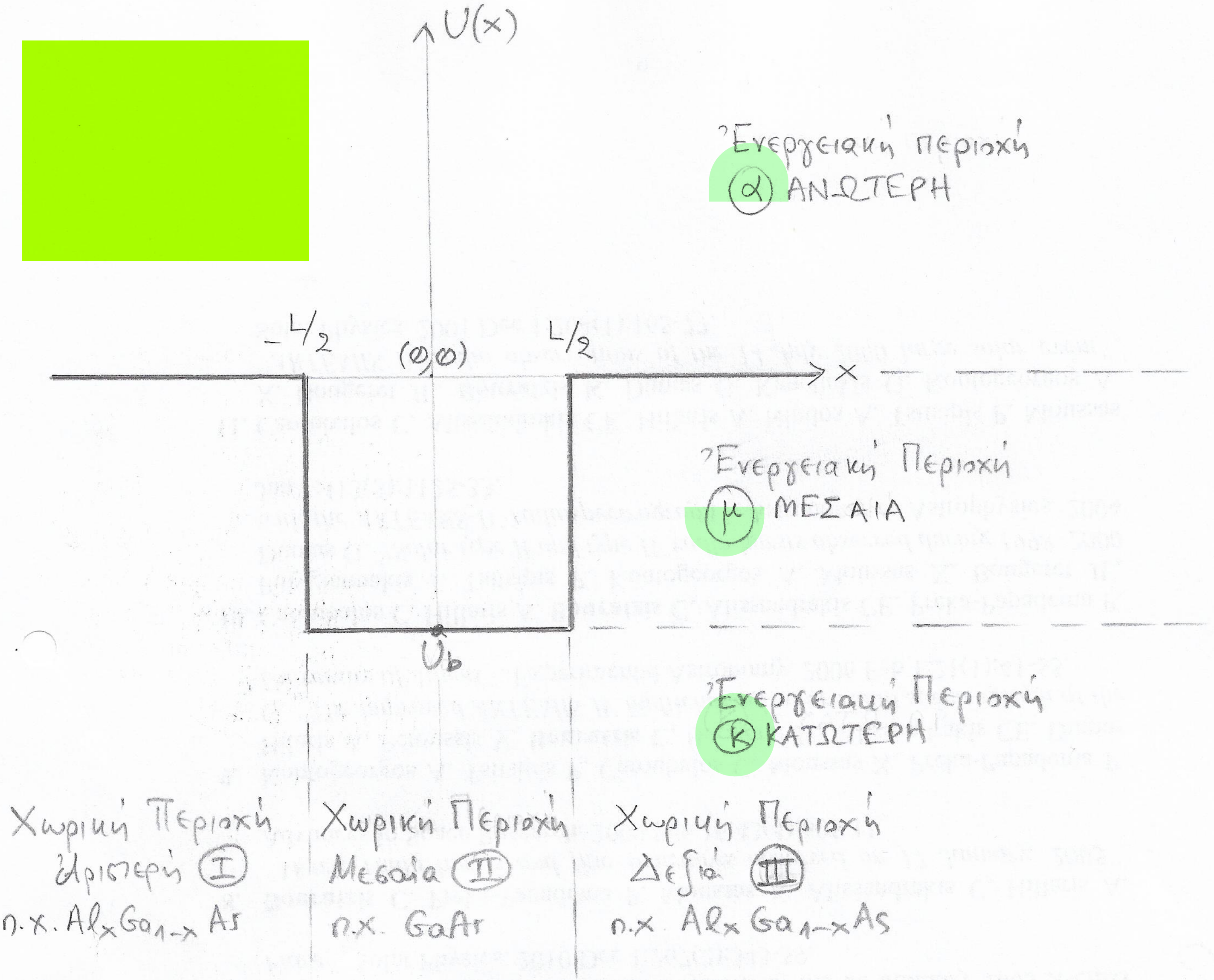


$\boxed{\text{Ας εξετάσουμε αρχικώς ενέργειες } E<0 \text{ (“δέσμιες καταστάσεις”)}}$

Χωρικές Περιοχές (I) κ (III) $\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = E\psi(x) \Leftrightarrow \psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0$ αρνητική

$0 > \frac{2mE}{\hbar^2} \underset{=}{\overset{\text{θέτουμε}}{}} -q^2$ κι έστω $q>0$. Άρα $\psi''(x) - q^2\psi(x) = 0$

ΔΛΜ = Δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής $\psi(x) = Ae^{-qx} + Be^{qx}$

$$\psi'(x) = -Aqe^{-qx} + Bqe^{qx}$$

$$\psi''(x) = Aq^2e^{-qx} + Bq^2e^{qx}$$

$$\left(Aq^2e^{-qx} + Bq^2e^{qx}\right) - q^2\left(Ae^{-qx} + Be^{qx}\right) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ ισχύει}$$

Δηλαδή αυτού του είδους οι λύσεις είναι ικανοποιητικές.

Επειδή οι $\psi(x)$ πρέπει να είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμες

$\lim_{x\to\infty}\psi(x) = 0 \Rightarrow \psi_{III}(x) = Ae^{-qx}$ $\quad \lim_{x\to-\infty}\psi(x) = 0 \Rightarrow \psi_I(x) = Be^{qx}$

$$\boxed{\psi_I(x) = B e^{qx} \Rightarrow \psi_I'(x) = Bq\, e^{qx}} \quad \text{I}$$

$$\boxed{\psi_{III}(x) = A e^{-qx} \Rightarrow \psi_{III}'(x) = -Aq\, e^{-qx}} \quad \text{III}$$

χωρική περιοχή II

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - U_b\,\psi(x) = E\,\psi(x)$$

$$\psi''(x) + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(E+U_b)}_{\text{θετική ή αρνητική}}\psi(x) = 0$$

$\boxed{\text{εάν } E < -U_b \Leftrightarrow E + U_b < 0}$

$$0 > \frac{2m}{\hbar^2}(E+U_b) \underset{\text{θέτουμε}}{=} -Q^2 \text{ κι έστω } Q > 0 \Rightarrow \psi''(x) - Q^2\psi(x) = 0$$

ΔΛΜ

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= \Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx} \\ \psi'(x) &= -\Gamma Q e^{-Qx} + \Delta Q e^{Qx} \\ \psi''(x) &= \Gamma Q^2 e^{-Qx} + \Delta Q^2 e^{Qx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\Gamma Q^2 e^{-Qx} + \Delta Q^2 e^{Qx} \\ &- Q^2\left(\Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx}\right) = 0 \Rightarrow \underset{\text{ισχύει}}{0 = 0} \end{aligned}$$

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \psi_{II}(x) &= \Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx} \\ \psi_{II}'(x) &= -\Gamma Q e^{-Qx} + \Delta Q e^{Qx} \end{aligned}\right\}} \quad \text{II}_{K}$$

$\boxed{\text{εάν } E > -U_b \Leftrightarrow E + U_b > 0}$

$$0 < \frac{2m}{\hbar^2}(E+U_b) \underset{\text{θέτουμε}}{=} k^2 \text{ κι έστω } k > 0 \Rightarrow \psi''(x) + k^2\psi(x) = 0$$

ΔΛΜ

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx} \\ \psi'(x) &= ik\Gamma e^{ikx} - ik\Delta e^{-ikx} \\ \psi''(x) &= -k^2\Gamma e^{ikx} - k^2\Delta e^{-ikx} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &-k^2\Gamma e^{ikx} - k^2\Delta e^{-ikx} \\ &+k^2\left(\Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx}\right) = 0 \Rightarrow \underset{\text{ισχύει}}{0 = 0} \end{aligned}$$

ή ΔΛΜ

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx \\ \psi'(x) &= -\Gamma k \sin kx + \Delta k \cos kx \\ \psi''(x) &= -\Gamma k^2 \cos kx - \Delta k^2 \sin kx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &-\Gamma k^2 \cos kx - \Delta k^2 \sin kx \\ &+k^2\left(\Gamma \cos kx + \Delta \sin kx\right) = 0 \Rightarrow \underset{\text{ισχύει}}{0 = 0} \end{aligned}$$

Αν εκλέξουμε $\boxed{\begin{aligned} \psi_{II}(x) &= \Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx} \\ \psi'_{II}(x) &= \Gamma ik e^{ikx} - \Delta ik e^{-ikx} \end{aligned}}$ $\Big\}$ II μ1

ενώ αν εκλέξουμε $\boxed{\begin{aligned} \psi_{II}(x) &= \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx \\ \psi'_{II}(x) &= -\Gamma k \sin kx + \Delta k \cos kx \end{aligned}}$ $\Big\}$ II μ2

Δηλαδή για τη χωρική περιοχή II έχουμε δύο διαφορετικές λύσεις

$II_{\mu1}$ ή $II_{\mu2}$ για τη μεσαία ενεργειακή περιοχή

II_{k} για την κατώτερη ενεργειακή περιοχή

Κατά τα γνωστά, για να βρούμε τη συνολική λύση, θα πρέπει να ταιριάξουμε τις κυματοσυναρτήσεις κ τις παραγώγους τους στα όρια των περιοχών δηλαδή στο $x = \pm L/2$.

• Ας προσπαθήσουμε να ταιριάξουμε τις I, II_k, III

$x = -L/2$

$$\left.\begin{aligned} \psi_I\left(-\tfrac{L}{2}\right) &= B e^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi_{II}\left(-\tfrac{L}{2}\right) &= \Gamma e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{-Q\frac{L}{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow B e^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{-Q\frac{L}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi'_I\left(-\tfrac{L}{2}\right) &= Bq e^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi'_{II}\left(-\tfrac{L}{2}\right) &= -\Gamma Q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{-Q\frac{L}{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Bq e^{-q\frac{L}{2}} = -\Gamma Q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{-Q\frac{L}{2}}$$

$\overset{(:)}{\Rightarrow}$

$$\overset{(:)}{\Rightarrow} \frac{\cancel{B} q \cancel{e^{-q\frac{L}{2}}}}{\cancel{B e^{-q\frac{L}{2}}}} = \frac{-\Gamma Q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{-Q\frac{L}{2}}}{\Gamma e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{-Q\frac{L}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta q e^{-Q\frac{L}{2}} = -\Gamma Q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{-Q\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma(q+Q) e^{Q\frac{L}{2}} = \Delta(Q-q) e^{-Q\frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{Q-q}{Q+q} e^{-QL}} \quad \oplus$$

$x = L/2$

$$\left.\begin{aligned}\psi_{III}\left(\tfrac{L}{2}\right) &= A e^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi_{II}\left(\tfrac{L}{2}\right) &= \Gamma e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{Q\frac{L}{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow A e^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{Q\frac{L}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi'_{III}\left(\tfrac{L}{2}\right) &= -Aq e^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi'_{II}\left(\tfrac{L}{2}\right) &= -\Gamma Q e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{Q\frac{L}{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow -Aq e^{-q\frac{L}{2}} = -\Gamma Q e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{Q\frac{L}{2}}$$

$$\overset{(:)}{\Rightarrow} \frac{-Aq \cancel{e^{-q\frac{L}{2}}}}{\cancel{A e^{-q\frac{L}{2}}}} = \frac{-\Gamma Q e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{Q\frac{L}{2}}}{\Gamma e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{Q\frac{L}{2}}} \Rightarrow$$

$$-\Gamma q e^{-Q\frac{L}{2}} - \Delta q e^{Q\frac{L}{2}} = -\Gamma Q e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{Q\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\Gamma(Q-q) e^{-Q\frac{L}{2}} = \Delta(Q+q) e^{Q\frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{Q+q}{Q-q} e^{QL}} \quad ⊕$$

$$\text{και} \Rightarrow \frac{Q-q}{Q+q} e^{-QL} = \frac{Q+q}{Q-q} e^{QL} \Rightarrow \boxed{e^{-2QL} = \frac{(Q+q)^2}{(Q-q)^2}}$$

Το οποίο είναι ΑΤΟΠΟ

διότι $Q > 0 \Rightarrow e^{-2QL} < 1$

και $\frac{(Q+q)^2}{(Q-q)^2} > 1 \Leftrightarrow (Q+q)^2 > (Q-q)^2 \Leftrightarrow Q^2 + q^2 + 2Qq > Q^2 + q^2 - 2Qq \Leftrightarrow$
$4Qq > 0$ το οποίο ισχύει διότι $Q > 0$ και $q > 0$

Δηλαδή $\nexists$ λύση στην κατώτερη ενεργειακή περιοχή.

- Ας προσπαθήσουμε να ταιριάξουμε τις (I) (II)$_{\mu 1}$ (III) στα σύνορα $x = \pm L/2$
Οι πράξεις βρίσκονται στη σελίδα $\underline{\underline{4'}}$, οι σχέσεις ◩, ◩ $\Rightarrow$

$$\frac{(ik+q)}{(ik-q)} e^{ikL} = \frac{(ik-q)}{(ik+q)} e^{-ikL} \Rightarrow \boxed{e^{2ikL} = \frac{(ik-q)^2}{(ik+q)^2} = \frac{-k^2+q^2-2ikq}{-k^2+q^2+2ikq} := \Lambda}$$

$x = \frac{L}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\Psi_{III}\left(\frac{L}{2}\right) = A e^{-q\frac{L}{2}} \\ \Psi_{II}\left(\frac{L}{2}\right) = \Gamma e^{ik\frac{L}{2}} + \Delta e^{-ik\frac{L}{2}}\end{array}\right\} A e^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma e^{ik\frac{L}{2}} + \Delta e^{-ik\frac{L}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Psi'_{III}\left(\frac{L}{2}\right) = -Aq e^{-q\frac{L}{2}} \\ \Psi'_{II}\left(\frac{L}{2}\right) = \Gamma ik e^{ik\frac{L}{2}} - \Delta ik e^{-ik\frac{L}{2}}\end{array}\right\} -Aq e^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma ik e^{ik\frac{L}{2}} - \Delta ik e^{-ik\frac{L}{2}}$$

$$(:) \Rightarrow -q = \frac{\Gamma ik e^{ik\frac{L}{2}} - \Delta ik e^{-ik\frac{L}{2}}}{\Gamma e^{ik\frac{L}{2}} + \Delta e^{-ik\frac{L}{2}}} \Rightarrow -\Gamma q e^{ik\frac{L}{2}} - \Delta q e^{-ik\frac{L}{2}} = \Gamma ik e^{ik\frac{L}{2}} - \Delta ik e^{-ik\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$(\Delta ik - \Delta q) e^{-ik\frac{L}{2}} = (\Gamma ik + \Gamma q) e^{ik\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\Delta(ik-q)}{\Gamma(ik+q)} = e^{ikL}} \Rightarrow \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{(ik+q)}{(ik-q)} e^{ikL}$$

$x = -\frac{L}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\Psi_{I}\left(-\frac{L}{2}\right) = B e^{-q\frac{L}{2}} \\ \Psi_{II}\left(-\frac{L}{2}\right) = \Gamma e^{-ik\frac{L}{2}} + \Delta e^{+ik\frac{L}{2}}\end{array}\right\} B e^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma e^{-ik\frac{L}{2}} + \Delta e^{ik\frac{L}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Psi'_{I}\left(-\frac{L}{2}\right) = Bq e^{-q\frac{L}{2}} \\ \Psi'_{II}\left(-\frac{L}{2}\right) = \Gamma ik e^{-ik\frac{L}{2}} - \Delta ik e^{+ik\frac{L}{2}}\end{array}\right\} Bq e^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma ik e^{-ik\frac{L}{2}} - \Delta ik e^{ik\frac{L}{2}}$$

$$(:) \Rightarrow q = \frac{\Gamma ik e^{-ik\frac{L}{2}} - \Delta ik e^{ik\frac{L}{2}}}{\Gamma e^{-ik\frac{L}{2}} + \Delta e^{ik\frac{L}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Gamma q e^{-ik\frac{L}{2}} + \Delta q e^{ik\frac{L}{2}} = \Gamma ik e^{-ik\frac{L}{2}} - \Delta ik e^{ik\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$(\Delta ik + \Delta q) e^{ik\frac{L}{2}} = (\Gamma ik - \Gamma q) e^{-ik\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\Delta(ik+q)}{\Gamma(ik-q)} = e^{-ikL}} \Rightarrow \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{(ik-q)}{(ik+q)} e^{-ikL}$$

$$\boxed{\xi := \frac{kL}{2}} \Rightarrow k = \frac{2\xi}{L} \qquad \boxed{\eta := \frac{qL}{2}} \Rightarrow q = \frac{2\eta}{L}$$

$$\boxed{\xi^2+\eta^2 = \frac{L^2}{4}\left(k^2+q^2\right) = \frac{L^2}{4}\left[\frac{2m}{\hbar^2}(E+U_b) - \frac{2m}{\hbar^2}E\right] = \frac{L^2}{4}\frac{2mU_b}{\hbar^2} = \frac{mU_bL^2}{2\hbar^2} := a^2}$$

$$\boxed{a^2 := \frac{mU_bL^2}{2\hbar^2}}$$ σταθερό ανεξάρτητο τῆι ἐνέργειας E κι ἔστω $a>0$

δηλαδή $\boxed{\xi^2+\eta^2 = a^2}$

Ἐκφράζει την <u>ἀποτελεσματικότητα</u> τοῦ φρέατος

Εἶναι ἀνάλογο τῆι μάζας ἤ ἐνεργοῦ μάζας τοῦ σωματιδίου m

τοῦ βάθους τοῦ φρέατος U_b και

τοῦ πλάτους στο τετράγωνο τοῦ φρέατος L^2.

$$\boxed{-\xi^2+\eta^2 := \beta^2}$$ Ὁπότε, ἡ σχέση $\Rightarrow$

ὁπότε $$e^{2i\frac{2}{L}\xi L} = \frac{-\xi^2+\eta^2-2i\xi\eta}{-\xi^2+\eta^2+2i\xi\eta} = \frac{\beta^2-2i\xi\eta}{\beta^2+2i\xi\eta} = \frac{(\beta^2-2i\xi\eta)^2}{(\beta^2+2i\xi\eta)(\beta^2-2i\xi\eta)}$$

$$e^{i4\xi} = \frac{\beta^4-4i\xi\eta\beta^2-4\xi^2\eta^2}{\beta^4+4\xi^2\eta^2} \Rightarrow e^{i4\xi}\left(\beta^4+4\xi^2\eta^2\right) = \beta^4-4i\xi\eta\beta^2-4\xi^2\eta^2$$

ἐν τῷ μεταξύ $$\beta^4+4\xi^2\eta^2 = \xi^4+\eta^4-2\xi^2\eta^2+4\xi^2\eta^2 = \left(\xi^2+\eta^2\right)^2 = a^4$$

5' 4

$$\beta^4-4\xi^2\eta^2=\beta^4+4\xi^2\eta^2-8\xi^2\eta^2=a^4-8\xi^2\eta^2$$

$$-4i\xi\eta\beta^2=\,;\ldots$$

$$\Rightarrow a^4e^{i4\xi}=a^4-8\xi^2\eta^2-4i\xi\eta\beta^2$$

$$a^4\cos 4\xi+ia^4\sin 4\xi=\left(a^4-8\xi^2\eta^2\right)+i\left(-4\xi\eta\beta^2\right)$$

$$\left.\begin{aligned} a^4\cos 4\xi &= a^4-8\xi^2\eta^2\\ a^4\sin 4\xi &= -4\xi\eta\beta^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \tan(4\xi)=\frac{-4\xi\eta\beta^2}{a^4-8\xi^2\eta^2}\ \otimes$$

όπου τα πράγματα φαίνονται περίπλοκα

$$\begin{aligned} \beta^4+4\xi^2\eta^2&=a^4\\ \beta^4-4\xi^2\eta^2&=a^4-8\xi^2\eta^2\\ \hline (+)\quad 2\beta^4&=2a^4-8\xi^2\eta^2\\ \beta^4&=a^4-4\xi^2\eta^2\\ \frac{a^4-\beta^4}{4}&=\xi^2\eta^2\\ \xi\eta&=\frac{\sqrt{a^4-\beta^4}}{2}\end{aligned}$$

$$a^4-\beta^4>0\Leftrightarrow a^4>\beta^4\Leftrightarrow\left(\frac{mV_bL^2}{2\hbar^2}\right)^2>\left(\eta^2-\xi^2\right)^2$$

$$=\left(\frac{L^2}{4}q^2-\frac{L^2}{4}k^2\right)^2=\frac{L^4}{4^2}\left[-\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_b)\right]^2\Leftrightarrow$$

$$\frac{\cancel{m^2}V_b^2\cancel{L^4}}{\cancel{4\hbar^4}}>\frac{\cancel{L^4}}{\cancel{4^2}}\frac{\cancel{4m^2}}{\cancel{\hbar^4}}(2E+V_b)^2\Leftrightarrow \cancel{V_b^2}>4E^2+\cancel{V_b^2}+4EV_b$$

$$\Leftrightarrow 0>E^2+EV_b\Leftrightarrow 0<E+V_b$$

$(E<0)$

Που ισχύει διότι βρισκόμαστε στην ενεργειακή περιοχή ΜΕΣΟΝ

Οπότε

$$\otimes\Rightarrow \tan(4\xi)=\frac{-4\,\frac{\sqrt{a^4-\beta^4}}{2}\,\beta^2}{a^4-8\,\frac{(a^4-\beta^4)}{4}}=\frac{-2\sqrt{a^4-\beta^4}\cdot\beta^2}{a^4-2(a^4-\beta^4)}=\frac{-2\sqrt{a^4-\beta^4}\cdot\beta^2}{-a^4+2\beta^4}$$

$$\boxed{\tan(4\xi)=\frac{2\sqrt{a^4-\beta^4}\,\beta^2}{a^4-2\beta^4}}$$

Για τις (II)$_{μ2}$ $\psi_{II}(x) = \Gamma\cos kx + \Delta\sin kx$

επειδή η δυναμική ενέργεια είναι άρτια θα έχουμε εναλλάξ άρτιες κ περιττές ιδιοσυναρτήσεις πράγμα που φαίνεται να μπορεί να το χρησιμοποιήσει η μορφή (II)$_{μ2}$ που αποτελείται από cos (άρτιες) κ sin (περιττές)

ΕΣΤΩ ΑΡΤΙΕΣ

για $x \in$ περιοχές I κ III $\psi(-x) = \psi(x) \Rightarrow$

δηλαδή $\psi_I(x) = \psi_{III}(-x)$, $\psi_I(-x) = \psi_{III}(x)$

$$\left.\begin{aligned} x>0 &\Leftrightarrow -x<0 \Leftrightarrow Be^{-qx} = Ae^{-qx} \Leftrightarrow B=A \\ x<0 &\Leftrightarrow -x>0 \Leftrightarrow Ae^{qx} = Be^{qx} \Leftrightarrow B=A \end{aligned}\right\} B=A$$

για $x \in$ περιοχή II $\psi(-x) = \psi(x) \Leftrightarrow \Gamma\cos(-kx) + \Delta\sin(-kx)$
$= \Gamma\cos kx + \Delta\sin kx \Leftrightarrow \cancel{\Gamma\cos kx} - \Delta\sin kx = \cancel{\Gamma\cos kx} + \Delta\sin kx$
$\Leftrightarrow 2\Delta\sin kx = 0$ ($\forall x \in$ περιοχή II) $\Rightarrow \Delta = 0$

Οπότε έχουμε

$$\psi_I(x) = Ae^{qx} \qquad \psi_I'(x) = Aqe^{qx}$$
$$\psi_{II}(x) = \Gamma\cos kx \qquad \psi_{II}'(x) = -\Gamma k\sin kx$$
$$\psi_{III}(x) = Ae^{-qx} \qquad \psi_{III}'(x) = -Aqe^{-qx}$$

συνέχεια ψ κ ψ' στα $x = \pm L/2$

$$\left.\begin{aligned} \psi_I\left(-\tfrac{L}{2}\right) = \psi_{II}\left(-\tfrac{L}{2}\right) &\Rightarrow Ae^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma\cos\left(k\tfrac{L}{2}\right) \\ \psi_I'\left(-\tfrac{L}{2}\right) = \psi_{II}'\left(-\tfrac{L}{2}\right) &\Rightarrow Aqe^{-q\frac{L}{2}} = +\Gamma k\sin\left(k\tfrac{L}{2}\right) \end{aligned}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow}$$

$$q = k\cdot\tan\left(k\tfrac{L}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\tan\left(k\tfrac{L}{2}\right) = \frac{q}{k}}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_{II}\left(\tfrac{L}{2}\right) = \psi_{III}\left(\tfrac{L}{2}\right) &\Rightarrow \Gamma\cos\left(k\tfrac{L}{2}\right) = Ae^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi_{II}'\left(\tfrac{L}{2}\right) = \psi_{III}'\left(\tfrac{L}{2}\right) &\Rightarrow -\Gamma k\sin\left(\tfrac{kL}{2}\right) = -Aqe^{-q\frac{L}{2}} \end{aligned}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow}$$

$$-k\tan\left(\tfrac{kL}{2}\right) = -q \Rightarrow \boxed{\tan\left(\tfrac{kL}{2}\right) = \frac{q}{k}}$$

Δηλαδή $\boxed{\tan\left(\frac{kL}{2}\right) = \frac{q}{k}}$ $\boxed{A}$

ονομάζουμε

$\boxed{\xi := \frac{kL}{2}}$ $\boxed{\eta := \frac{qL}{2}}$ $\boxed{\xi^2 + \eta^2 = a^2 = \frac{mV_bL^2}{2\hbar^2}}$ $\tan\xi = \frac{\eta}{\xi}$ $\boxed{\tan\xi = \frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi}}$ (A)

$\Downarrow$ $k = \frac{2\xi}{L}$ $\Downarrow$ $q = \frac{2\eta}{L}$ $\eta^2 = a^2 - \xi^2 \Rightarrow \eta = \sqrt{a^2-\xi^2}$

ΕΣΤΩ ΠΕΡΙΤΤΕΣ

για $x \in$ περιοχές I κ III $\quad \psi(-x) = -\psi(x) \Rightarrow$

$x>0 \Leftrightarrow -x<0 \Leftrightarrow Be^{qx} = -Ae^{qx} \Leftrightarrow B=-A$

$x<0 \Leftrightarrow -x>0 \Leftrightarrow Ae^{+qx} = -Be^{qx} \Leftrightarrow B=-A$

$\Big\}\ B=-A$

για $x \in$ περιοχή II $\quad \psi(-x) = -\psi(x) \Rightarrow$

$$\Gamma\cos(-kx) + \Delta\sin(-kx) = -\Gamma\cos kx - \Delta\sin kx \Rightarrow$$

$$\Gamma\cos(kx) - \cancel{\Delta\sin(kx)} = -\Gamma\cos(kx) - \cancel{\Delta\sin(kx)} \Rightarrow$$

$$2\Gamma\cos(kx) = 0 \quad (\forall x \in \text{περιοχή II}) \Rightarrow \Gamma = 0$$

Οπότε έχουμε

$$\psi_I(x) = -Ae^{qx} \qquad \psi_I'(x) = -Aqe^{qx}$$

$$\psi_{II}(x) = \Delta\sin kx \qquad \psi_{II}'(x) = \Delta k\cos kx$$

$$\psi_{III}(x) = Ae^{-qx} \qquad \psi_{III}'(x) = -Aqe^{-qx}$$

συνέχεια ψ κ ψ' στα $x = \pm L/2$

$$\left.\begin{aligned} \psi_I\left(-\tfrac{L}{2}\right) = \psi_{II}\left(-\tfrac{L}{2}\right) &\Rightarrow -Ae^{-q\frac{L}{2}} = -\Delta\sin\left(\tfrac{kL}{2}\right) \\ \psi_I'\left(-\tfrac{L}{2}\right) = \psi_{II}'\left(-\tfrac{L}{2}\right) &\Rightarrow -Aqe^{-q\frac{L}{2}} = \Delta k\cos\left(\tfrac{kL}{2}\right) \end{aligned}\right\} \overset{:}{\Rightarrow}$$

$$q = -k\cot\left(\tfrac{kL}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\tan\left(\tfrac{kL}{2}\right) = -\tfrac{k}{q}}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_{III}\left(\tfrac{L}{2}\right) = \psi_{II}\left(\tfrac{L}{2}\right) &\Rightarrow Ae^{-q\frac{L}{2}} = \Delta\sin\left(\tfrac{kL}{2}\right) \\ \psi_{III}'\left(\tfrac{L}{2}\right) = \psi_{II}'\left(\tfrac{L}{2}\right) &\Rightarrow -Aqe^{-q\frac{L}{2}} = \Delta k\cos\left(\tfrac{kL}{2}\right) \end{aligned}\right\} \overset{:}{\Rightarrow}$$

$$-\frac{1}{q} = \frac{1}{k}\cdot\tan\left(\tfrac{kL}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\tan\left(\tfrac{kL}{2}\right) = -\tfrac{k}{q}}$$

Δηλαδή $\boxed{\tan\left(\frac{kL}{2}\right) = -\frac{k}{q}}$ $\boxed{\text{Π}}$

$$\boxed{\tan\xi = -\frac{\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}} \quad \text{(Π)}$$

Να σημειωθεί ότι τα ξ κ a είναι αδιάστατα, $[\xi]=1$, $[a^2]=1$

$a^2 = \frac{mV_bL^2}{2\hbar^2}$ εκφράζει τη στέρηση ελευθερίας του σωματιδίου ($m\uparrow$ ή $V_b\uparrow$ ή $L\uparrow$) όταν

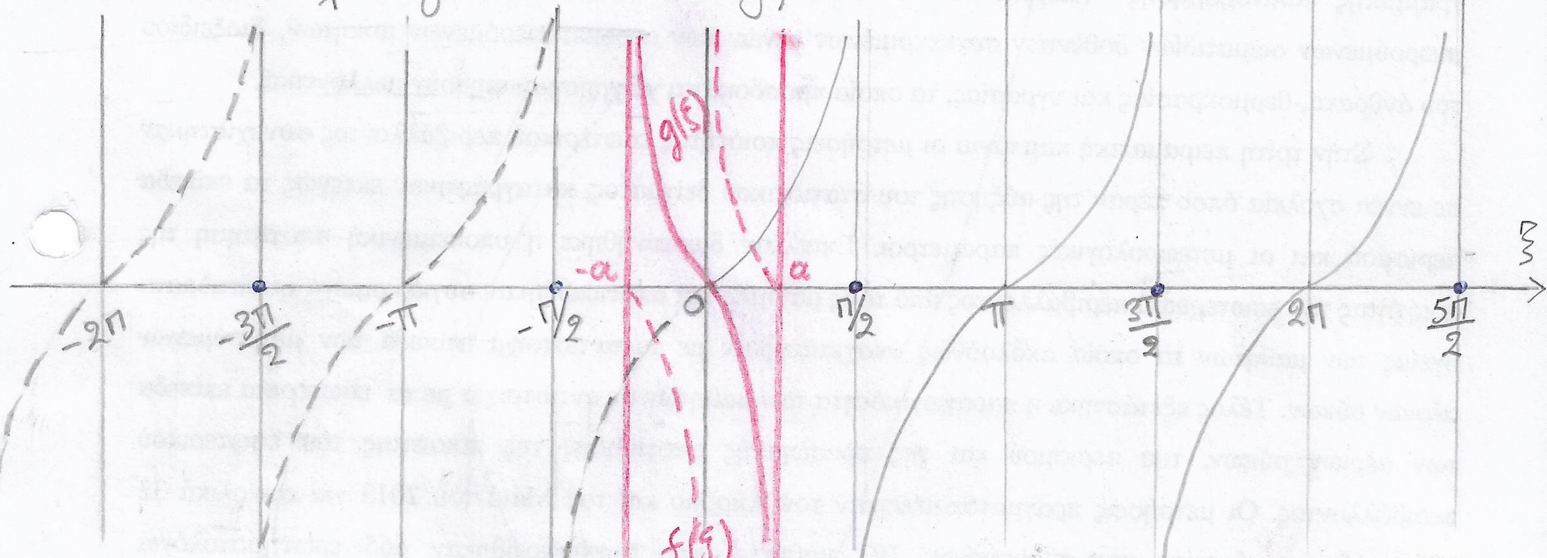
Συνοψίζοντας ΑΡΤΙΕΣ $\tan\left(\frac{kL}{2}\right)=\frac{q}{k}$ $\boxed{A}$ $\tan\xi=\frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi}$ (A) 8 ⑦

ΠΕΡΙΤΤΕΣ $\tan\left(\frac{kL}{2}\right)=-\frac{k}{q}$ $\boxed{\Pi}$ $\tan\xi=-\frac{\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}$ (Π)

Η $\tan\xi$ δεν ορίζεται για $\xi=(2\ell+1)\frac{\pi}{2}$ $\ell\in N$ $\boxed{k>0 \iff \xi>0}$

για να ορίζεται η ρίζα θα πρέπει $a^2-\xi^2\geq 0 \iff \xi^2\leq a^2 \iff -a\leq\xi\leq a$

και επιπλέον για ΑΡΤΙΕΣ το $\xi\neq 0$



η $\tan\xi$ εκτείνεται από $-\infty$ έως $+\infty$ ΜΑΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΝ $\xi>0$

$f(\xi)=\frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi}$ πεδίο ορισμού $[-a,0)\cup(0,a]$ $f(\pm a)=0$

$\lim_{\xi\to 0^+} f(\xi)=+\infty$ $\lim_{\xi\to 0^-} f(\xi)=-\infty$ — — — 2 ξεχωριστοί κλάδοι ο ένας δε μάς ενδιαφέρει γιατί είναι σε αρνητικά ξ.

η $f(\xi)$ εκτείνεται από $-\infty$ έως $+\infty$ ∃ πάντοτε τουλάχιστον ένα σημείο τομής των $f(\xi)$ & $\tan\xi$

$g(\xi)=-\frac{\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}$ πεδίο ορισμού $(-a,a)$ $g(0)=0$ ——— 1 κλάδος Το ένα κομμάτι του δε μάς ενδιαφέρει γιατί είναι σε αρνητικά ξ.

$$\lim_{\xi\to a} g(\xi)=\lim_{\xi\to a}\frac{-\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}=\frac{-a}{0}=-\infty$$

$$\lim_{\xi\to -a} g(\xi)=\lim_{\xi\to -a}\frac{-\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}=\frac{a}{0}=+\infty$$

Τα πεδία ορισμού των $f(\xi)$ & $g(\xi)$ τερματίζονται στο a κι επειδή $\xi>0 \implies (0,a]$ για $f(\xi)$ & $(0,a)$ για $g(\xi)$

για $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\exists$ 1 σημείο τομής των $f(\xi)$ κ $\tan\xi$

για $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ $\exists$ 1 σημείο τομής των $f(\xi)$ κ $\tan\xi$

κ 1 σημείο τομής των $g(\xi)$ κ $\tan\xi$

για $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ $\exists$ 2 σημεία τομής των $f(\xi)$ κ $\tan\xi$

κ 1 σημείο τομής των $g(\xi)$ κ $\tan\xi$

για $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ $\exists$ 2 σημεία τομής των $f(\xi)$ κ $\tan\xi$

κ 2 σημεία τομής των $g(\xi)$ κ $\tan\xi$

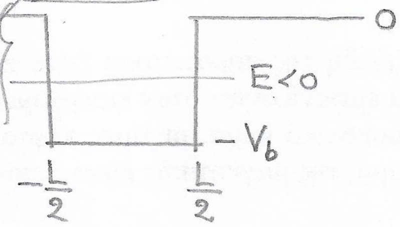
Δηλαδή έχουμε τουλάχιστον 1 λύση, ενώ προστίθεται μία κάθε φορά που αυξάνουμε το α κατά $\frac{\pi}{2}$. Οπότε ο αριθμός των λύσεων είναι

$$n = 1 + \mathrm{Int}\left[\frac{\alpha}{\frac{\pi}{2}}\right] = 1 + \mathrm{Int}\left[\frac{\sqrt{\frac{m^* V_b L^2}{2\hbar^2}}}{\frac{\pi}{2}}\right] = 1 + \mathrm{Int}\left[\sqrt{\frac{m^* V_b L^2 4}{2\hbar^2 \pi^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 1 + \mathrm{Int}\left[\sqrt{\frac{2 m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}}\right]}$$

$$k_w=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_b)}\qquad \begin{cases} k_w\tan\left(k_w\frac{L}{2}\right)=k_b & \text{even} \\ k_w\cot\left(k_w\frac{L}{2}\right)=-k_b & \text{odd}\end{cases}\ \text{solutions}$$

$$k_b=\sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2}E}$$



δεν χρειάζεται

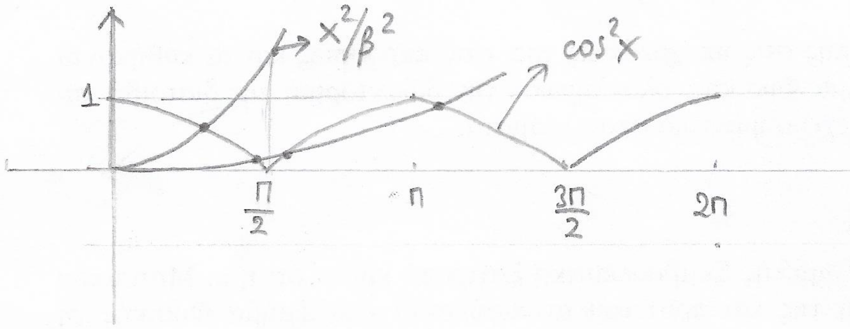
$$\frac{L}{2}k_w=\sqrt{\frac{2m(E+V_b)L^2}{4\hbar^2}}\Rightarrow \mathbb{k}_w=\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\qquad \beta^2=\frac{2mV_bL^2}{4\hbar^2}$$

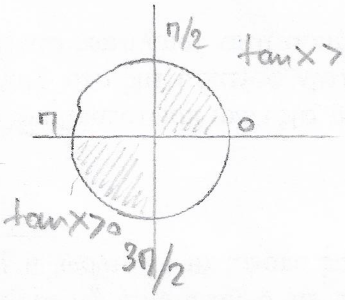
$$\frac{L}{2}k_b=\sqrt{-\frac{2mEL^2}{4\hbar^2}}\Rightarrow \mathbb{k}_b=\sqrt{\alpha^2},\ \alpha>0\qquad \alpha^2=-\frac{2mEL^2}{4\hbar^2}$$

$$\begin{cases}\mathbb{k}_w\cdot\tan(\mathbb{k}_w)=\mathbb{k}_b\\ \mathbb{k}_w\cdot\cot(\mathbb{k}_w)=-\mathbb{k}_b\end{cases}\qquad \mathbb{k}_w^2=\beta^2-\mathbb{k}_b^2\Rightarrow \mathbb{k}_w^2+\mathbb{k}_b^2=\beta^2$$

$$\begin{cases}x\tan x=\sqrt{\beta^2-x^2}\\ x\cot x=-\sqrt{\beta^2-x^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2\tan^2x=\beta^2-x^2\\ x^2\cot^2x=\beta^2-x^2\end{cases}\quad \begin{cases}x^2(1+\tan^2x)=\beta^2\\ x^2(1+\cot^2x)=\beta^2\end{cases}\quad \begin{cases}x^2\frac{1}{\cos^2x}=\beta^2\\ x^2\frac{1}{\sin^2x}=\beta^2\end{cases}\quad \begin{aligned}\cos^2x&=\frac{x^2}{\beta^2}\\ \sin^2x&=\frac{x^2}{\beta^2}\end{aligned}$$





$$n(L)=1+\mathrm{Int}\left[\sqrt{\frac{2mV_bL^2}{\pi\hbar^2}}\right]$$

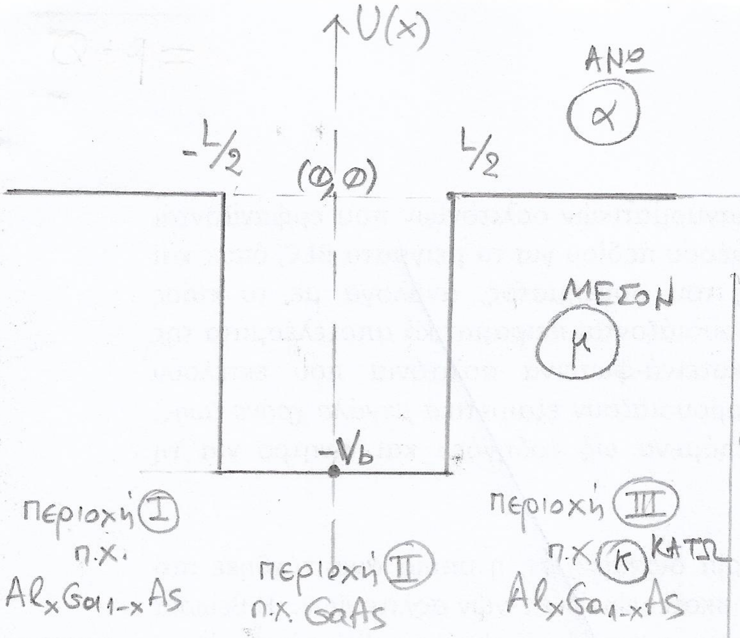
$$\left.\frac{x^2}{\beta^2}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\beta^2}$$

$$\frac{\beta^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{2mV_bL^2\cancel{4}}{\cancel{4}\hbar^2\pi^2}=$$

$$n(L)=1+\mathrm{Int}\left[\sqrt{\frac{\beta^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}}\right]$$

$$n(L)=1+\mathrm{Int}\left[\frac{\beta}{\pi/2}\right]$$

ΑΣΚΗΣΗ 6



περιοχή (II) $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - V_b\psi(x) = E\psi(x)$

$$\psi''(x)+\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_b)\psi(x)=0$$

εάν $E>-V_b \Leftrightarrow E+V_b>0$

$0<\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_b) \xrightarrow{\text{θέτουμε}} k^2$ κι έστω $k>0$

$\Rightarrow \psi''(x)+k^2\psi(x)=0$

ΔΛΜ $\psi(x)=\Gamma e^{ikx}+\Delta e^{-ikx}$

$\psi'(x)=\Gamma ik e^{ikx}+\Delta(-ik)e^{-ikx}$

$\psi''(x)=-k^2\Gamma e^{ikx}-k^2\Delta e^{-ikx}$

$\psi''(x)=-k^2\psi(x)\Rightarrow$

$-k^2\psi(x)+k^2\psi(x)=0$ πού ισχύει

ή ΔΛΜ $\psi(x)=\Gamma\cos kx+\Delta\sin kx$

$\psi'(x)=-\Gamma k\sin kx+\Delta k\cos kx$

$\psi''(x)=-\Gamma k^2\cos kx-\Delta k^2\sin kx$

$\psi''(x)=-k^2\psi(x)\Rightarrow$

$-k^2\psi(x)+k^2\psi(x)=0$ πού ισχύει

εάν $E<-V_b \Leftrightarrow E+V_b<0$

$0>\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_b) \xrightarrow{\text{θέτουμε}} -Q^2$ κι έστω $Q>0$

Ας εξετάσουμε αρχικά ενέργειες $E<0$ ("δέσμιες καταστάσεις")

περιοχές (I) κ (III) $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x)=E\psi(x)\Leftrightarrow\psi''(x)+\underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{\text{αρν}}\psi(x)$

$0>\frac{2mE}{\hbar^2}\xrightarrow{\text{θέτουμε}}-q^2$ κι έστω $q>0$

Άρα

ΔΛΜ = δοκιμάζουμε λύσεις τις μορφής

$\psi''(x)-q^2\psi(x)=0$

ΔΛΜ $\psi(x)=Ae^{-qx}+Be^{qx}$

$\psi'(x)=A(-q)e^{-qx}+Bqe^{qx}$

$\psi''(x)=Aq^2e^{-qx}+Bq^2e^{qx}$

$\psi''(x)=q^2\psi(x)\Rightarrow$

$q^2\psi(x)-q^2\psi(x)=0$ πού ισχύει

Δηλαδή αυτού του είδους οι λύσεις είναι ικανοποιητικές

Επειδή οι $\psi(x)$ πρέπει να είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμες $\Rightarrow$

$\lim_{x\to\infty}\psi(x)=0 \quad \psi_{III}(x)=Ae^{-qx}$

$\lim_{x\to-\infty}\psi(x)=0 \quad \psi_{I}(x)=Be^{qx}$

$\psi_I(x)=Be^{qx}\Rightarrow\psi_I'(x)=Bqe^{qx}$ (I)

$\psi_{III}(x)=Ae^{-qx}\Rightarrow\psi'_{III}(x)=-Aqe^{-qx}$ (III)

Αν επιλέξουμε $\psi_{II}(x)=\Gamma e^{ikx}+\Delta e^{-ikx}$

$\psi'_{II}(x)=\Gamma ike^{ikx}-\Delta ike^{-ikx}$ (II)μ1

ΜΕΣΟΝ

ενώ αν επιλέξουμε $\psi_{II}(x)=\Gamma\cos kx+\Delta\sin kx$

$\psi'_{II}(x)=-\Gamma k\sin kx+\Delta k\cos kx$ (II)μ2

$\psi''(x)-Q^2\psi(x)=0$

ΔΛΜ $\psi(x)=\Gamma e^{-Qx}+\Delta e^{Qx}$

$\boxed{\text{εάν } E=-V_b}$

$$\psi_{II}''(x)=0$$
$$\psi_{II}'(x)=c$$
$$\psi_{II}(x)=cx+d$$

$$\left.\begin{array}{l}\psi_I\left(-\frac{L}{2}\right)=\psi_{II}\left(-\frac{L}{2}\right)\Rightarrow Be^{-q\frac{L}{2}}=c\left(-\frac{L}{2}\right)+d\\ \psi_I'\left(-\frac{L}{2}\right)=\psi_{II}'\left(-\frac{L}{2}\right)\Rightarrow Bqe^{-q\frac{L}{2}}=c\end{array}\right\} q=\frac{c}{c\left(-\frac{L}{2}\right)+d}$$

$$\left.\begin{array}{l}\psi_{III}\left(\frac{L}{2}\right)=\psi_{II}\left(\frac{L}{2}\right)\Rightarrow Ae^{-q\frac{L}{2}}=c\frac{L}{2}+d\\ \psi_{III}'\left(\frac{L}{2}\right)=\psi_{II}'\left(\frac{L}{2}\right)\Rightarrow -Aqe^{-q\frac{L}{2}}=c\end{array}\right\} q=\frac{-c}{c\frac{L}{2}+d}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{c}{c\left(-\frac{L}{2}\right)+d}=\frac{-c}{c\frac{L}{2}+d}\Rightarrow \cancel{\frac{cL}{2}}+d=\cancel{\frac{cL}{2}}-d\Rightarrow d=-d\Rightarrow d=0$$

$$q=\frac{\cancel{c}}{\cancel{c}\left(-\frac{L}{2}\right)}\qquad q=\frac{-\cancel{c}}{\cancel{c}\frac{L}{2}}$$

$$q=-\frac{2}{L}\qquad q=-\frac{2}{L}$$

$q=-\frac{2}{L}<0$ Άτοπο διότι $q>0$ (το υποθέσαμε στην αρχή)

δηλ. δεν υπάρχει λύση για $E=-V_b \Leftrightarrow k=0 \Leftrightarrow \xi=0$

$\boxed{\text{εάν } E=0}$

$$\psi''(x) - Q^2\psi(x) = 0$$

ΔΛΜ $\psi(x) = \Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx}$

$$\psi'(x) = -\Gamma Q e^{-Qx} + \Delta Q e^{Qx}$$

$$\psi''(x) = +\Gamma Q^2 e^{-Qx} + \Delta Q^2 e^{Qx}$$

$$\psi''(x) = Q^2\left(\Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx}\right)$$

$$\psi''(x) = Q^2\psi(x) \Rightarrow$$

$Q^2\psi(x) - Q^2\psi(x) = 0$ που ισχύει

Συνεπώς II κ $\left\{ \begin{array}{l} \psi_{II}(x) = \Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx} \\ \psi'_{II}(x) = -\Gamma Q e^{-Qx} + \Delta Q e^{Qx} \end{array} \right\}$ ΚΑΤΩ

Δηλαδή για την περιοχή II έχουμε δύο διαφορετικές λύσεις

II μ1 ή II μ2 για ενέργειες στο ΜΕΣΟΝ

II κ για ενέργειες στο ΚΑΤΩ

Κατά τα γνωστά, για να βρούμε τη συνολική λύση, θα πρέπει να ταιριάξουμε τις κυματοσυναρτήσεις κ τις παραγώγους τους στα όρια των περιοχών δηλαδή στα $x = \pm L/2$.

Ας προσπαθήσουμε να ταιριάξουμε τις I, II κ, III

$$\left.\begin{array}{l} \psi_I\left(-\frac{L}{2}\right) = B e^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi_{II}\left(-\frac{L}{2}\right) = \Gamma e^{+Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{-Q\frac{L}{2}} \end{array}\right\} B e^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{-Q\frac{L}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi'_I\left(-\frac{L}{2}\right) = Bq e^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi'_{II}\left(-\frac{L}{2}\right) = -\Gamma Q e^{+Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{-Q\frac{L}{2}} \end{array}\right\} Bq e^{-q\frac{L}{2}} = -\Gamma Q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{-Q\frac{L}{2}}$$

$$\stackrel{(:)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{B}q\cancel{e^{-q\frac{L}{2}}}}{\cancel{B}\cancel{e^{-q\frac{L}{2}}}} = \frac{-\Gamma Q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{-Q\frac{L}{2}}}{\Gamma e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{-Q\frac{L}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta q e^{-Q\frac{L}{2}} = -\Gamma Q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{-Q\frac{L}{2}}$$

$$\Rightarrow \Gamma(Q+q) e^{Q\frac{L}{2}} = \Delta(Q-q) e^{-Q\frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{Q-q}{Q+q} e^{-QL}} \oplus$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi_{III}\left(\frac{L}{2}\right) = A e^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi_{II}\left(\frac{L}{2}\right) = \Gamma e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{Q\frac{L}{2}} \end{array}\right\} A e^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{Q\frac{L}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi'_{III}\left(\frac{L}{2}\right) = -Aq e^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi'_{II}\left(\frac{L}{2}\right) = -\Gamma Q e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{Q\frac{L}{2}} \end{array}\right\} -Aq e^{-q\frac{L}{2}} = -\Gamma Q e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{Q\frac{L}{2}}$$

$$\stackrel{(:)}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{-\cancel{A}qe^{-q\frac{L}{2}}}{\cancel{A}e^{-q\frac{L}{2}}} = \frac{-\Gamma Q e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{Q\frac{L}{2}}}{\Gamma e^{-Q\frac{L}{2}}+\Delta e^{Q\frac{L}{2}}} \Rightarrow$$

$$-\Gamma q e^{-Q\frac{L}{2}} - \Delta q e^{Q\frac{L}{2}} = -\Gamma Q e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{Q\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\Gamma(Q-q)e^{-Q\frac{L}{2}} = \Delta(Q+q)e^{Q\frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{Q+q}{Q-q}e^{QL}} \quad \oplus$$

$$\oplus \text{ κ } \oplus \Rightarrow \frac{Q-q}{Q+q}e^{-QL} = \frac{Q+q}{Q-q}e^{QL} \Rightarrow \boxed{e^{-2QL} = \frac{(Q+q)^2}{(Q-q)^2}}$$

το οποίο είναι ΑΤΟΠΟ

διότι $e^{-2QL} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{2QL}} < 1 \Leftrightarrow 1 < e^{2QL} \Leftrightarrow \ln 1 < 2QL \Leftrightarrow 0 < 2QL$ που ισχύει

ενώ $\frac{(Q+q)^2}{(Q-q)^2} > 1 \Leftrightarrow \cancel{Q^2}+\cancel{q^2}+2Qq > \cancel{Q^2}+\cancel{q^2}-2Qq \Leftrightarrow 4Qq > 0$ που ισχύει

Δηλαδή δεν υπάρχει λύση στην ενεργειακή περιοχή ΚΑΤΩ

Ας δοκιμάσουμε στην ενεργειακή περιοχή ΜΕΣΟΝ

Για τις (II) μ1 $\Rightarrow$

Χρησιμοποιώντας τη συνέχεια κυματοσυναρτήσεων και πρώτων παραγώγων στα σύνορα $x = \pm L/2$ προκύπτει (δες στη σελίδα 3' τις σχέσεις $\boxtimes$ κ $\boxtimes$)

$$\frac{(ik+q)}{(ik-q)}e^{ikL} = \frac{(ik-q)}{(ik+q)}e^{-ikL} \Rightarrow \boxed{e^{2ikL} = \frac{(ik-q)^2}{(ik+q)^2} = \frac{-k^2+q^2-2ikq}{-k^2+q^2+2ikq}} = \Lambda$$

$$\boxed{\xi := \frac{kL}{2}}, \boxed{\eta := \frac{qL}{2}} \Rightarrow \xi^2+\eta^2 = \frac{L^2}{4}\left(\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_b) - \frac{2m}{\hbar^2}E\right) = \frac{L^2 2m V_b}{4\hbar^2} = \frac{mV_bL^2}{2\hbar^2} := a^2 \Rightarrow$$

$= $ σταθερό, ανεξάρτητο της E κι έστω $a > 0$

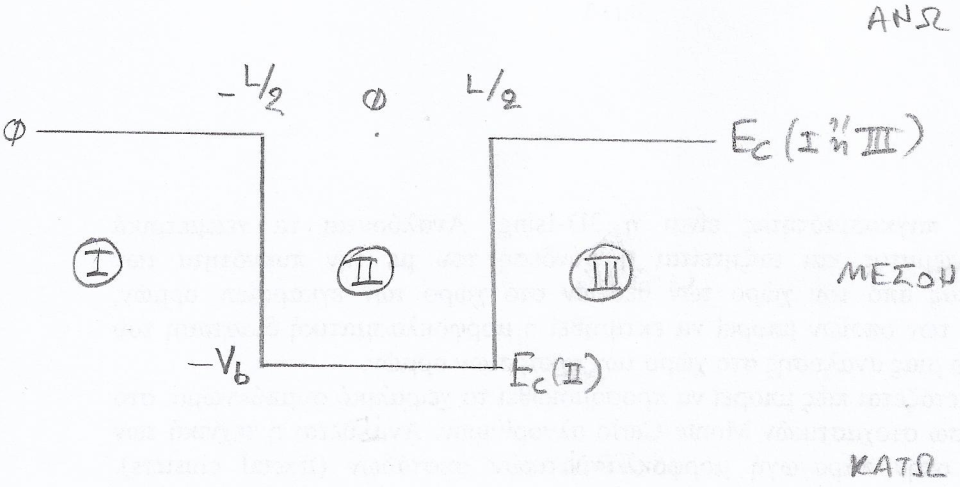
$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$k = \frac{2\xi}{L}, \quad q = \frac{2\eta}{L} \qquad \boxed{\xi^2+\eta^2 = a^2} \qquad \boxed{-\xi^2+\eta^2 := \beta^2}$$

οπότε $\Lambda = \frac{-\xi^2+\eta^2-2i\xi\eta}{-\xi^2+\eta^2+2i\xi\eta} = \frac{\beta^2-2i\xi\eta}{\beta^2+2i\xi\eta} = \frac{(\beta^2-2i\xi\eta)^2}{(\beta^2+2i\xi\eta)(\beta^2-2i\xi\eta)} \Rightarrow$

$$\Lambda = \frac{\beta^4-4i\xi\eta\beta^2-4\xi^2\eta^2}{\beta^4+4\xi^2\eta^2} \quad \boxtimes \Rightarrow e^{i4\xi}(\beta^4+4\xi^2\eta^2) = \beta^4-4i\xi\eta\beta^2-4\xi^2\eta^2$$

εν τω μεταξύ $\beta^4+4\xi^2\eta^2 = (-\xi^2+\eta^2)^2+4\xi^2\eta^2 = \xi^4+\eta^4-2\xi^2\eta^2+4\xi^2\eta^2 = (\xi^2+\eta^2)^2 = a^4$



π.χ. (II) GaAs

(I) ή (III) $Al_xGa_{1-x}As$

ΜΕΣΟΝ

$$E_c(\mathrm{I}\ \acute{\eta}\ \mathrm{III}) - E_c(\mathrm{II}) = V_b$$

"Ένα κβαντικό φρέαρ εύρους L και βάθους V_b περιέχει

$$n = 1 + \mathrm{Int}\left[\sqrt{\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}}\right]$$

δέσμιες ενεργειακές καταστάσεις ("στάθμες").

$\mathrm{Int}[\xi]$ είναι το ακέραιο μέρος του ξ.

ΑΣΚΗΣΗ

Θεωρήστε κβαντική τελεία σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με εσωτερικό GaAs διαστάσεων 8 nm × 4 nm × 4 nm και περίβλημα $Al_x Ga_{1-x} As$ με μοριακό κλάσμα x: $V_b = 224\,meV$.
Θεωρήστε κατά προσέγγιση $m^* = m^*(GaAs) = 0.067\, m_e$.

(Α) Πόσες ενεργειακές στάθμες έχει αυτή η κβαντική τελεία;

(Β) Σε τι μήκος κύματος αντιστοιχεί η μετάβαση από τη ΘΣ στην 1η ΔΣ της εν λόγω κβαντικής τελείας; Έστω ότι μπορείτε να λύσετε τα μονοδιάστατα προβλήματα.

(Γ) Υποθέστε ότι έχουμε μια συλλογή από τέτοιες κβαντικές τελείες με ένα ηλεκτρόνιο στην καθεμία και ότι η στατιστική Boltzmann με ίδια στατιστικά βάρη περιγράφει την πιθανότητα κατάληψης των ενεργειακών σταθμών.
Η θερμοκρασία είναι (α) 4.2K κ (β) 300K
Συγκρίνετε τον αριθμό των κβαντικών τελειών όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη ΘΣ με τον αριθμό των κβαντικών τελειών όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην 1η ΔΣ

(Δ) Έστω ότι η συλλογή κβ. τελειών βρίσκεται εντός καταλλήλου ΗΜ πεδίου. Συγκρίνετε τον αριθμό των κβ.τελ που σε χρόνο dt μεταβαίνουν από τη ΘΣ στην 1η ΔΣ με εξαναγκασμένη διεργασία $dN^{es}_{1\to 2}$ με τον αριθμό των κβ. τελειών που μεταβαίνουν σε χρόνο dt από την 1η ΔΣ στη ΘΣ με εξαναγκασμένη διεργασία $dN^{es}_{2\to 1}$.

Δίνονται $\hbar = 1.054 \times 10^{-34}\, Js$

$e = 1.602 \times 10^{-19}\, C$

$m_e = 9.109 \times 10^{-31}\, kg$

$k_B = 1.380 \times 10^{-23}\, J/K = 8.617 \times 10^{-5}\, eV/K$

ΙΔΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ για ∞ φράγματα κβ. τελεία

A για L=8nm

(2)

$$\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2} \simeq \frac{2\cdot 0.067 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31}\, kg \cdot 224 \cdot 10^{-3} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\, \cancel{eV} \cdot 64 \cdot 10^{-18}\, m^2}{10 \cdot 1.054^2 \cdot 10^{-68}\, \cancel{J}s\, Js}$$

$$\simeq 2523 \frac{10^{-31-3-19-18}}{10^{-68}} = 2523 \frac{10^{-71}}{10^{-68}} = 2.523$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}} \simeq 1.59$$

$$\Rightarrow n = 1 + Int[1.59] = 2$$

για L=4nm

$$\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2} \simeq 0.63075 \Rightarrow \sqrt{\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}} \simeq 0.79$$

$$\Rightarrow n = 1 + Int[0.79] = 1$$

Δηλαδή στο φρέαρ x χωράνε 2 στάθμες E_{1x}, E_{2x}

στο φρέαρ y 1 στάθμη E_{1y}

στο φρέαρ z 1 στάθμη E_{1z}

$$ΘΣ = E_1 = E_{1x} + E_{1y} + E_{1z}$$

$$1η ΔΣ = E_2 = E_{2x} + E_{1y} + E_{1z}$$

$$\Delta E = E_{2x} - E_{1x}$$

B $h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_{2x} - E_{1x} \Rightarrow \lambda = \dots$

Γ $N_j = \frac{N_{0\lambda}}{Z} e^{-\frac{E_j}{k_B T}}$, $N_i = \frac{N_{0\lambda}}{Z} e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$ $\Big\}$ $\frac{N_j}{N_i} = e^{\frac{E_i - E_j}{k_B T}} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{E_1 - E_2}{k_B T}}$

Δ $dN_{1\to 2}^{\varepsilon\varsigma} = N_1 \cdot dW_{\alpha\pi o\rho}^{\varepsilon\varsigma} = N_1\, \rho(\nu T)\, B_{12}\, dt$

$dN_{2\to 1}^{\varepsilon\varsigma} = N_2 \cdot dW_{\varepsilon\kappa\pi}^{\varepsilon\varsigma} = N_2\, \rho(\nu T)\, B_{21} \cdot dt$

$$\frac{dN_{1\to 2}^{\varepsilon\varsigma}}{dN_{2\to 1}^{\varepsilon\varsigma}} = \frac{N_1}{N_2} = e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}}$$

ΑΡΤΙΕΣ $\tan\xi = \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi} \Rightarrow \xi = \dots = \xi_A$

ΠΕΡΙΤΤΕΣ $\tan\xi = -\frac{\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \Rightarrow \xi = \dots = \xi_\Pi$

$a^2 = \frac{m V_b L^2}{2\hbar^2}$ γνωστό

$\xi = \frac{kL}{2}$ $\Rightarrow k$

$\frac{2m}{\hbar^2}(E + V_b) = k^2$, $k > 0$ $\Rightarrow E$