$$\boxed{\dot{C}_{k'}(t) = -\frac{i}{\hbar}\sum_{k} C_k(t)\, e^{i(\Omega_{k'}-\Omega_k)t}\, U_{\mathcal{E}k'k}(t)}$$

$\underline{\Delta\Sigma}$ $\Omega := \Omega_2 - \Omega_1 = \dfrac{E_2 - E_1}{\hbar}$

προσέγγιση διπόλου

$$U_{\mathcal{E}k'k}(t) = \begin{cases} -p\mathcal{E}_0 \cos\omega t, & k \neq k' \\ 0, & k = k' \end{cases}$$

$$p := p_{z12} = -eZ_{12} = -eZ_{21} = p_{z21}$$

$$\vec{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0\, \hat{z} \cos\omega t$$

για $k'=1$: $\dot{C}_1(t) = i\Omega_R C_2(t)\, e^{-i\Omega t} \cos\omega t$

$k'=2$: $\dot{C}_2(t) = i\Omega_R C_1(t)\, e^{i\Omega t} \cos\omega t$

$\Omega_R := \dfrac{p\mathcal{E}_0}{\hbar}$ (άν $p>0$)

$\Omega_R := \dfrac{-p\mathcal{E}_0}{\hbar}$ (άν $p<0$)

ορίζεται πάντοτε θετική

$$\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

$\underline{\text{RWA}}$

$$\dot{C}_1(t) = i\Omega_R C_2(t)\, e^{i(\omega-\Omega)t}$$
$$\dot{C}_2(t) = i\Omega_R C_1(t)\, e^{-i(\omega-\Omega)t}$$

$\Delta := \omega - \Omega$ detuning αποσυντονισμός

$$\dot{C}_1(t) = i\Omega_R e^{i\Delta t} C_2(t)$$
$$\dot{C}_2(t) = i\Omega_R e^{-i\Delta t} C_1(t)$$

ή

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i\Omega_R e^{i\Delta t} \\ i\Omega_R e^{-i\Delta t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix}$$

Το σύστημα λύνεται με πολλούς τρόπους

$\underline{a}$ μετασχηματισμός, μέθοδος ιδιοτιμών-ιδιοανυσμάτων

$\underline{b}$ επιπλέον παραγώγιση και χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$\underline{c}$ προσεγγιστική μέθοδος Newton

$\underline{a}$

$$\left.\begin{aligned} C_1(t) &:= \mathbb{C}_1(t)\, e^{i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_2(t) &:= \mathbb{C}_2(t)\, e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \end{aligned}\right\} \text{μετασχηματισμός}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbb{C}}_1(t) \\ \dot{\mathbb{C}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\frac{\Delta}{2} & i\frac{\Omega_R}{2} \\ i\frac{\Omega_R}{2} & i\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}_1(t) \\ \mathbb{C}_2(t) \end{bmatrix}$$

$\vec{x}(t)$ $\quad \tilde{A} := -iA$ $\quad \vec{x}(t)$ $\quad$ ΔΔΜ $\left.\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{u}\, e^{\tilde{\lambda} t} \\ \tilde{\lambda} &= -i\lambda \end{aligned}\right\}$ $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$

$$A\vec{u} = \lambda \vec{u} \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix}$$

$\vec{u}_1$ ιδιοάνυσμα με ιδιοτιμή λ_1 μερική λύση $\vec{u}_1 e^{-i\lambda_1 t}$

$\vec{u}_2$ ιδιοάνυσμα με ιδιοτιμή λ_2 μερική λύση $\vec{u}_2 e^{-i\lambda_2 t}$

άν $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ γραμμικώς ανεξάρτητα η γενική λύση θα είναι

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{2} \sigma_k \vec{u}_k e^{-i\lambda_k t}}$$

από τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε τα σ_k

Εύρεση ιδιοτιμών

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_{2,1} = \pm \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}$$

για $\Delta = 0$ $\lambda_{2,1} = \pm \frac{\Omega_R}{2}$

ΛΥΣΗ για $\Delta = 0$

$$\lambda_1 = -\frac{\Omega_R}{2} \quad \dots \quad \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{\Omega_R}{2} \quad \dots \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \sigma_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{+i\frac{\Omega_R}{2}t} + \sigma_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} = \begin{bmatrix} C_1(t) \cancel{e^{-i\frac{\Delta}{2}t}}^{1} \\ C_2(t) \cancel{e^{i\frac{\Delta}{2}t}}^{1} \end{bmatrix}$$

ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ $C_1(0) = 1,\ C_2(0) = 0 \;\dot{=}\; \mathbb{C}_1(0) = 1 \quad \mathbb{C}_2(0) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C_1(t) = \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

$$C_2(t) = i \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

ΔΣ $\quad \Delta = 0 \quad$ ἀρχικὲς συνθῆκες $\quad C_1(0) = 1\ ,\ C_2(0) = 0$ δηλ.

ἀποσυντονισμός

$\Delta := \omega - \Omega$

$$P_1(t) = |C_1(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\Omega_R t)$$

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\Omega_R t)$$

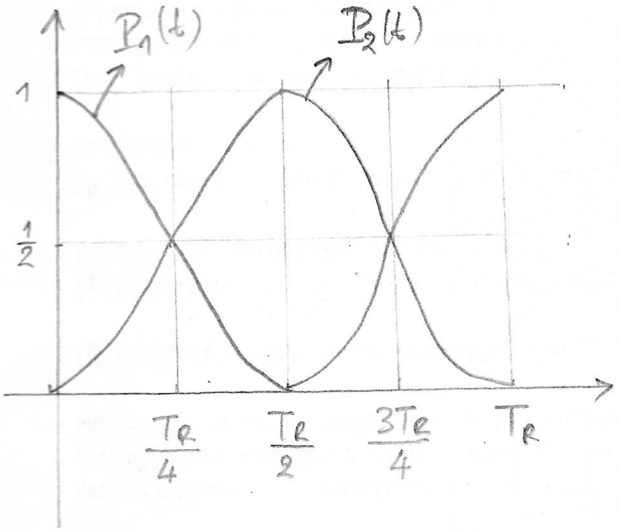
$$\Omega_R := \frac{\wp E_0}{\hbar} \quad (\wp > 0)$$

συχνότητα Rabi ὁρίζεται θετική

$$\Omega_R := \frac{-\wp E_0}{\hbar} \quad (\wp < 0)$$

Ω_R: ἐκφράζει την ταχύτητα διαταραχής

Δ : ἐκφράζει την ἀπόσταση τῶν ω (ΗΜ πεδίο) κ. Ω (ΔΣ)



περίοδος (period)

$$T_R = \frac{2\pi}{\Omega_R}$$

$A_R = 1$

μέγιστο ποσοστὸ μεταβιβάσεως (maximum transfer percentage)

$$\langle P_1(t)\rangle = \langle |C_1(t)|^2\rangle = \frac{1}{2}$$ μέση πιθανότητα παρουσίας στη στάθμη 1

$$\langle P_2(t)\rangle = \langle |C_2(t)|^2\rangle = \frac{1}{2}$$ μέση πιθανότητα παρουσίας στη στάθμη 2

μέγιστος ρυθμὸς μεταβιβάσεως (maximum transfer rate)

$$\boxed{\frac{A_R}{T_R} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\Omega_R}} = \frac{\Omega_R}{2\pi}}$$

$t_{2mean} :=$ ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται ὥστε ἡ $P_2(t)$ να πιάσει 1η φορά τὴν $\langle P_2(t)\rangle$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\Omega_R t_{2mean}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(\Omega_R t_{2mean}) = 0 \Rightarrow$$

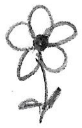
$$\Omega_R t_{2mean} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{t_{2mean} = \frac{\pi}{2\Omega_R}}$$

μέσος ρυθμὸς μεταβιβάσεως (mean transfer rate)

$$k := \frac{\langle |C_2(t)|^2\rangle}{t_{2mean}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2\Omega_R}} = \frac{\Omega_R}{\pi} \Rightarrow \boxed{k = 2\frac{A_R}{T_R}}$$

Είχαμε βρει για $\Delta = 0$

$$\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \\ \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R t}{2}} - \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R t}{2}} \end{bmatrix}$$



ας βάλουμε αρχικές συνθήκες $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}$ κ $C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \Rightarrow$

$$|C_1(0)|^2 = \frac{1}{2} = |C_2(0)|^2$$

- $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = e^{i\theta}$
- $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 = e^{i\varphi}$

$\oplus$ $2\sigma_1 = e^{i\theta} + e^{i\varphi}$

$\ominus$ $2\sigma_2 = e^{i\theta} - e^{i\varphi}$

$$\Rightarrow \quad \sigma_1 = \frac{e^{i\theta} + e^{i\varphi}}{2}, \qquad \sigma_2 = \frac{e^{i\theta} - e^{i\varphi}}{2}$$

- $C_1(t) = \frac{e^{i\theta} + e^{i\varphi}}{2\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R t}{2}} + \frac{e^{i\theta} - e^{i\varphi}}{2\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R t}{2}}$
- $C_2(t) = \frac{e^{i\theta} + e^{i\varphi}}{2\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R t}{2}} - \frac{e^{i\theta} - e^{i\varphi}}{2\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R t}{2}}$

$\Rightarrow$

- $2\sqrt{2}\, C_1(t) = \underline{e^{i\theta} e^{i\frac{\Omega_R t}{2}}} + \underline{e^{i\varphi} e^{i\frac{\Omega_R t}{2}}} + \underline{e^{i\theta} e^{-i\frac{\Omega_R t}{2}}} - \underline{e^{i\varphi} e^{-i\frac{\Omega_R t}{2}}}$
- $2\sqrt{2}\, C_2(t) = \underline{e^{i\theta} e^{i\frac{\Omega_R t}{2}}} + \underline{e^{i\varphi} e^{i\frac{\Omega_R t}{2}}} - \underline{e^{i\theta} e^{-i\frac{\Omega_R t}{2}}} + \underline{e^{i\varphi} e^{-i\frac{\Omega_R t}{2}}}$

$\Rightarrow$

- $2\sqrt{2}\, C_1(t) = e^{i\theta}\, \underline{2\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)} + e^{i\varphi}\, \underline{2i\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)}$
- $2\sqrt{2}\, C_2(t) = e^{i\theta}\, \underline{2i\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)} + e^{i\varphi}\, \underline{2\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)}$

$\Rightarrow$

- $8|C_1(t)|^2 = 4\cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) + 4\sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) + e^{i\theta} 2\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) e^{-i\varphi} 2(-i)\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$
  $e^{i\varphi} 2i\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) 2e^{-i\theta}\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \Rightarrow$

$$2|C_1(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) - i e^{i\theta} e^{-i\varphi} \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) + i e^{i\varphi} e^{-i\theta} \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\sin(\Omega_R t)\, i \left\{ e^{i(\varphi-\theta)} - e^{-i(\varphi-\theta)} \right\} = \frac{i}{2}\sin(\Omega_R t)\, 2i\sin\psi = -\sin(\Omega_R t)\sin\psi$$

$$= \sin(\Omega_R t)\cdot\sin(\theta-\varphi)$$

$\psi := \varphi - \theta$

$\cos\psi \quad i\sin\psi$

$-\cos\psi + i\sin\psi$

$$\boxed{|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(\Omega_R t)\sin(\theta-\varphi)}$$ γενικώς, ∃ ταλάντωση

$$\boxed{\text{αν όμως } \theta=\varphi \Rightarrow |C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} \text{ κ } \nexists \text{ ταλάντωση}}$$

$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

Αν θέλω $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(\Omega_R t)\sin(\theta-\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\Omega_R t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$$\sin(\Omega_R t)\sin(\theta-\varphi) = -\sin(\Omega_R t) \Rightarrow$$

$$\sin(\theta-\varphi) = -1 \Rightarrow \theta-\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

∘ $8|C_2(t)|^2 = 4\sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) + 4\cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) + e^{i\theta} 2i\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \cdot e^{-i\varphi} 2\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$

$$e^{i\varphi} 2\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \cdot e^{-i\theta} 2(-i)\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \Rightarrow$$

$$2|C_2(t)|^2 = 1 + \frac{1}{2}\sin(\Omega_R t)\, i\left\{e^{i\theta}e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}e^{-i\theta}\right\}$$

$$e^{i(\theta-\varphi)} - e^{-i(\theta-\varphi)}$$

$\psi' = \theta - \varphi$ $\qquad\qquad \psi' = -\psi$

$$e^{i\psi'} - e^{-i\psi'}$$

$$\cos\psi' \quad i\sin\psi'$$

$$-\cos\psi' + i\sin\psi'$$

$$2|C_2(t)|^2 = 1 + \frac{1}{\cancel{2}}\sin(\Omega_R t)\, i\, \cancel{2} i\sin\psi'$$

$$\boxed{|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(\Omega_R t)\sin(\theta-\varphi)}$$ γενικώς, ∃ ταλάντωση

$$\boxed{\text{αν όμως } \theta=\varphi \Rightarrow |C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} \text{ κ } \nexists \text{ ταλάντωση}}$$

Αν θέλω $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(\Omega_R t)\sin(\theta-\varphi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\Omega_R t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$$\sin(\Omega_R t)\sin(\theta-\varphi) = -\sin(\Omega_R t) \Rightarrow$$

$$\sin(\theta-\varphi) = -1 \Rightarrow \theta-\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να λυθεί το πρόβλημα $\Delta=0$ με αρχική συνθήκη $C_1(0)=0$, $C_2(0)=1$

δηλ. το ηλεκτρόνιο βρίσκεται αρχικά στην ΑΝΩ ΣΤΑΘΜΗ

ΛΥΣΗ

Είχαμε βρεί για $\Delta=0$

$$C_1(t) = \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t}$$

$$C_2(t) = \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t}$$

με αρχική συνθήκη $C_1(0)=0$, $C_2(0)=1 \Rightarrow$

$$0 = \frac{c_1+c_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow c_2 = -c_1 := -c$$

$$1 = \frac{c_1-c_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} = c+c \Rightarrow 2c = \sqrt{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Άρα $C_1(t) = \frac{1}{2} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{1}{2} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} = i\sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)$

$$C_2(t) = \frac{1}{2} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{1}{2} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} = \frac{1}{2}2\cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) = \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να λυθεί το πρόβλημα $\Delta = 0$ και αρχική συνθήκη

$$C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = C_2(0)$$

$$\Rightarrow |C_1(0)|^2 = \frac{1}{2} = |C_2(0)|^2$$

Δηλ. το ηλεκτρόνιο βρίσκεται εξ ίσου στις δυο στάθμες τη χρονική στιγμή 0.

ΛΥΣΗ

Είχαμε βρεί για $\Delta = 0$

$$\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \\ \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \end{bmatrix}$$

με αρχική συνθήκη $C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = C_2(0) \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{c_1}{\sqrt{2}} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 = c_1 + c_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{c_1}{\sqrt{2}} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 = c_1 - c_2$$

$$2 = 2c_1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$c_2 = 0$$

Άρα

$$C_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} \Rightarrow |C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} = \text{σταθερό}$$

$$C_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} \Rightarrow |C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} = \text{σταθερό}$$

Δηλαδή δεν υπάρχει ταλάντωση φορτίου...

• ΛΥΣΗ για $\Delta \neq 0$

για μιλ, για $\xi < 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & +\frac{\Omega_R}{2} \\ +\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

πίνακας A

$$\lambda_{2,1} = \pm \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} = \pm \lambda$$

$\lambda > 0$

$$\vec{U}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \end{bmatrix} \qquad a = \frac{\frac{\Delta}{2} + \frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}}$$

οι πράξεις υπάρχουν στο βιβλίο

$$\vec{U}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a'^2}} \\ \frac{a'}{\sqrt{1+a'^2}} \end{bmatrix} \qquad a' = \frac{\frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}}$$

$A\vec{U} = \lambda \vec{U}$

είχαμε ΔΔΜ $\vec{U} e^{-i\lambda t}$

$\vec{U}_k, \lambda_k$

ιδιοανύσματα, ιδιοτιμές

Γενική λύση

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(t) e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_2(t) e^{i\frac{\Delta}{2}t} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{2} \sigma_k \vec{U}_k e^{-i\lambda_k t} = \sigma_1 \vec{U}_1 e^{-i\lambda_1 t} + \sigma_2 \vec{U}_2 e^{-i\lambda_2 t}$$

$$= \sigma_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \end{bmatrix} e^{-i\lambda_1 t} + \sigma_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a'^2}} \\ \frac{a'}{\sqrt{1+a'^2}} \end{bmatrix} e^{-i\lambda_2 t}$$

Έστωσαν

Αρχικές Συνθήκες $C_1(0) = 1 \quad C_2(0) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{1+a'^2}} \\ \frac{\sigma_1 a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{\sigma_2 a'}{\sqrt{1+a'^2}} \end{bmatrix} \Rightarrow \ldots \qquad \sigma_1 = \frac{a'\sqrt{1+a^2}}{a'-a} \qquad \sigma_2 = -\frac{a\sqrt{1+a'^2}}{a'-a}$$

Άρα...

$$\begin{bmatrix} C_1(t) e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_2(t) e^{i\frac{\Delta}{2}t} \end{bmatrix} = \frac{a'\sqrt{1+a^2}}{a'-a} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \end{bmatrix} e^{-i\lambda_1 t} - \frac{a\sqrt{1+a'^2}}{a'-a} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a'^2}} \\ \frac{a'}{\sqrt{1+a'^2}} \end{bmatrix} e^{-i\lambda_2 t}$$

B

$$C_1(t)\,e^{-i\frac{\Delta}{2}t} = \frac{a'}{a'-a}\,e^{-i\lambda_1 t} - \frac{a}{a'-a}\,e^{-i\lambda_2 t}$$

$$C_2(t)\,e^{i\frac{\Delta}{2}t} = \frac{aa'}{a'-a}\,e^{-i\lambda_1 t} - \frac{aa'}{a'-a}\,e^{-i\lambda_2 t}$$

$$\frac{a'}{a'-a} = \frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}-\Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}} = \gamma_1 \qquad \frac{aa'}{a'-a} = \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}} = \gamma_3$$

$$\frac{a}{a'-a} = -\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}+\Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}} = -\gamma_2$$

$$C_1(t)\,e^{-i\frac{\Delta}{2}t} = \gamma_1 e^{-i\lambda_1 t} + \gamma_2 e^{-i\lambda_2 t} \Rightarrow C_1(t) = \left(\gamma_1 e^{-i\lambda_1 t} + \gamma_2 e^{-i\lambda_2 t}\right) e^{i\frac{\Delta}{2}t}$$

$$C_2(t)\,e^{i\frac{\Delta}{2}t} = \gamma_3\left(e^{-i\lambda_1 t} - e^{-i\lambda_2 t}\right) \Rightarrow C_2(t) = \gamma_3\left(e^{-i\lambda_1 t} - e^{-i\lambda_2 t}\right) e^{-i\frac{\Delta}{2}t}$$

$$|C_1(t)|^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_1\gamma_2\, e^{i(\lambda_1-\lambda_2)t} + \gamma_1\gamma_2\, e^{i(\lambda_2-\lambda_1)t}$$

$$|C_2(t)|^2 = \gamma_3^2\left[1 + 1 - e^{i(\lambda_1-\lambda_2)t} - e^{i(\lambda_2-\lambda_1)t}\right]$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = -\lambda - \lambda = -2\lambda \qquad \lambda_2 - \lambda_1 = 2\lambda$$

$$|C_1(t)|^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_1\gamma_2\, e^{-i2\lambda t} + \gamma_1\gamma_2\, e^{i2\lambda t} = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_1\gamma_2\, 2\cos(2\lambda t)$$

$$|C_2(t)|^2 = \gamma_3^2\left[2 - e^{-i2\lambda t} - e^{i2\lambda t}\right] = \gamma_3^2\left[2 - 2\cos(2\lambda t)\right]$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{4(\Omega_R^2+\Delta^2)} \cdot 2\left(1-\cos(2\lambda t)\right) = \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}\, 2\sin^2(\lambda t) = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2} \cdot \sin^2(\lambda t)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \frac{\Omega_R^2 + 2\Delta^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}, \quad 2\gamma_1\gamma_2 = \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} \Rightarrow \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2 = 1 \qquad 2\gamma_3^2 = 2\gamma_1\gamma_2$$

$$\gamma_3^2 = \gamma_1\gamma_2$$

$$|C_1(t)|^2 = 1 - 2\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_1\gamma_2\cos(2\lambda t) = 1 + 2\gamma_1\gamma_2\left[\cos(2\lambda t) - 1\right]$$

$$|c_1(t)|^2 = 1 + \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} \cdot (-2)\sin^2(\lambda t)$$

$$|c_1(t)|^2 = 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2} \cdot \sin^2(\lambda t)$$ όπως αναμενόταν

διότι $|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1$

<u>Συνοπτικώς:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} |c_1(t)|^2 &= 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2} \cdot \sin^2(\lambda t) \\ |c_2(t)|^2 &= \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2} \cdot \sin^2(\lambda t) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}}$$

ή

$$|c_1(t)|^2 = 1 - \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} + \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} \cdot \cos(2\lambda t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} |c_1(t)|^2 &= \frac{\Omega_R^2+2\Delta^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} + \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} \cdot \cos(2\lambda t) = P_1(t) \\ |c_2(t)|^2 &= \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} - \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} \cdot \cos(2\lambda t) = P_2(t) \end{aligned}}$$

περίοδος ταλαντώσεων

$$\boxed{T_R = \frac{2\pi}{2\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}} = \frac{1}{\nu_R}}$$

μέγιστο ποσοστό μεταβιβάσεως

maximum transfer percentage

$$\boxed{\alpha_R = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}}$$

$\Delta \uparrow \Rightarrow \alpha_R \downarrow$ και $\nu_R \uparrow$ $(T_R \downarrow)$

$\Delta = 0 \Rightarrow \alpha_R = 1$ και $T_R = \frac{2\pi}{\Omega_R}$

Δ

$$\langle P_1(t)\rangle = \langle |C_1(t)|^2\rangle = \frac{\Omega_R^2 + 2\Delta^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}$$ μέση πιθανότητα παρουσίας στη στάθμη 1

$$\langle P_2(t)\rangle = \langle |C_2(t)|^2\rangle = \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}$$ μέση πιθανότητα παρουσίας στη στάθμη 2

μέγιστος ρυθμός μεταβιβάσεως (maximum transfer rate)

$$\boxed{\frac{A_R}{T_R} = \frac{\Omega_R^2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{(\Omega_R^2+\Delta^2)\,2\pi} = \frac{\Omega_R^2}{2\pi\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}}$$

t_{2mean} := ό χρόνος, ό οποίος απαιτείται ώστε ή $P_2(t)$ να πιάσει 1η φορά την $\langle P_2(t)\rangle$

$$\Rightarrow \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} - \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}\cdot\cos(2\lambda t_{2mean}) = \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}$$

$$\Rightarrow \cos(2\lambda t_{2mean}) = 0 \Rightarrow 2\lambda t_{2mean} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{t_{2mean} = \frac{\pi}{4\lambda}}$$

μέσος ρυθμός μεταβιβάσεως (mean transfer rate)

$$\boxed{k := \frac{\langle |C_2(t)|^2\rangle}{t_{2mean}} = \frac{\Omega_R^2\; 4\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)\,\pi\;\;2} = \frac{\Omega_R^2}{\pi\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 2\frac{A_R}{T_R}}$$

Παρατηρούμε πώς $\langle P_1(t)\rangle > \langle P_2(t)\rangle$ και μάλιστα, ή διαφορά τους,

$\delta = \dfrac{\Delta^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}$. Όταν $\Delta\to\infty \Rightarrow \delta\to 1$

για $\Delta = \Omega_R$ $\quad \langle P_1(t)\rangle = \frac{3}{4} \quad \langle P_2(t)\rangle = \frac{1}{4}$

για $\Delta = 3\Omega_R$ $\quad \langle P_1(t)\rangle = \frac{19}{20} \quad \langle P_2(t)\rangle = \frac{1}{20}$

E

* όταν $|\Delta|\uparrow$ (δηλ. απομακρυνόμαστε από το συντονισμό) $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{matrix} \mathcal{A}_R \searrow \\ T_R \searrow \end{matrix}}$

δηλ. το φαινόμενο γίνεται πιο μικρό και πιο γρήγορο

* όταν $\Omega_R << |\Delta|$ (μικρή διαταραχή σε σχέση με την απόλυτη τιμή του αποσυντονισμού)

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2} \sin^2\left(\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}\, t\right)$$

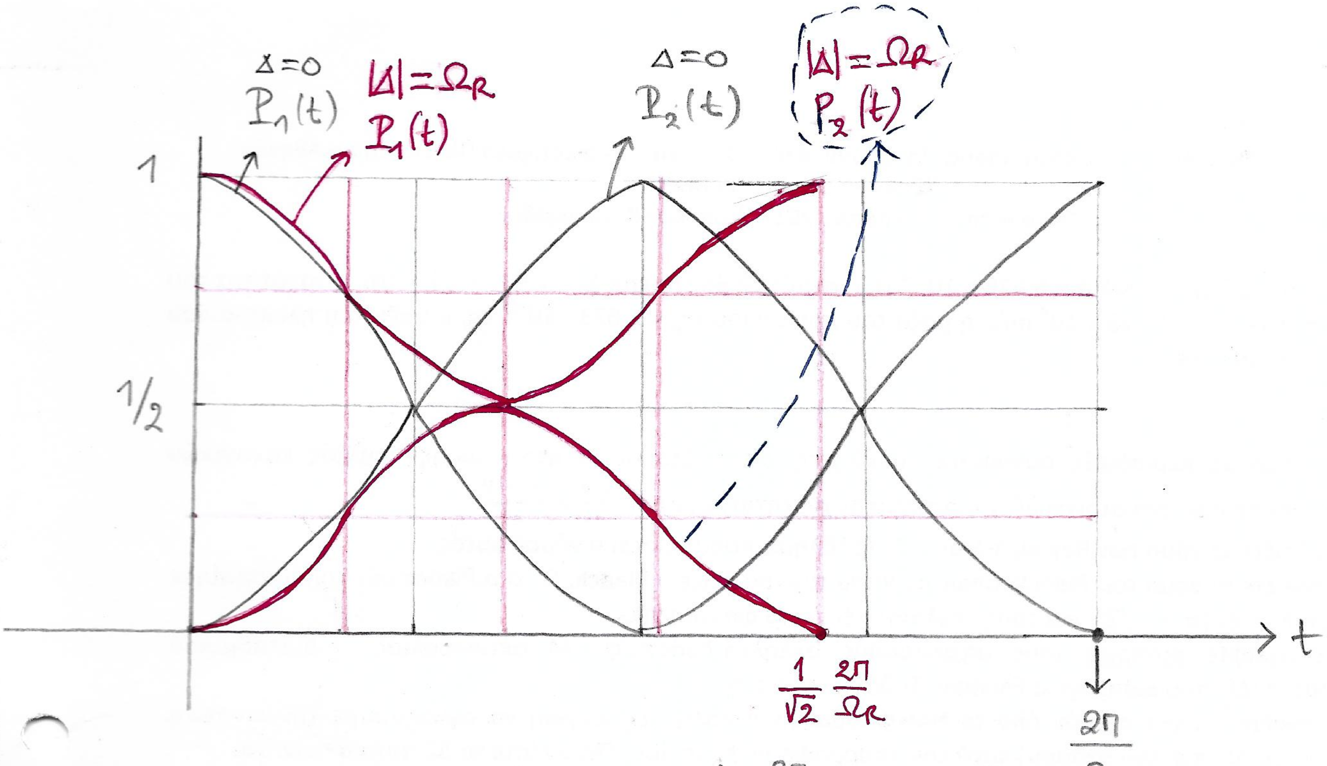
$$\approx \frac{\Omega_R^2}{\Delta^2} \sin^2\left(\frac{|\Delta|}{2}\, t\right)$$

$$\text{ή } P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} - \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} \cdot \cos\left(\cancel{2}\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{\cancel{2}}\, t\right)$$

$$\approx \frac{\Omega_R^2}{2\Delta^2} - \frac{\Omega_R^2}{2\Delta^2} \cos(|\Delta| \cdot t)$$

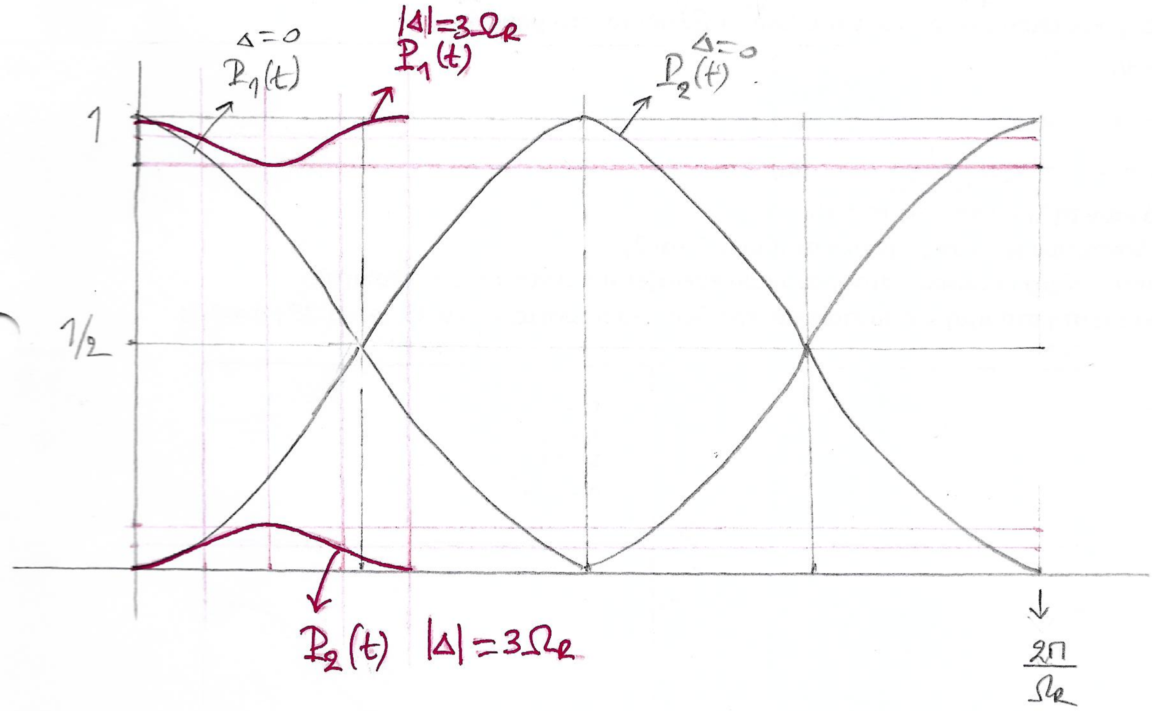
$$\Rightarrow T_R \approx \frac{2\pi}{|\Delta|} \qquad \mathcal{A}_R \approx \frac{\Omega_R^2}{\Delta^2}$$

$$\lim_{\Omega_R \to 0} T_R = \frac{2\pi}{|\Delta|} \qquad \lim_{\Omega_R \to 0} \mathcal{A}_R = 0$$



αν π.χ. $|\Delta| = \Omega_R \Rightarrow \mathcal{A}_R = \frac{1}{2}$, $T_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\pi}{\Omega_R} \simeq 0.707\frac{2\pi}{\Omega_R}$

$\langle P_1(t)\rangle = \frac{3}{4}$ $\quad \langle P_2(t)\rangle = \frac{1}{4}$



αν π.χ. $|\Delta| = 3\Omega_R \Rightarrow \mathcal{A}_R = \frac{1}{10}$, $T_R = \frac{2\pi}{\sqrt{10}\,\Omega_R} \simeq 0.316\frac{2\pi}{\Omega_R}$