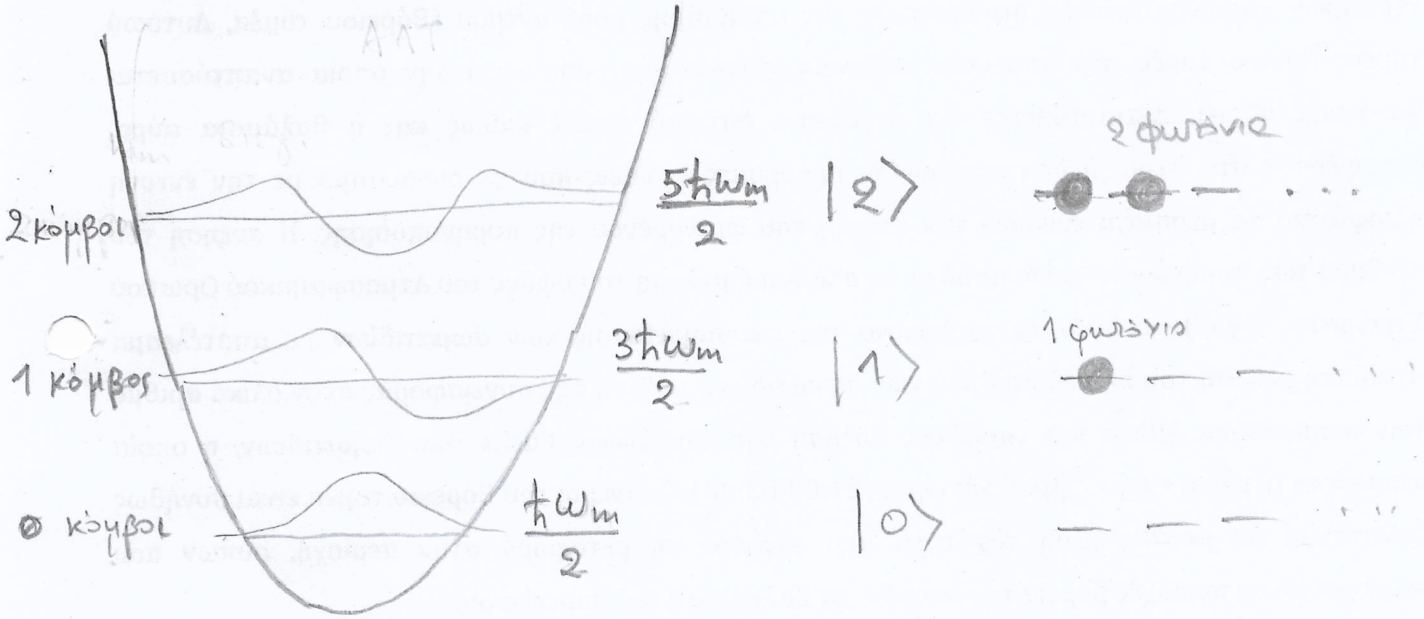
$$\hat{a}_m|0\rangle = 0$$

$$\langle n_m|l_m\rangle = \delta_{nl}$$

Ή θεμελιώδης κατάσταση $|0\rangle$ με ιδιοενέργεια $\frac{\hbar\omega_m}{2}$ αντιστοιχεί στο κενό κανένα μποζόνιο (φωτόνιο)

Ή 1η διεγερμένη κατάσταση $|1\rangle$ με ιδιοενέργεια $\frac{3\hbar\omega_m}{2}$ αντιστοιχεί σε 1 μποζόνιο (φωτόνιο)

Ή 2η διεγερμένη κατάσταση $|2\rangle$ με ιδιοενέργεια $\frac{5\hbar\omega_m}{2}$ αντιστοιχεί σε 2 μποζόνια (φωτόνια)



φωτονίων = # κόμβων της ιδιοσυνάρτησης του ΑΑΤ

Με τη βοήθεια των τελεστών καταστροφής κ δημιουργίας μπορούμε να γράψουμε

$$\hat{E}_x^m(z,t) = \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\left(\hat{a}_m^+ + \hat{a}_m\right)$$

$$\hat{B}_y^m(z,t) = \frac{i}{c}\left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\left(\hat{a}_m^+ - \hat{a}_m\right)$$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΣ ΜΠΟΖΟΝΙΩΝ

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_\ell] = 0$$

$$[\hat{a}_m^+, \hat{a}_\ell^+] = 0$$

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_\ell^+] = \delta_{m\ell}$$