

ΝΟΜΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΣ Wien

$$x = \frac{h\nu}{k_B T}$$

$$\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1}$$

v. Planck

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho_0 \frac{3x^2(e^x - 1) - x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} = \rho_0 x^2 \frac{3(e^x - 1) - x e^x}{(e^x - 1)^2}$$

αν ψάχνουμε άκρῳτα, θα πρέπει $\frac{d\rho}{dx} = 0 \Rightarrow$ (αφῳ $x \neq 0$) $3(e^x - 1) = x e^x$

φαίνεται ὅτι $x_0 \sim 3$

ἀκριβέστερα, ἀριθμητικῶς βρίσκουμε

ἢ καὶ με online grapher $x_0 = 2.821439$

$$\Rightarrow \frac{h\nu_0}{k_B T} \approx 2.821439 \Rightarrow \nu_0 = \left(58.789 \frac{\text{GHz}}{\text{K}}\right) \cdot T \quad \text{ἢ} \quad \frac{\nu_0}{T} \approx 58.789 \frac{\text{GHz}}{\text{K}}$$

"νόμος μετατόπισῳς", τοῦ ν_0 συναρτῆσαι τοῦ T

$$\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x}$$

v. Wien

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho_0 \frac{3x^2 e^x - x^3 e^x}{e^{2x}} = \rho_0 x^2 \frac{3e^x - x e^x}{e^{2x}} = \rho_0 x^2 \frac{3-x}{e^x}$$

αν ψάχνουμε ἀκρῳτα, θα πρέπει $\frac{d\rho}{dx} = 0 \Rightarrow$ (για $x \neq 0$) $x_0 = 3$

$$\Rightarrow \frac{h\nu_0}{k_B T} = 3 \Rightarrow \nu_0 = 3 \frac{k_B}{h} T \quad \text{ἢ} \quad \frac{\nu_0}{T} \approx 62.510 \frac{\text{GHz}}{\text{K}}$$

"νόμος μετατόπισῳς", τοῦ ν_0 συναρτῆσαι τοῦ T

ΑΣΚΗΣΗ Δείξτε πῶς στο σημεῖο x_0 ἢ $\frac{d^2\rho_w}{dx^2} < 0$, ὥστε πράγματι να ἔχουμε μέγιστο. Χρησιμοποιῆστε το v. Wien $\rho_w = \rho_0 \frac{x^3}{e^x}$

$$\frac{d^2\rho_w}{dx^2} = \rho_0 2x \left. \frac{3e^x - x e^x}{e^{2x}} \right|_{x=x_0} + \rho_0 x^2 \left. \frac{3e^x - e^x - x e^x}{e^{4x}} \right|_{x=x_0=3} = \rho_0 x^2 \left. \frac{(-e^x)}{e^{4x}} \right|_{x=x_0=3} < 0$$

ἠνδεδίεται για $x = x_0 = 3$

ΑΣΚΗΣΗ Ὁμοίως, χρησιμοποιῶντες τὸ v. Planck

ἠνδεδίεται για $x = x_0$

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} \Big|_{x=x_0} = \rho_0 2x \cdot \left. \frac{3(e^x - 1) - x e^x}{(e^x - 1)^2} \right|_{x=x_0} + \rho_0 x^2 \frac{(3e^x - e^x - x e^x)(e^x - 1)^2 - (3(e^x - 1) - x e^x) 2(e^x - 1) e^x}{(e^x - 1)^4}$$

0 (ὁ ἀριθμητικῶς ἠνδεδίεται)

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} \Big|_{x=x_0} = \rho_0 x^2 \left. \frac{(2e^x - x e^x)(e^x - 1)^2}{(e^x - 1)^4} \right|_{x=x_0} < 0 \Leftrightarrow 2e^x - x e^x < 0 \Leftrightarrow 2 < x \Big|_{x=x_0}$$

τοῦ ν_0 συναρτῆσαι τοῦ T