ΠΕΔΙΑ ΕΝΤΟΣ ΙΔΑΝΙΚΟΥ ΑΓΩΓΟΥ

Ιδανικός αγωγός (ideal conductor): ανακλά όλη την ενέργεια ΗΜ κύματος που προσπίπτει στην επιφάνεια του

Καλός αγωγός (good conductor): ανακλά το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας ΗΜ κύματος που προσπίπτει στην επιφάνεια του.

Πυκνότητα ενέργειας ΗΜ κύματος

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E^2 + c^2B^2\right)$$

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{\mu_0} = \varepsilon_0 c^2$$

$$\varepsilon_0 \simeq 8.854 \cdot 10^{-12}\ \frac{F}{m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{N}{A^2}$$

$$c \simeq 3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}$$

$$[U] = \frac{F}{m}\cdot\frac{V^2}{m^2} = \frac{C}{V}\cdot\frac{V^2}{m^3} = \frac{C\cdot V}{m^3} = \frac{J}{m^3}$$

ή

$$[U] = \frac{A^2}{N}T^2 = \frac{N^2}{N\,m^2} = \frac{N}{m^2} = \frac{N\cdot m}{m^3} = \frac{J}{m^3}$$

$F = BIl \quad N = TAm$

$$\boxed{\text{Άρα, εντός ιδανικού αγωγού}\quad \vec{E} = \vec{0} \quad \text{και} \quad \vec{B} = \vec{0}}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ με όρους ΟΛΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ κ ΟΛΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

Θ. Gauss $\oint_{S=\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, dV$

Θ. Stokes $\oint_{\ell=\partial S} \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{a}$

διαφορική μορφή

στο κενό $(\rho=0, \vec{J}=\vec{0})$

1η Εξ. Maxwell $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$

ν. Gauss ηλεκτρισμού

2η Εξ Maxwell $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ $\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

ν. Gauss μαγνητισμού

3η Εξ Maxwell $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

ν. Faraday επαγωγής

4η Εξ Maxwell $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ $\qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

ν. Ampère κ διόρθωση Maxwell

ολοκληρωτική μορφή

1η + Θ. Gauss $\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \int_{S=\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{a} \Rightarrow \Phi_{E,S=\partial V} := \int_{S=\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q_{εντος}}{\varepsilon_0}$

2η + Θ. Gauss $\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dV = \int_{S=\partial V}\vec{B}\cdot d\vec{a} \Rightarrow \Phi_{B,S=\partial V} := \int_{S=\partial V}\vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$

3η + Θ. Stokes $\int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{a} = \int_{\ell=\partial S}\vec{E}\cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \mathcal{E}_{ΗΕΔ} := \oint_{\ell=\partial S}\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S\vec{B}\cdot d\vec{a}$

$= -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{B,S}$

4η + Θ. Stokes $\int_S \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{a} = \oint_{\ell=\partial S}\vec{B}\cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \oint_{\ell=\partial S}\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int_S\left(\mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{a} =$

$= \mu_0 I_{\text{που διαπερνά την } S} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{E,S}$

ΥΠΑΡΞΗ ΗΜ ΚΥΜΑΤΩΝ όταν $\rho=0$ κ $\vec{J}=\vec{0}$

1η $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$

2η $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

3η $\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

4η $\quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

- $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$ $\quad$ (∇^2 Λαπλασιανή Laplacian)

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}\Rightarrow\vec{\nabla}\times\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\nabla^2\vec{E}\Rightarrow$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B}=-\nabla^2\vec{E}\Rightarrow-\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-\nabla^2\vec{E}\Rightarrow\nabla^2\vec{E}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$u_\varphi=c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\qquad\nabla^2\vec{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\vec{E}=\vec{0}$$

$$\Box\vec{E}=\vec{0}$$

($\Box$ D'Alembertian)

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\nabla^2\vec{B}\Rightarrow\vec{\nabla}\times\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\nabla^2\vec{B}\Rightarrow$$

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\nabla^2\vec{B}\Rightarrow\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\nabla^2\vec{B}\Rightarrow\nabla^2\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\vec{B}=\vec{0}$$

$$\Box\vec{B}=\vec{0}$$

ΠΕΔΙΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΡΟ ΙΔΑΝΙΚΟΥ ΑΓΩΓΟΥ

Συνοριακές Συνθήκες στη διεπιφάνεια μεταξύ υλικών
interface

$$\text{1η Εξ.Μ.} \Rightarrow E_{1\perp} - E_{2\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\text{2η Εξ.Μ} \Rightarrow B_{1\perp} = B_{2\perp}$$

$$\text{3η Εξ.Μ} \Rightarrow E_{1//} = E_{2//}$$

$$\text{4η Εξ.Μ} \Rightarrow B_{2//} - B_{1//} = \mu_0 \cdot J_{\text{γραμμικό που διαπερνά την } S} \qquad [J^{\cdots}] = \frac{A}{m}$$

$\boxed{\text{ΓΣΣ}}$

Εάν (1) = Ιδανικός αγωγός ($\vec{B}_1 = \vec{0}$, $\vec{E}_1 = \vec{0}$)
(2) = κενό ή αέρας

τότε οι ΓΣΣ γίνονται

$$-E_{2\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$B_{2\perp} = 0$$

$$E_{2//} = 0.$$

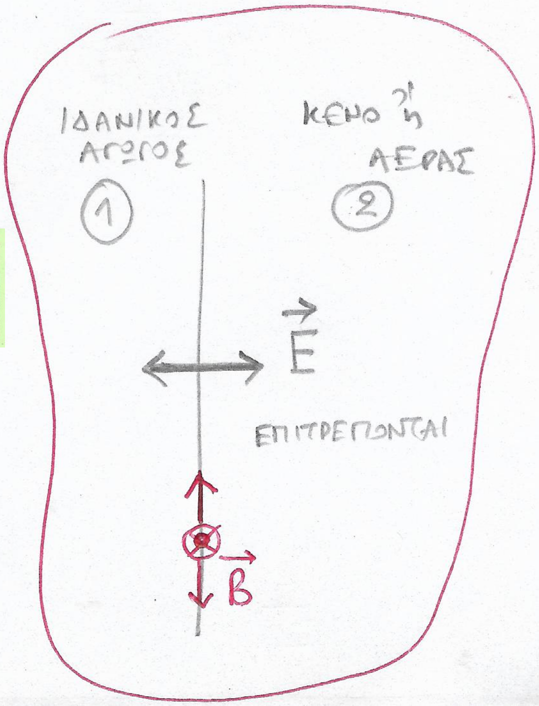
$$B_{2//} = \mu_0 J_{\text{γραμμικό που διαπερνά την } S}$$

$\boxed{\text{ΕΣΣ}}$

θα χρειαστούμε περισσότερο τις

$$\boxed{\begin{aligned} B_{2\perp} &= 0 \\ E_{2//} &= 0 \end{aligned}}$$

$\boxed{\text{ΕΣΣ}^*}$



ΠΕΔΙΑ ΣΕ ΚΟΙΛΟΤΗΤΕΣ

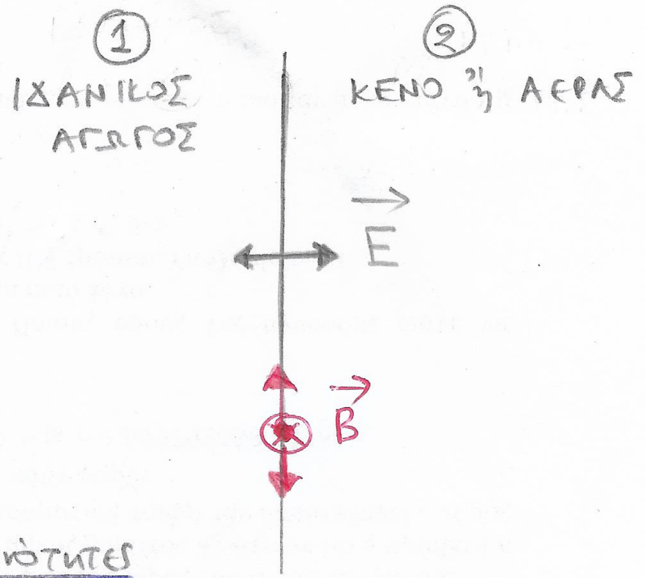
ΟΛΗ Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας ενός ΗΜ κύματος
το οποίο προσπίπτει στην επιφάνεια ενός καλού αγωγού ανακλάται

ΙΔΑΝΙΚΟΥ ΑΓΩΓΟΥ

$\Downarrow$

Μπορούμε να αποθηκεύσουμε ΗΜ ενέργεια
στη μορφή στασίμων ΗΜ κυμάτων
εντός κοιλότητας με τοιχώματα από ιδανικό αγωγό (ή κατά προσέγγιση καλό αγωγό)



$\boxed{ΕΣΣ^*}$

$B_{2\perp}=0$

$E_{2\parallel}=0$

Συνεπώς, οι δυνατές μορφές κ συχνότητες
των στασίμων ΗΜ κυμάτων, τα οποία διατηρούνται εντός της κοιλότητας
("υποστηρίζονται από την κοιλότητα")

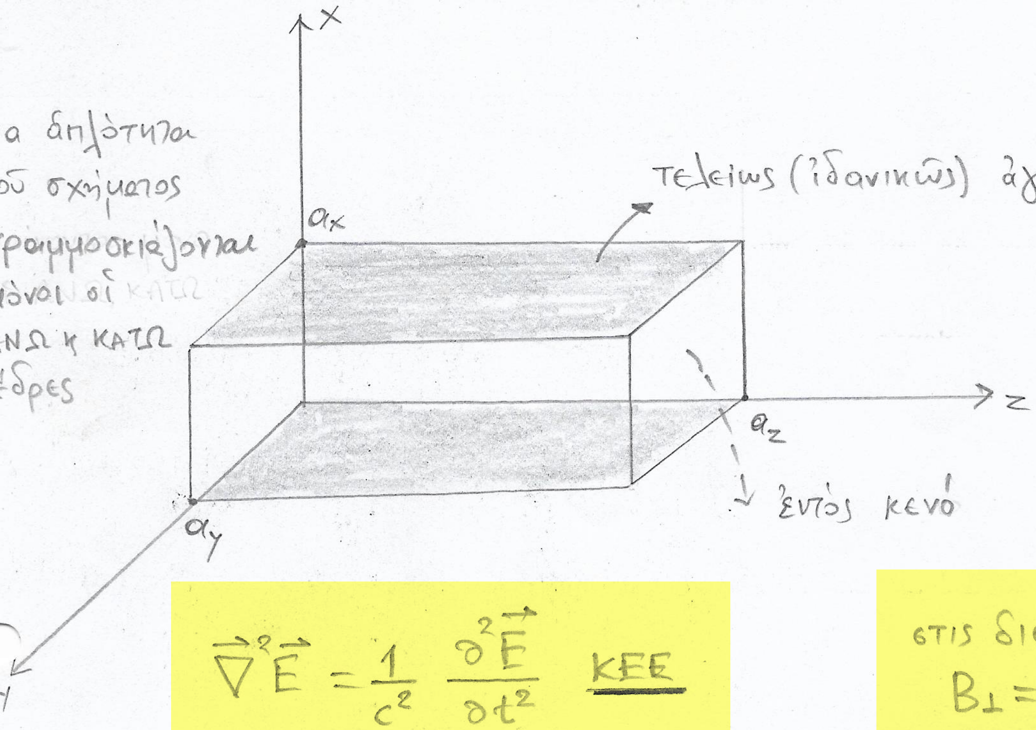
ΚΑΘΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΑΠΟ

Το σχήμα της κοιλότητας

(κανονικοί) τρόποι $\left\{ \begin{array}{ll} \text{μορφές} & \text{patterns} \\ \text{κ} & \text{\&} \\ \text{συχνότητες} & \text{frequencies} \end{array} \right\}$ (normal) modes

ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΗ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ

για απλότητα του σχήματος γραμμοσκιάζονται μόνοι οι ΑΝΩ κ ΚΑΤΩ έδρες



$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \underline{\text{KEE}}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \underline{\text{KEB}}$$

στις διεπιφάνειες

$$\left.\begin{matrix} B_\perp = 0 \\ E_{\parallel} = 0 \end{matrix}\right\} \boxed{\text{ΕΣΣ}^*}$$

- Αναζητούμε λύσεις χωρισμού των μεταβλητών $\vec{r}, t$, δηλαδή

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \underbrace{\vec{E}_{\vec{r}}(x,y,z)}_{\text{χώρος}} \cdot \underbrace{e^{-i\omega t}}_{\text{χρόνος}}$$

$$\text{KEE} \Rightarrow e^{-i\omega t}\, \vec{\nabla}^2 \vec{E}_{\vec{r}} = \frac{1}{c^2}(-i\omega)^2 e^{-i\omega t} \vec{E}_{\vec{r}} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}_{r} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_{\vec{r}} = \vec{0}$$

- Στη συνέχεια χωρίζουμε τις μεταβλητές x, y, z εντός του $\vec{r}$

... πράξεις ...

$$\left.\begin{aligned}&\vec{E}_{\vec{r}}(x,y,z) = E_1(x,y,z)\hat{x} + E_2(x,y,z)\hat{y} + E_3(x,y,z)\hat{z}\\&\nabla^2\vec{E}_{\vec{r}} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}_r = \vec{0}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\nabla^2 E_1\hat{x} + \nabla^2 E_2\hat{y} + \nabla^2 E_3\hat{z} + \frac{\omega^2}{c^2}E_1\hat{x} + \frac{\omega^2}{c^2}E_2\hat{y} + \frac{\omega^2}{c^2}E_3\hat{z} = \vec{0}$$

$$\nabla^2 E_1 + \frac{\omega^2}{c^2}E_1 = 0 \qquad \nabla^2 E_2 + \frac{\omega^2}{c^2}E_2 = 0 \qquad \nabla^2 E_3 + \frac{\omega^2}{c^2}E_3 = 0$$

$$E_1 = X_1(x)Y_1(y)Z_1(z) \qquad E_2 = X_2(x)Y_2(y)Z_2(z) \qquad E_3 = X_3(x)\cdot Y_3(y)\cdot Z_3(z)$$

$$Y_iZ_i\frac{d^2X_i}{dx^2} + X_iZ_i\frac{d^2Y_i}{dy^2} + X_iY_i\frac{d^2Z_i}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}X_iY_iZ_i \qquad i=1,2,3$$

$$\underbrace{\frac{1}{X_i}\frac{d^2X_i}{dx^2}}_{f(x)} + \underbrace{\frac{1}{Y_i}\frac{d^2Y_i}{dy^2}}_{g(y)} + \underbrace{\frac{1}{Z_i}\frac{d^2Z_i}{dz^2}}_{h(z)} = -\frac{\omega^2}{c^2} := -k^2 = -k_{xi}^2 - k_{yi}^2 - k_{zi}^2$$

$$\frac{d^2X_i}{dx^2} + k_{xi}^2X_i = 0 \qquad \frac{d^2Y_i}{dy^2} + k_{yi}^2Y_i = 0 \qquad \frac{d^2Z_i}{dz^2} + k_{zi}^2Z_i = 0$$

$$X_i = A_{1i}\cos(k_{xi}x) + B_{1i}\sin(k_{xi}x)$$

$$Y_i = A_{2i}\cos(k_{yi}y) + B_{2i}\sin(k_{yi}y)$$

$$Z_i = A_{3i}\cos(k_{zi}z) + B_{3i}\sin(k_{zi}z)$$

$E_i(x,y,z) = X_i(x)\cdot Y_i(y)\cdot Z_i(z)$ άλλα θα πρέπει

$E_1(x,y,z) = X_1(x)\cdot Y_1(y)\cdot Z_1(z)$ να μηδενίζεται για $y=0$ και $z=0$ και να μη μηδενίζεται για $x=0$

$$\Rightarrow \boxed{E_1(x,y,z) = K_1\cdot\cos(k_{x1}x)\cdot\sin(k_{y1}y)\cdot\sin(k_{z1}z)}$$

$E_2(x,y,z) = X_2(x)\cdot Y_2(y)\cdot Z_{2}(z)$ να μηδενίζεται για $x=0$ και $z=0$ και να μη μηδενίζεται για $y=0$

$$\Rightarrow \boxed{E_2(x,y,z) = K_2\sin(k_{x2}x)\cdot\cos(k_{y2}y)\cdot\sin(k_{z2}z)}$$

$E_3(x,y,z) = X_3(x)\cdot Y_3(y)\cdot Z_3(z)$ να μηδενίζεται για $x=0$ και $y=0$ και να μη μηδενίζεται για $z=0$

$$\Rightarrow \boxed{E_3(x,y,z) = K_3\cdot\sin(k_{x3}x)\cdot\sin(k_{y3}y)\cdot\cos(k_{z3}z)}$$

μορφές

$$\boxed{E_x} = E_{x0}\cdot \underline{\cos(k_x x)}\cdot \sin(k_y y)\cdot \sin(k_z z)$$

$$\boxed{E_y} = E_{y0}\cdot \sin(k_x x)\cdot \underline{\cos(k_y y)}\cdot \sin(k_z z)$$

$$\boxed{E_z} = E_{z0}\cdot \sin(k_x x)\cdot \sin(k_y y)\cdot \underline{\cos(k_z z)}$$

$$\boxed{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

(κυκλ.) συχνότητες

μηδενίζεται για

$y=0$ και $z=0$

$x=0$ και $z=0$

$x=0$ και $y=0$

- Στην κάτω έδρα $(x=0)$ $\exists$ μόνο E_x συνιστώσα, δηλ. $\vec{E} \perp$ κάτω έδρα
- Στην πίσω έδρα $(y=0)$ $\exists$ μόνο E_y συνιστώσα, δηλ. $\vec{E} \perp$ πίσω έδρα
- Στην αριστερή έδρα $(z=0)$ $\exists$ μόνο E_z συνιστώσα, δηλ. $\vec{E} \perp$ αριστερή έδρα

ικανοποιείται η ΕΣΣ* $E_{//}=0$

Όμοίως, θα πρέπει

- Στην άνω έδρα $(x=a_x)$ να $\exists$ μόνο E_x συνιστώσα, δηλ. $\vec{E} \perp$ άνω έδρα
- Στην μπροστινή έδρα $(y=a_y)$ να $\exists$ μόνο E_y συνιστώσα, δηλ. $\vec{E} \perp$ μπροστινή έδρα
- Στην δεξιά έδρα $(z=a_z)$ να $\exists$ μόνο E_z συνιστώσα, δηλ. $\vec{E} \perp$ δεξιά έδρα

για να ικανοποιείται η ΕΣΣ* $E_{//}=0$

@ άνω έδρα, θα πρέπει $\sin(k_x a_x)=0 \Rightarrow k_x a_x = m_x \pi \Rightarrow k_x = \frac{m_x \pi}{a_x}$, $m_x \in \mathbb{Z}$

@ μπροστινή έδρα, θα πρέπει $\sin(k_y a_y)=0 \Rightarrow k_y a_y = m_y \pi \Rightarrow k_y = \frac{m_y \pi}{a_y}$, $m_y \in \mathbb{Z}$

@ δεξιά έδρα, θα πρέπει $\sin(k_z a_z)=0 \Rightarrow k_z a_z = m_z \pi \Rightarrow k_z = \frac{m_z \pi}{a_z}$, $m_z \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \left(\frac{m_x\pi}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y\pi}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{m_z\pi}{a_z}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

(κυκλ.) συχνότητες

$$\omega_{m_x,m_y,m_z} = \pi c \sqrt{\left(\frac{m_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{a_z}\right)^2}$$

ορθογώνια κοιλότητα

$$\omega_{m_x,m_y,m_z} = \pi c \sqrt{\frac{m_x^2 + m_y^2}{a'^2} + \frac{m_z^2}{a_z^2}}$$

τετραγωνική κοιλότητα $(a_x = a_y = a')$

$E_x(x,y,z) = E_{x0}\cos(k_{x1}x)\cdot\sin(k_{y1}y)\cdot\sin(k_{z1}z)$ μηδενίζονται για $y=0$ κ $z=0$ προφ

$E_y(x,y,z) = E_{y0}\sin(k_{x2}x)\cdot\cos(k_{y2}y)\cdot\sin(k_{z2}z)$ $x=0$ κ $z=0$

$E_z(x,y,z) = E_{z0}\sin(k_{x3}x)\cdot\sin(k_{y3}y)\cdot\cos(k_{z3}z)$ $x=0$ κ $y=0$

$$k_{xi}^2 + k_{yi}^2 + k_{zi}^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Στην κάτω έδρα ($x=0$) $\exists$ μόνο E_x συνιστώσα, δηλ $\vec{E} \perp$ ΚΑΤΩ ΕΔΡΑ

Στην οπίσθια έδρα ($y=0$) $\exists$ μόνο E_y συνιστώσα, δηλ $\vec{E} \perp$ ΟΠΙΣΘΙΑ ΕΔΡΑ

Στην αριστερή έδρα ($z=0$) $\exists$ μόνο E_z συνιστώσα, δηλ $\vec{E} \perp$ ΑΡΙΣΤΕΡΗ ΕΔΡΑ

Ομοίως, θα πρέπει

Στην άνω έδρα ($x=a_x$) να $\exists$ μόνο E_x συνιστώσα, δηλ $\vec{E} \perp$ ΑΝΩ ΕΔΡΑ

Στην μπροστινή έδρα ($y=a_y$) να $\exists$ μόνο E_y συνιστώσα, δηλ $\vec{E} \perp$ ΜΠΡΟΣΤΙΝΗ ΕΔΡΑ

Στη δεξιά έδρα ($z=a_z$) να $\exists$ μόνο E_z συνιστώσα, δηλ $\vec{E} \perp$ ΔΕΞΙΑ ΕΔΡΑ

@ ΑΝΩ ΕΔΡΑ $\sin(k_{x2}a_x) = 0 = \sin(k_{x3}a_x)$ $\quad k_{x2} = \frac{m_{x2}\pi}{a_x}$ $\quad k_{x3} = \frac{m_{x3}\pi}{a_x}$

@ ΜΠΡΟΣΤΙΝΗ » $\sin(k_{y1}a_y) = 0 = \sin(k_{y3}a_y)$ $\quad k_{y1} = \frac{m_{y1}\pi}{a_y}$ $\quad k_{y3} = \frac{m_{y3}\pi}{a_y}$

@ ΔΕΞΙΑ ΕΔΡΑ $\sin(k_{z1}a_z) = 0 = \sin(k_{z2}a_z)$ $\quad k_{z1} = \frac{m_{z1}\pi}{a_z}$ $\quad k_{z2} = \frac{m_{z2}\pi}{a_z}$

$$k_{x2} = k_{x3} := k_x$$
$$k_{y1} = k_{y3} := k_y$$
$$k_{z1} = k_{z2} := k_z$$

$$k_{x1}^2 + \frac{m_{y1}^2\pi^2}{a_y^2} + \frac{m_{z1}^2\pi^2}{a_z^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\frac{m_{x2}^2\pi^2}{a_x^2} + k_{y2}^2 + \frac{m_{z2}^2\pi^2}{a_z^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\frac{m_{x3}^2\pi^2}{a_x^2} + \frac{m_{y3}^2\pi^2}{a_y^2} + k_{z3}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_{x1}^2 + k_{y1}^2 + k_{z1}^2 = k_{x2}^2 + k_{y2}^2 + k_{z2}^2 = k_{x3}^2 + k_{y3}^2 + k_{z3}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_{x1}^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_x^2 + k_{y2}^2 + k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_{z3}^2$$

$$(k_{x1}^2 - k_x^2) = (k_{y2}^2 - k_y^2) \qquad (k_{x1}^2 - k_x^2) = (k_{z3}^2 - k_z^2) \qquad (k_{y2}^2 - k_y^2) = (k_{z3}^2 - k_z^2)$$

$$(k_{x1}^2 - k_x^2) = (k_{y2}^2 - k_y^2) = (k_{z3}^2 - k_z^2)$$

$\downarrow$ $\exists$ στο $\cos(k_{x1}x)$ — $k_{x1} = k_x$

$\downarrow$ $\exists$ στο $\cos(k_{y2}y)$ — $k_{y2} = k_y$

$\downarrow$ $\exists\cos(k_{z3}z)$ — $k_{z3} = k_z$

άρτιες συναρτήσεις

πρ37'

Άρα
$$k_x = k_{x1} = k_{x2} = k_{x3} = \frac{m_x \pi}{a_x} \qquad m_x \in \mathbb{Z}$$
$$k_y = k_{y1} = k_{y2} = k_{y3} = \frac{m_y \pi}{a_y} \qquad m_y \in \mathbb{Z}$$
$$k_z = k_{z1} = k_{z2} = k_{z3} = \frac{m_z \pi}{a_z} \qquad m_z \in \mathbb{Z}$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} := k^2$$

$$E_x(x,y,z) = E_{x0} \cdot \cos(k_x x) \cdot \sin(k_y \cdot y) \cdot \sin(k_z z)$$
$$E_y(x,y,z) = E_{y0} \cdot \sin(k_x x) \cdot \cos(k_y \cdot y) \cdot \sin(k_z z)$$
$$E_z(x,y,z) = E_{z0} \cdot \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y \cdot y) \cdot \cos(k_z \cdot z)$$

$$k_x = \frac{m_x \pi}{a_x} \qquad m_x \in \mathbb{N}$$
$$k_y = \frac{m_y \pi}{a_y} \qquad m_y \in \mathbb{N}$$
$$k_z = \frac{m_z \pi}{a_z} \qquad m_y \in \mathbb{N}$$

απορροφούνται τα πρόσημα στα E_{x0}, E_{y0}, E_{z0}

$$\boxed{\omega_{m_x,m_y,m_z} = \frac{\pi c}{a}\sqrt{m_x^2+m_y^2+m_z^2}}$$

κυβική κοιλότητα
$(a_x=a_y=a_z=a)$

Μπορούμε να πάρουμε τα $m_x, m_y, m_z \in \mathbb{N}$ απορροφώντας την αλλαγή προσήμου στα E_{x0}, E_{y0}, E_{z0} δηλαδή επιτρέποντας στα E_{x0}, E_{y0}, E_{z0} να πάρουν θετικές ή αρνητικές τιμές τέτοιες ώστε να συμφωνούν με τις συνοριακές συνθήκες.

$$\boxed{\frac{a\omega}{\pi c} = \sqrt{m_x^2+m_y^2+m_z^2}}$$

m_x	m_y	m_z	$\frac{a\omega}{\pi c}$	E πλάτος	σχόλιο	B πλάτος	σχόλιο
0	0	0	0	0		0	
0	0	1	1	0		0	
0	1	1	$\sqrt{2}$	$\neq 0$	$\exists E_x$	$\neq 0$	$\exists B_y, B_z$
1	1	1	$\sqrt{3}$	$\neq 0$		$\neq 0$	
0	0	2	$\sqrt{4}=2$	0		0	
0	1	2	$\sqrt{5}$	$\neq 0$	$\exists E_x$	$\neq 0$	$\exists B_y, B_z$

... πράξεις ...

$$B_x = \frac{i}{\omega}\left(E_{y0}k_z - E_{z0}k_y\right)\cdot \sin(k_x x)\cdot\cos(k_y y)\cdot\cos(k_z z)$$

$$B_y = \frac{i}{\omega}\left(E_{z0}k_x - E_{x0}k_z\right)\cdot \cos(k_x x)\cdot\sin(k_y y)\cdot\cos(k_z z)$$

$$B_z = \frac{i}{\omega}\left(E_{x0}k_y - E_{y0}k_x\right)\cdot \cos(k_x x)\cdot\cos(k_y y)\cdot\sin(k_z z)$$

μηδενίζεται για
$x=0$ κάτω
$y=0$ πίσω
$z=0$ αριστερά
σύμφωνα με την ΕΣΣ* $B_\perp = 0$

Επίσης μηδενίζεται για

άνω $x=a_x$ $\sin(k_x a_x) = \sin(m_x\pi) = 0$

μπροστά $y=a_y$ $\sin(k_y a_y) = \sin(m_y\pi) = 0$

δεξιά $z=a_z$ $\sin(k_z a_z) = \sin(m_z\pi) = 0$

και πάλι σύμφωνα με την ΕΣΣ* $B_\perp = 0$