

Αποδείξουμε ηδη οτι

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}$$

Γνωρίζουμε οτι

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΚΠΟΜΠΩΝ

$$\frac{dW_{εκπ}^{αυθ}}{dW_{εκπ}^{εξ}} \stackrel{\text{μη συνεκτική διεργασία}}{=} \frac{A_{21} dt}{B_{21} \rho(\nu, T) dt} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} (e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1) = e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 > 0$$

↓ συνεκτική διεργασία (τα φωτόνια που παράγονται έχουν ίδια φάση)

Άρα, αν θέλουμε περισσότερη συχνή, θα πρέπει $\nu \downarrow$ ($\lambda \uparrow$)

ή $T \uparrow$

δηλαδή όσο το δυνατόν μικρότερες συχνότητες (μεγαλύτερα μήκη κύματος)

κ. όσο το δυνατόν

μεγαλύτερες θερμοκρασίες

Αυτός είναι ένας από τους λόγους που οι πρώτες προτάσεις για κατασκευή συσκευής που παράγει συνεκτική ΗΜ ακτινοβολία επικεντρώθηκαν στην περιοχή των μικροκυμάτων

$\lambda \sim 1 \text{ cm}$ **MASER** (microwave amplification by stimulated emission of radiation)

$\lambda \sim 500 \text{ nm}$

LASER

1ο MASER 1953

↑

light

ή όρυγασια

σήμερα επικρατώς **LASER** ακόμα κ για μήδρατα ΗΜ κύματα π.κ. λέμε

X-LASER άρα για XASER

UV-LASER άρα για UVASER

άρα και atom-LASER άρα για AASER (για άτομα που είναι μπροβόνια)

Αν π.χ. θέλουμε $\frac{dW_{εκπ}^{αυθ}}{dW_{εκπ}^{εφ}} = 1 \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T} - 1} = 1 \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T}} = 2 \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \frac{h\nu}{k_B T} &= \ln 2 \\ c &= \lambda \nu \end{aligned} \right\} \frac{hc}{\lambda k_B T} = \ln 2 \Rightarrow T = \frac{hc}{\lambda k_B \ln 2} \quad \text{ή} \quad T = \frac{h\nu}{k_B \ln 2}$$

$$\frac{hc}{k_B} \approx 14,404 \cdot 10^{-3} \text{ K}\cdot\text{m}$$

για έρυθρο φως (π.χ. $\lambda = 700 \text{ nm}$)

$$T = \frac{14,404 \cdot 10^{-3} \text{ K}\cdot\text{m}}{700 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 29687 \text{ K}$$

φωτόσφαιρα Ηλίου $\sim 6000 \text{ K}$

φωτόσφαιρα άστέρων με μοζα 20ηλίσια $\sim 30000 \text{ K}$
 από αυτή του Ηλίου

δείτε π.χ. ένα διάγραμμα Hertzprung - Russell

Αρα το $\frac{dW_{εκπ}^{αυθ}}{dW_{εκπ}^{εφ}} = 1$ σε θερμοδυναμική ισορροπία είναι αρέφικτο

για μικροκύματα (π.χ. $\lambda = 1 \text{ cm}$)

$$T = \frac{14,404 \cdot 10^{-3} \text{ K}\cdot\text{m}}{10^{-2} \text{ m}} \approx 2,078 \text{ K}$$

* Ανάγνωση λυστων ερεως θερμοδυναμικής ισορροπίας

Αναστροφή Πληθυσμωδ (population inversion) μέσω διέγερσως (pumping)

Αρα το $\frac{dW_{εκπ}^{αυθ}}{dW_{εκπ}^{εφ}} = 1$ μπορεί να επιτευχθῆ σε μια πειραματικῶς ἔφικτῆ θερμοκρασία

για ραδιοκύματα FM π.χ. $\nu = 100 \text{ MHz}$

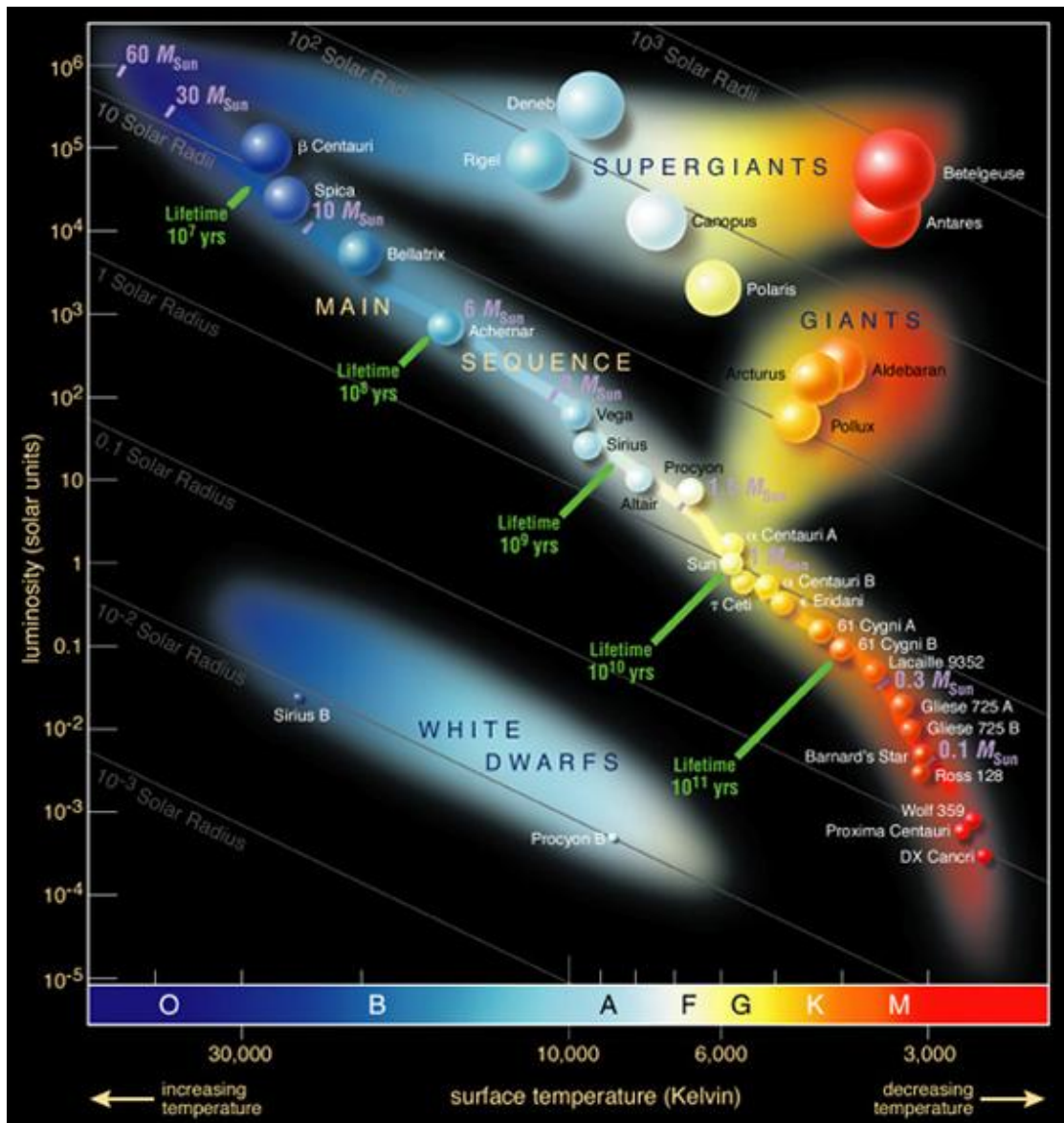
$$T = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 100 \cdot 10^6 \text{ Hz}}{1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J}} \approx 6,927 \cdot 10^{-3} \text{ K} \approx 7 \cdot 10^{-3} \text{ K}$$

$$T = \frac{h\nu}{k_B \ln 2}$$

για UV π.χ με $\lambda = 200 \text{ nm}$

$$T = \frac{14,404 \cdot 10^{-3} \text{ K}\cdot\text{m}}{200 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 103905 \text{ K}$$

$$T = \frac{hc}{\lambda k_B \ln 2}$$



Το διάγραμμα *Hertzsprung-Russell*, η κατανομή της φωτεινότητας έναντι της επιφανειακής θερμοκρασίας των αστέρων .

• Για ποιο λ $\frac{dW_{εκη}^{αυθ}}{dW_{εκη}^{εξ}} = 1$ σε θερμοκρασία δωματίου $T \approx 300K$;

$$T = \frac{hc}{\lambda k_B \ln 2} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{T k_B \ln 2}$$

$$T = 300K$$

$$\frac{hc}{k_B} = 14.4 \cdot 10^3 K \cdot m$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{14.404 \cdot 10^3 K \cdot m}{3 \cdot 10^2 K \cdot 0.693} \Rightarrow$$

$$\lambda = 6.928 \cdot 10^{-5} m$$

$\lambda \approx 70 \mu m$ FIR

ISO 20473	NIR	$0.78 \mu m < \lambda < 3 \mu m$
	MIR	$3 \mu m < \lambda < 50 \mu m$
	FIR	$50 \mu m < \lambda < 1000 \mu m = 1 mm$

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ

$$\frac{dW_{απορ}^{εξ}}{dW_{εκη}^{εξ}} = \frac{B_{12} \rho(\nu, T) dt}{B_{21} \rho(\nu, T) dt} = 1$$

$$= \frac{g_2}{g_1}$$

αν μιλάμε για σύστημα με ίδια στατιστικά βάρη $(g_1 = g_2)$
 αν μιλάμε για σύστημα με διαφορ. στατισ. βάρη $(g_1 \neq g_2)$

• Αλλά σε θερμοδυναμική ισορροπία $N_2 \ll N_1$ (α...)

$$dN_{2 \rightarrow 1}^{εξ} = N_2 \cdot dW_{εκη}^{εξ}$$

$$dN_{1 \rightarrow 2}^{εξ} = N_1 \cdot dW_{απορ}^{εξ}$$

$$\Rightarrow dN_{2 \rightarrow 1}^{εξ} \ll dN_{1 \rightarrow 2}^{εξ}$$

• Άρα μέσω των εξαναγκασμένων διεργασιών αυξάνεται ο πληθυσμός της στάθμης 2
 \Rightarrow μειώνεται η πυκνότητα ακτινοβολίας [όφου υπερτερή ή (εξαναγκασμένη) απορρόφηση].
 Στη συνέχεια, η αυθόρμητη έκποση, ή οποία συνοδεύεται από μετάβαση του ηλεκτρονίου από τη στάθμη 2 στη στάθμη 1, ενισχύει τη μη συνεκτική ακτινοβολία. *

ΑΣΚΗΣΗ 5 Συλλογή ατόμων H σε θερμοδυναμική ισορροπία

(...)

$$E_n = \frac{-13.6 \text{ eV}}{n^2}$$

ιδιοεnergίες

$13.6 \text{ eV} = R_y$ Rydberg ενέργεια

(α') $T = 4.2 \text{ K}$ (β') $T = 300 \text{ K}$

$k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \approx 8.617 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}}$

$k_B T (4.2 \text{ K}) = 0.000361914 \text{ eV} \approx 0.36 \text{ meV}$

$k_B T (300 \text{ K}) = 0.025851 \text{ eV} \approx 26 \text{ meV}$

(A) $\frac{N_2}{N_1}, \frac{N_3}{N_2}, \frac{N_4}{N_3}, \frac{N_5}{N_4}$

(B) $\frac{dN_{2 \rightarrow 1}}{dN_{1 \rightarrow 2}}, \dots$

σύνταξη

$E_1 = -13.6 \text{ eV}$
 $E_2 = -3.4 \text{ eV}$
 $E_3 = -1.51 \text{ eV}$

(A) $N_j = \frac{N_0}{Z} \cdot e^{-\beta E_j}$
 $N_i = \frac{N_0}{Z} \cdot e^{-\beta E_i}$

$\beta = \frac{1}{k_B T} \Rightarrow \frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{e^{-\beta E_{i+1}}}{e^{-\beta E_i}} = e^{\beta(E_i - E_{i+1})}$

$E_i - E_{i+1} = \frac{-R_y}{i^2} + \frac{R_y}{(i+1)^2} = R_y \cdot \frac{i^2 - (i+1)^2}{(i+1)^2 i^2}$

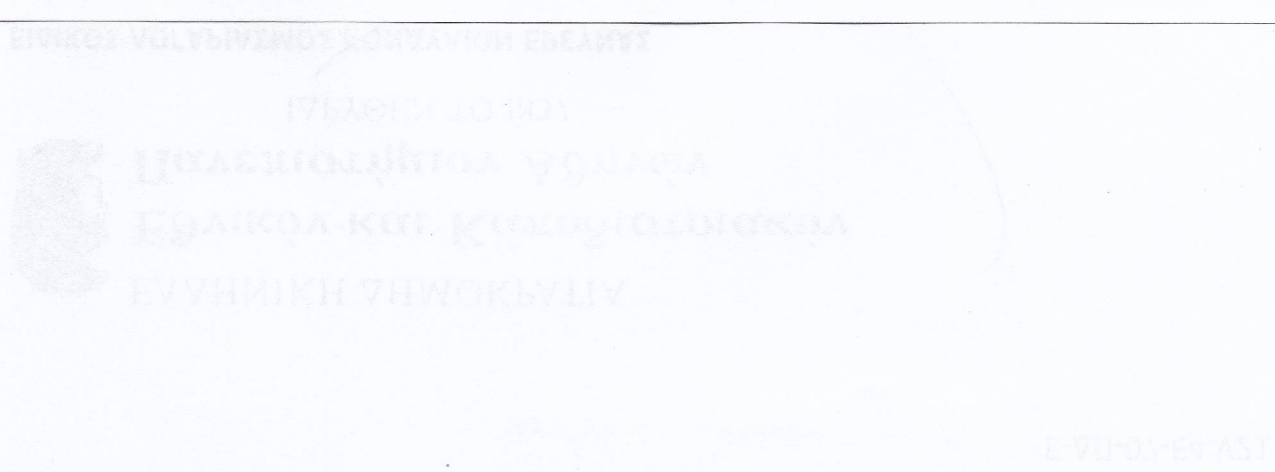
$= R_y \frac{(i-i-1)(i+i+1)}{(i+1)^2 i^2} = -R_y \cdot \frac{(2i+1)}{i^2 (i+1)^2}$

$E_1 - E_2 = -R_y \frac{3}{4} \quad \beta(E_1 - E_2) \approx -28177 \quad \approx -394.5$

$E_2 - E_3 = -R_y \frac{5}{36} \quad \approx -5218 \quad \approx -73$

$E_3 - E_4 = -R_y \frac{7}{144} \quad \approx -1826 \quad \approx -25.57$

$E_4 - E_5 = -R_y \frac{9}{400} \quad \approx -845.3 \quad \approx -11.83$



$$\frac{N_2}{N_1}$$

$$e^{\frac{4.2k}{-28177}} \text{ (υπερχείλιση)}$$

$$e^{\frac{300k}{-394.5}} \approx 4.7 \cdot 10^{-172}$$

$$\frac{N_3}{N_2}$$

$$e^{\frac{-5218}{-2267}} \approx 7.1 \cdot 10^{-2267}$$

$$e^{\frac{-73}{-32}} \approx 1.98 \cdot 10^{-32}$$

$$\frac{N_4}{N_3}$$

$$e^{\frac{-1826}{-794}} \approx 9.5 \cdot 10^{-794}$$

$$e^{\frac{-25.57}{-12}} \approx 7.85 \cdot 10^{-12}$$

$$\frac{N_5}{N_4}$$

$$e^{\frac{-845.3}{-368}} \approx 7.78 \cdot 10^{-368}$$

$$e^{\frac{-11.83}{-6}} \approx 7.28 \cdot 10^{-6}$$

δηλαδή σε κατάσταση θερμodynamic ισορροπίας
ο πληθυσμός της επόμενης στάθμης είναι συντηρητική μικρότερη
των πληθυσμών της προηγούμενης στάθμης

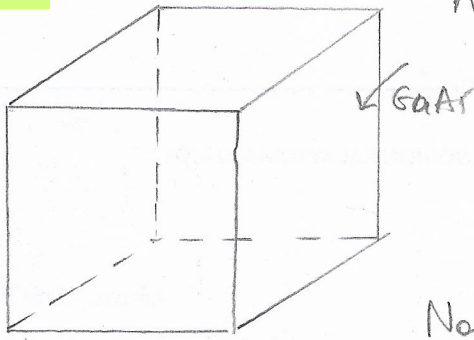
(B)

$$\frac{dN_{2 \rightarrow 1}^{εξ}}{dN_{1 \rightarrow 2}^{εξ}} = \frac{N_2 dW_{εκπ}^{εξ}}{N_1 \cdot dW_{απορ}^{εξ}} = \frac{N_2 B_{21} \rho(\nu T) dt}{N_1 B_{12} \rho(\nu T) dt} = \frac{N_2}{N_1}$$

δηλαδή

$$\frac{dN_{i+1 \rightarrow i}^{εξ}}{dN_{i \rightarrow i+1}^{εξ}} = \frac{N_{i+1}}{N_i} = \dots$$

$$e^{\frac{23000}{9988}} \approx 5.93 \cdot 10^{9988}$$


 $Al_xGa_{1-x}As$

Εστω κβασιμύ ρελεία :

$$E_2 = -50 \text{ meV}$$

$$E_1 = -100 \text{ meV}$$

Να προσδοώντα $\frac{N_2}{N_1} \approx \frac{dN_{2 \rightarrow 1}^{e\gamma}}{dN_{1 \rightarrow 2}^{e\gamma}}$ σε $T = 4.2 \text{ K}$ & $T = 300 \text{ K}$

ΛΥΣΗ

$$T = 4.2 \text{ K} \Rightarrow k_B T = 0.36 \text{ meV} \Rightarrow \beta(E_1 - E_2) = \frac{-50 \text{ meV}}{0.36 \text{ meV}} = 138.8 \Rightarrow$$

$$T = 300 \text{ K} \Rightarrow k_B T = 26 \text{ meV} \Rightarrow \beta(E_1 - E_2) = \frac{-50 \text{ meV}}{26 \text{ meV}} = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = e^{\beta(E_1 - E_2)} = 4.8 \cdot 10^{-61}$$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = e^{\beta(E_1 - E_2)} \approx 0.135 \quad \text{μν ἀμελητέο}$$

$$\frac{dN_{2 \rightarrow 1}^{e\gamma}}{dN_{1 \rightarrow 2}^{e\gamma}} = \frac{B_{21} \rho(\nu, T) dt \cdot N_2}{B_{12} \rho(\nu, T) dt \cdot N_1} = \frac{N_2}{N_1} = \dots$$

ΑΣΚΗΣΗ

$$\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

$$x = \frac{h\nu}{k_B T}$$

Εφεξής τε:

α) $\lim_{\nu \rightarrow 0} \rho$

β) $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho$

γ) ν πολύ μικρές $\Rightarrow \rho = \rho_{RJ}$

δ) ν πολύ μεγάλες $\Rightarrow \rho = \rho_W$

α) $\lim_{\nu \rightarrow 0} \rho = \lim_{x \rightarrow 0} \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} = \rho_0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{e^x} = 0$

β) $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho = \lim_{x \rightarrow \infty} \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} = \rho_0 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x} = \rho_0 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{e^x} = \rho_0 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x} = 0$

γ) ν πολύ μικρές $\Rightarrow x$ πολύ μικρές $e^x = 1 + 1 \cdot \frac{x}{1!} + 1 \cdot \frac{x^2}{2!} + 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1!} + f''(0) \frac{x^2}{2!} + \dots$$

όποτε $e^x - 1 \approx x$ (πρώτης τάξης προσέγγιση)

Άρα $\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \approx \rho_0 \frac{x^3}{x} = \rho_0 x^2 = \rho_{RJ}$

δ) ν πολύ μεγάλες $\Rightarrow x$ πολύ μεγάλες $e^x \gg 1$

$$\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \approx \rho_0 \frac{x^3}{e^x} = \rho_W$$

ΑΣΚΗΣΗ

$\rho_W(\nu, T) \neq \rho_{RJ}(\nu, T)$ για μικρές και μεγάλες συχνότητες και για μικρά και μεγάλα x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rho_W = \lim_{x \rightarrow \infty} \rho_0 \frac{x^3}{e^x} = \rho_0 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \rho_W \neq \lim_{x \rightarrow \infty} \rho_{RJ} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \rho_W \neq \lim_{x \rightarrow 0} \rho_{RJ} \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rho_{RJ} = \lim_{x \rightarrow \infty} \rho_0 x^2 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \rho_W = \rho_0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \rho_{RJ} = \rho_0 x^2 = 0$$

Άλλα σε μικρά x

$$\rho_W = \rho_0 \frac{x^3}{e^x} \approx \rho_0 \frac{x^3}{1+x} \neq \rho_{RJ} = \rho_0 x^2$$