

Στοιχειώδης Αριθμός Κανονικών Τρόπων ΗΜ πεδίου (dN)  
 ανά στοιχειώδες διάστημα συχνότητας (dν)

$$g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$$

$$[g(\nu)] = \frac{1}{\text{Hz}} = \text{s}$$

$$\frac{g(\nu)}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

$$\left[ \frac{g(\nu)}{V} \right] = \frac{1}{\text{m}^3 \text{Hz}} = \frac{\text{s}}{\text{m}^3}$$

$$\rho(\nu, T) = \frac{g(\nu)}{V} \cdot \bar{E} \quad [\rho(\nu, T)] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}} = \frac{\text{Js}}{\text{m}^3}$$

↓  
 μέση ενέργεια  
 κανονικού τρόπου

κλασικά

$$\bar{E} = \overline{E(T)} = \frac{M}{2} k_B T$$

M = # βαθμών  
 ελευθερίας

θεώρημα  
 ισοκατανομής  
 ενέργειας

$$\Rightarrow \boxed{\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{M}{2} k_B T \frac{\text{για } M=2}{}} \quad \text{v. Rayleigh - Jeans}$$

παλαιο-  
 κβαντικά

$$\bar{E} = \overline{E(\nu, T)} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

προϋποθέσεις  
 •  $E_n = n h\nu$  ενέργεια "σταθισμών"  
 $n = 0, 1, 2, \dots$

•  $\overline{E(\nu, T)} = \sum E_n \cdot P_n$

$$P_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}} \quad Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

(Maxwell-) Boltzmann (MB)  
 στατιστική

$$\Rightarrow \boxed{\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}} \quad \text{v. Planck}$$

♪  
 ΑΣΚΗΣΗ Η -  
 Σημείωση:

Αν ζητούσε  $E_n = n h\nu$  βάζουμε  $E_n = h\nu (n + \frac{1}{2})$  όπως συμ-  
 βόλησε σήμερα για τον κβαντικό ΑΑΤ ΔΕΝ προκύπτει ο νόμος του Planck!

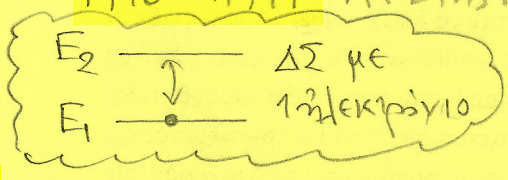
ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΩΣ

ΗΜ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ - ΥΛΗΣ (ΧΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)

**LASER** = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

Εξαναγκασμένη Έκποση  
ή Διεγερμένη

1916 - 1917 A. Einstein "θεωρητικά θεμέλια" του LASER



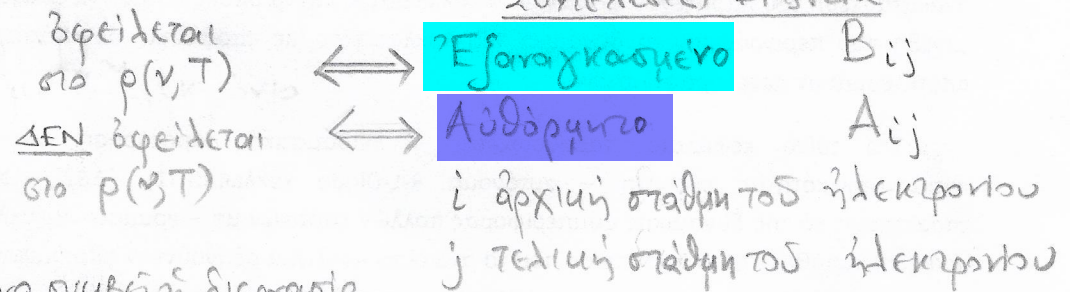
Ξανα-εφαρμογή του v. Planck για την ακτινοβολία μέλανος σώματος

Από τη φορά η απόδειξη στηρίζεται στους 3 μηχανισμούς ή διεργασίες αλληλεπίδρασης ΗΜ ακτινοβολίας - ΔΣ και στη στατιστική (Maxwell) - Boltzmann για την καρένση των σταθμών του ΔΣ από το ηλεκτρόνιο.

- (Stimulated) Absorption (Εξαναγκασμένη) Απορρόφηση
  - Spontaneous Emission (Αυθόρμητη) Έκποση
  - Stimulated Emission (Εξαναγκασμένη) Έκποση
- ← "παλαιότερα γνωστόι" (εισήχθη από τον A. Einstein)

Συντελεστές Einstein

γιατί MB και όχι FD;



παραστάρα να συμβεί η διεργασία

$$dW_{\text{απορ}}^{εξ} = B_{12} \rho(\nu, T) dt$$

$$dW_{\text{εκπ}}^{αυθ} = A_{21} dt$$

$$dW_{\text{εκπ}}^{εξ} = B_{21} \rho(\nu, T) dt$$

ΕΡΩΤΗΣΗ για MB vs όχι FD; (μάλλον δεν υπάρχει FD, σε ύψους T FD → MB, έχουμε 1 ηλεκτρόνιο στο ΔΣ)

1905 A. Einstein έβγαλε το φαινόμενο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο υποθέτοντας ότι η κίνηση φωτός με ενέργεια  $h\nu$

1926 μάλλον από τον Gilbert Newton Lewis «φωτόνιο» = κβαντο φωτός

1950 - 1960 κατασκευάστηκαν τα πρώτα MASER & LASER

1964 Charles Townes, Nikolay Basov, Aleksandr Prokhorov Νόμμος Φυσικής

ΣΗΜΕΡΑ...

↑ microwaves

(ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ (ή διεγερμένη)) ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ  
(STIMULATED) ABSORPTION

ΕΔΩ  
 $\Delta \Sigma = \delta \delta \sigma \sigma \mu \mu \tau \tau$   
 δύο στάθμες  
 ενός ατόμου

1

$$dW_{\text{απορ}}^{εf} = B_{12} \rho(\nu, T) dt$$

Διατήρηση Ενέργειας

$$E_1 + h\nu = E_2 + \frac{P_{\text{ατ}}^2}{2m_{\text{ατ}}} \Rightarrow h\nu \approx E_2 - E_1$$

Συνοδεύουμε  
 αμελητέα

Διατήρηση Ορμής

$$P_{\text{φ}} = P_{\text{ατ}} \Rightarrow \frac{h\nu}{c} = P_{\text{ατ}} \Rightarrow P_{\text{ατ}} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$$c = \lambda \nu \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$E_2$  —————

—————  $E_2$

φωτόνιο  
 $\Rightarrow E_{\text{φ}} = h\nu, P_{\text{φ}} = \frac{h\nu}{c}$

$\rightarrow P_{\text{ατ}}$

$E_1$  —————  
 ηλεκτρόνιο

—————  $E_1$

(A) ΥΠΟΘΕΤΟΥΜΕ  
 ΑΡΧΙΚΩΣ  
 ΑΚΙΝΗΤΟ

(T)

Ας ελέγξουμε αν πράγματι η κινητική ενέργεια του ατόμου  $\frac{P_{\text{ατ}}^2}{2m_{\text{ατ}}}$  μετά την απορρόφηση του φωτονίου είναι αμελητέα, σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου  $E_{\text{φ}}$ .

$$\Lambda := \frac{\frac{P_{\text{ατ}}^2}{2m_{\text{ατ}}}}{E_{\text{φ}}} = \frac{\frac{h^2}{\lambda^2} \cdot \lambda}{\lambda^2 \cdot 2m_{\text{ατ}}/c} = \frac{h}{2m_{\text{ατ}}\lambda c}$$

Για να μεγαλώσει το  $\Lambda$  θα πρέπει ή  $m_{\text{ατ}}$  να μειωθεί.

Ας πάρουμε λοιπόν το μικρότερο δυνατό άτομο, το άτομο του υδρογόνου.

$$m_e \approx 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p \approx 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_{\text{ατ}} \approx m_p + m_e$$

$$m_{\text{ατ}} \approx 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

↑ υπάρχει κι ένα μικρό έλλειμμα μάζας, δηλαδή η ενέργεια συνδέσεως του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου στο άτομο.

Ας πάρουμε ένα τυπικό πράσινο φωτόνιο με  $\lambda \approx 500 \text{ nm}$

$$\Lambda = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2 \cdot 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 500 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \approx 1.320 \cdot 10^{-9}$$

Όπότε, πράγματι η κινητική ενέργεια του ατόμου μετά την απορρόφηση του φωτονίου είναι αμελητέα σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου.

Για ποίο μήκος κύματος  $\lambda$ , στο άτομο του υδρογόνου, θα μπορούσε ο λήγος  $\Lambda$  να γίνει ίσος με 0.05; (2)

$$\Lambda = \frac{h}{2\lambda c m_{\text{ατ}}} = 0.05 \Rightarrow \lambda = \frac{h}{2 c m_{\text{ατ}} 0.05} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{2 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 0.05}$$

$$\Rightarrow \lambda \approx 13.2 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 13.2 \text{ fm}$$

Αυτό είναι ένα εξαιρετικά μικρότερο μήκος κύματος

π.χ. ακτίνες  $\gamma$   $\lambda_{\gamma} \lesssim 10 \text{ pm} = 10 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 10^{-11} \text{ m}$

ενώ εδώ βρήκαμε  $\underline{13.2 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 13.2 \text{ fm}}$

Διάμετροι πυρήνα υδρογόνου 1.75 fm

Ούρατου 15 fm

Άρα, η υπόθεσή μας, να θεωρήσουμε αμελητέα την κινητική ενέργεια του ατόμου μετά την απορρόφηση του φωτονίου

$$\frac{p_{\text{ατ}}^2}{2 m_{\text{ατ}}}$$

σε σχέση με

την ενέργεια του απορροφούμενου φωτονίου  $E_{\gamma}$

είναι αωστή

σχεδόν σε όλο το ΗΜ φάσμα.

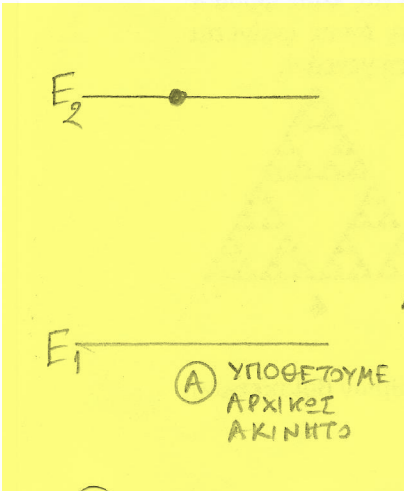
**ΑΥΘΟΡΜΗΤΗ ΕΚΠΟΜΠΗ  
SPONTANEOUS EMISSION**

3

$$dW_{εκμ}^{αυθ} = A_{21} \cdot dt$$

energy level lifetime  
χρόνος ζωής της στάθμης 2  
(το ηλεκτρόνιο από τη στάθμη 2  
αυθόρμητα στη στάθμη 1)

$\tau_2$  ή  $\tau$



$$E_{\gamma} = h\nu$$

$$P_{\gamma} = \frac{h\nu}{c}$$

$$1 := A_{21} \cdot \tau_2 \text{ ή } A_{21} \cdot \tau$$

$$\Rightarrow \tau_2 = \frac{1}{A_{21}}$$

ανδοτικός σπινός ...

το άτομο θα κινηθεί  
προς την αντίθετη  
κατεύθυνση με το φως

Διατήρηση Ενέργειας

$$E_2 = E_1 + E_{\gamma} + \frac{P_{ατ}^2}{2m_{ατ}} \Rightarrow h\nu \approx E_2 - E_1$$

*άμεση*

Διατήρηση Ορμής

$$0 = P_{ατ} + P_{\gamma} \Rightarrow P_{ατ} = -P_{\gamma}$$

- Τα φωτόνια εκπέμπονται σε τυχαία κατεύθυνση, δηλαδή χωρίς κατευθυντικότητα (without directionality)
- με τυχαία φάση, δηλαδή χωρίς συνοχή (incoherence)

συνοχή (coherence) ή συμφωνία, συμπερικύτωση  
= σταθερή σχέση μεταξύ των φάσεων των κυμάτων

coherent  
συνεκτικός

incoherent  
μη συνεκτικός

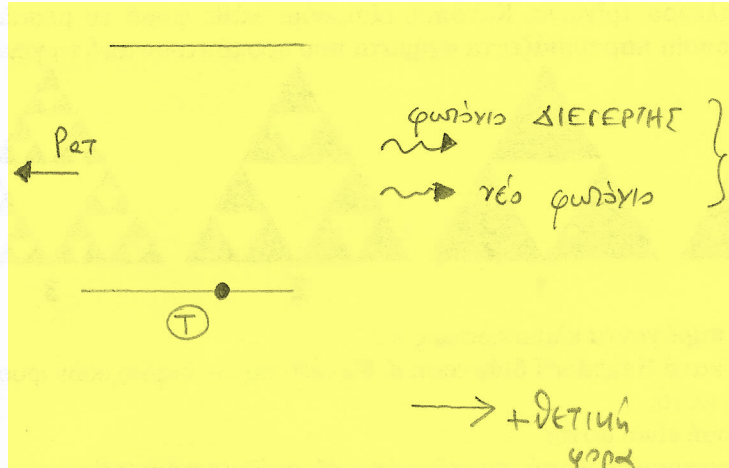
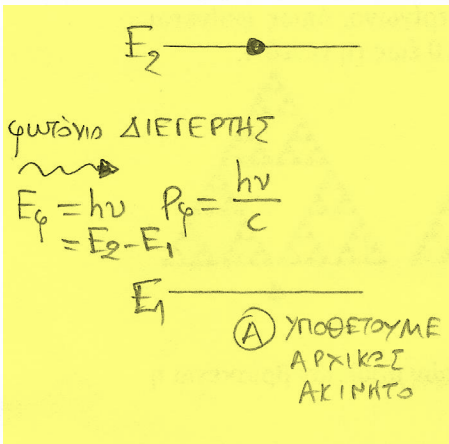
↓  
π.χ. laser

π.χ. φωτεινή πηγή πυρακτωσέωρ ή LED Light Emitting Diode  
incandescent light source

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ (3) ΔΙΕΓΕΡΜΕΝΗ ΕΚΠΟΜΠΗ  
STIMULATED EMISSION

A. Einstein  
"Zur Quantentheorie der  
Strahlung"  
1916, 1917 4

$$dW_{εκπ}^{εf} = B_{21} \rho(\nu T) dt$$



"ΚΛΕΝΟΙ"  
δύο φωτόνια με ίδια  
ένέργεια  
όρμη (κατεύθυνση)  
φάση  
πόλωση

- \* Ίδια ενέργεια  $\Rightarrow$  μονοχρωματικότητα (monochromaticity)
- \* Ίδια όρμη (κατεύθυνση)  $\Rightarrow$  κατευθυντικότητα (directionality)
- \* Ίδια φάση  $\Rightarrow$  συνοχή (coherence)
- \* Ίδια πόλωση  $\Rightarrow$  πολωμένο φως (polarized light) \*
- \* υπάρχουν και οι άλλοι μηχανισμοί στο παιχνίδι...

$\rightarrow$  τα περί φάσεως & πόλωσης  $\neq$  στο άρθρο του Einstein

$\rightarrow$  τα φωτόνια είναι μποζόνια και άρα μπορούν να έχουν ίδια ενέργεια, όρμη (κατεύθυνση), φάση, πόλωση

$\rightarrow$  χρειάζεται η υπόθεση ότι το αρχικό φωτόνιο ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ ενέργειας  $E_{\phi} = E_2 - E_1 = h\nu$  δεν παθαίνει τίποτε κατά τη διάρκεια της εξαναγκασμένης εκπομπής

$\rightarrow$  θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι το αρχικό φωτόνιο ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ καθορίζει τη φάση, την πόλωση & τη διεύθυνση των νέων εκπνεόμενων φωτονίων όπως σε μία εξαναγκασμένη ταλάντωση ο διεγερτής καθορίζει τη φάση, την πόλωση & τη διεύθυνση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης

Διατήρηση Ενέργειας

$$E_2 + \cancel{E_\varphi} = E_1 + \cancel{E_\varphi} + E_{\varphi'} + \frac{P_{\text{ατ}}^2}{2\cancel{m_{\text{ατ}}}} \xrightarrow{\text{αμελητέο}}$$

5

$$\Rightarrow E_{\varphi'} = E_2 - E_1 = E_\varphi \Rightarrow$$

Τα φωτόνια έχουν ίδια ενέργεια  $\rightarrow$  μονοχρωματικότητα

Διατήρηση Ορμής

$$\cancel{P_\varphi} = \cancel{P_\varphi} + P_{\varphi'} + P_{\text{ατ}} \Rightarrow P_{\varphi'} = -P_{\text{ατ}}$$

Έχουμε ήδη υποθέσει πως το νέο φωτόνιο θα κινηθεί στην κατεύθυνση του φωτός ΔΙΕΓΕΡΤΗ

$$\Rightarrow P_{\varphi'} > 0 \quad (\text{θετική αλγεβρική τιμή}) \quad \underline{\text{ίδια κατεύθυνση}}$$

$$(\text{μέτρο}) P_{\varphi'} = \frac{E_{\varphi'}}{c} = \frac{E_\varphi}{c} = P_\varphi \quad \underline{\text{ίδια μέτρο}}$$

$\Rightarrow$  Τα φωτόνια έχουν ίδια ορμή

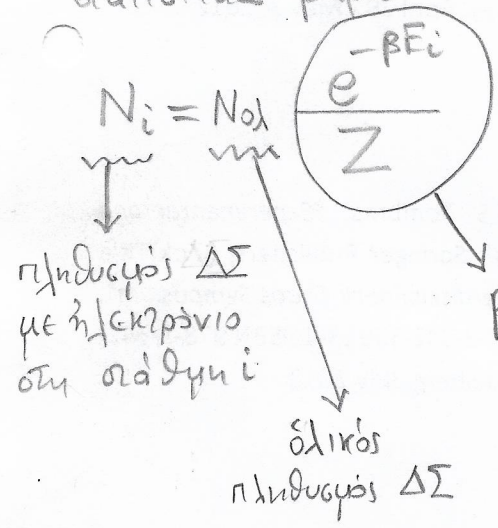
ΕΞΑΓΩΓΗ του νόμου Planck από τους μηχανισμούς αλληλεπίδρασης ΗΜ ακτινοβολίας - ΔΣ και τη στατιστική (Maxwell) - Boltzmann.

Σχέση συντελεστών Einstein A και B

Μελετάμε την αλληλεπίδραση συλλογής ΔΣ - ΗΜ ακτινοβολίας σε θερμοδυναμική ισορροπία.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ (Maxwell) - Boltzmann

1 χωρίς διαφορετικά στατιστικά βάρη



2 με διαφορετικά στατιστικά βάρη

$$N_i = N_{ολ} \frac{g_i e^{-\beta E_i}}{Z}$$

$P_i$  πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη στάθμη  $i$  στο ΔΣ

$g_i$  στατιστικό βάρη της  $E_i$

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} \quad \text{συνάρτηση επιμερισμού} \quad Z = \sum_i g_i e^{-\beta E_i}$$

partition function

Θερμοδυναμική ισορροπία  $\Rightarrow$  σε χρόνο  $dt$   $dN_{1 \rightarrow 2} = dN_{2 \rightarrow 1} \Rightarrow$

$$N_1 dW_{1 \rightarrow 2} = N_2 dW_{2 \rightarrow 1} \Rightarrow$$

$$\frac{N_{ολ} e^{-\beta E_1}}{Z} g_1 dW_{ανοπ}^{εf} = \frac{N_{ολ} e^{-\beta E_2}}{Z} g_2 (dW_{εκπ}^{εf} + dW_{αυδ}^{εκπ}) \Rightarrow$$

$$g_1 e^{-\beta E_1} B_{12} \rho(\nu, T) dt = e^{-\beta E_2} g_2 (B_{21} \rho(\nu, T) dt + A_{21} dt) \Rightarrow$$

$$g_1 e^{-\beta E_1} B_{12} \rho(\nu, T) - e^{-\beta E_2} g_2 B_{21} \rho(\nu, T) = e^{-\beta E_2} g_2 A_{21} \Rightarrow$$



$$\rho(\nu, T) = \frac{g_2 A_{21} e^{-\beta E_2}}{g_1 B_{12} e^{-\beta E_1} - g_2 B_{21} e^{-\beta E_2}} = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} e^{\beta(E_2 - E_1)} - 1}$$

Όμως,  
 $\lim_{T \rightarrow \infty} \rho(\nu, T) = \infty$   
 π.χ. από το πείραμα

1 Αν χωρίσουμε την πειραματική συμπεριφορά την οποία έζησε ο νόμος Planck

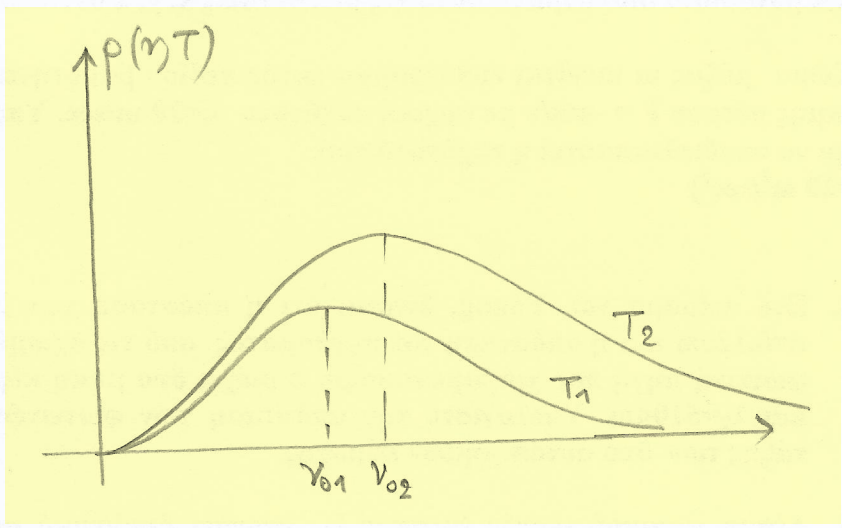
$$\rightarrow \frac{\rho(\nu, T_2)}{\rho(\nu, T_1)} = \frac{e^{\frac{h\nu}{k_B T_1} - 1}}{e^{\frac{h\nu}{k_B T_2} - 1}} > 1$$

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T} - 1}}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T_1} - 1} > e^{\frac{h\nu}{k_B T_2} - 1} \Leftrightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T_1}} > e^{\frac{h\nu}{k_B T_2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T_1} > \frac{1}{T_2} \Leftrightarrow T_2 > T_1$$

δηλαδή μεγαλύτερη θερμοκρασία οδηγεί σε μεγαλύτερο  $\rho(\nu, T)$ ,  $\forall \nu$ .



2 Έκδομα, από το νόμο μετατόπισης Wien στη μορφή  
 $\nu_0 = (\text{σταθ}) \cdot T$   
 $\nu_0 \approx 58.789 \frac{\text{GHz}}{\text{K}} \cdot T$

$\Rightarrow \{ T \uparrow \Rightarrow \nu_0 \uparrow \}$  όπως δείχνουμε και στο σχήμα

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow \beta \rightarrow 0$$

$$\rho \rightarrow \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} - 1} = \infty$$

"Αρα,  $\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} = 1 \Rightarrow \boxed{g_1 B_{12} = g_2 B_{21}}$

"Αν  $g_2 = g_1$  ή χωρίς στατιστικά βάρη  $\Rightarrow B_{12} = B_{21} := B$   
 $A_{21} := A$

$$\rho(\nu, T) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} \cdot e^{\beta(E_2 - E_1)} - 1}$$

σύνκλιση  $\Rightarrow$

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

$$\boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}}$$

$$\boxed{g_1 B_{12} = g_2 B_{21}}$$

$$\boxed{h\nu = E_2 - E_1}$$