

ΔΙΑΜΗΚΕΙΣ ΤΡΟΦΟΙ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑΣ

ΕΝΘΟΣ

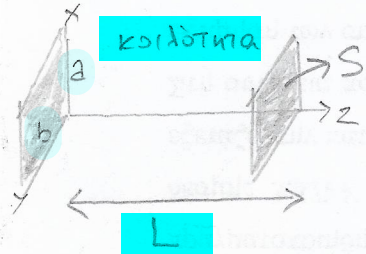
ΕΥΡΟΥΣ ΓΡΑΜΜΗΣ

(ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗΣ) ΕΚΠΟΜΠΗΣ

1

ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ

Έτσι τις κοιλότητες υποστηρίζονται ΗΜ τρόποι m : η κυκλική τους συχνότητα να είναι



$$\omega_m = \frac{m\pi c}{L}, m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$\nu_m = \frac{mc}{2L}, m \in \mathbb{N}^* \quad \text{συχνότητα} \quad \frac{c}{\lambda_m} = \frac{m}{2L} \Rightarrow$$

$$L = m \cdot \frac{\lambda_m}{2}, m \in \mathbb{N}^* \quad (\text{στάσιμα κύματα...})$$

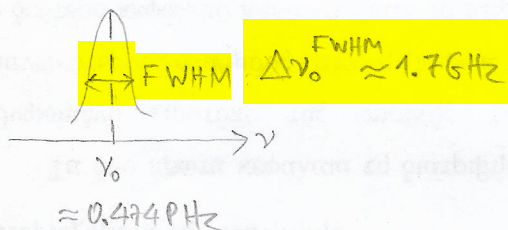
$$V = L \cdot S$$

Έτσι οι συνθήκες $a, b \ll L$ και οι τρόποι αυτοί εξισώνονται

μόνον με τις συνθήκες κατά μήκος του άξονα z που συνδέεται δύο κατόπιν υποστηρίγματα διαμήκεις τρόποι (longitudinal modes)

Εύρος γραμμής (εξαναγκασμένης) έκπομπης

π.χ. έρωδρή γραμμή @ laser He-Ne, έχει κεντρικό μήκος κύματος



$$\lambda_0 = 632.8 \text{ nm} \Rightarrow$$

$$\nu_0 = 0.474 \times 10^{15} \text{ Hz} = 0.474 \text{ PHz}$$

$$\frac{\Delta \nu_0^{\text{FWHM}}}{\nu_0} \approx \frac{1.7 \text{ GHz}}{0.474 \text{ PHz}} \approx 3.6 \times 10^{-6}$$

$$\text{έτσι το FWHM της είναι } \Delta \nu_0^{\text{FWHM}} \approx 1.7 \text{ GHz} = 1.7 \times 10^9 \text{ Hz}$$

δηλαδή η έρωδρή γραμμή είναι αρκετά λεπτή

ΕΡΩΤΗΜΑ

Ε υποστηρίζονται από την κοιλότητα διαμήκεις ΗΜ τρόποι m , οι οποίοι να χρησιμοποιούν στη συχνότητα περιοχή της ν_0 , η οποία έχει εύρος $\Delta \nu_0^{\text{FWHM}}$,

$$\nu_m = \frac{mc}{2L}, m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$\Delta \nu_{m, m+1} = \frac{c}{2L}$$

συχνότητα απόσταση διαδοχικών διαμήκων ΗΜ τρόπων m & $m+1$

$$\text{π.χ. για } L = 0.4 \text{ m} \quad \frac{c}{2L} = \frac{3 \cdot 10^8}{0.8} \text{ Hz} = \frac{3}{8} \cdot 10^9 \text{ Hz} = 0.375 \text{ GHz} = 375 \text{ MHz}$$

Άρα μέσα στο FWHM της γ_0 , $\Delta \nu_0^{\text{FWHM}}$, χωράνε

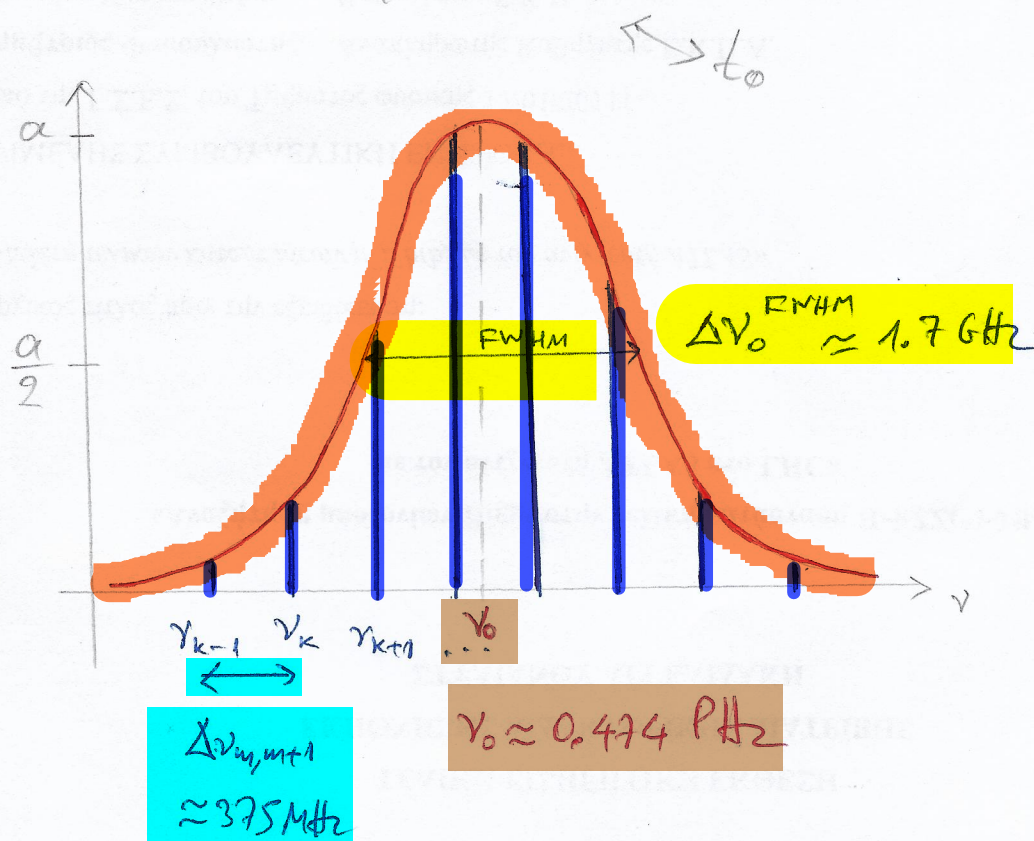
$$\left\lfloor \frac{\Delta \nu_0^{\text{FWHM}}}{\Delta \nu_{m,m+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1.7 \text{ GHz}}{375 \text{ MHz}} \right\rfloor = \left\lfloor 4.533 \right\rfloor = 4$$

↓
ακέραιο μέρος

Δηλαδή βλέπουμε ότι μέσα στο εύρος της γραμμής (εναρμονισμένη) έχουμε

έξι διακριτά διαγνώσεις (όχι και εναρμονισμένοι...)

Το εύρος κάθε διαγνώσης (όχι και εναρμονισμένοι...) ΗΜ γράφει είναι $\Delta \nu_m^{\text{FWHM}} \approx 1 \text{ MHz}$ ή 10 MHz **λεπτό**



ΣΤΑΣΙΜΑ ΗΜ ΚΥΜΑΤΑ ΣΕ 3Δ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ

standing EM waves in a 3D cavity

ΔΙΑΜΗΚΕΙΣ ΤΡΟΠΟΙ

longitudinal modes

κ

ΕΓΚΑΡΣΙΟΙ ΤΡΟΠΟΙ

transverse modes

TE (transverse electric) mode $\nabla \times \vec{E} \neq 0$ $\vec{E} \perp \vec{k}$ (διεύθυνση διαδόσεως)

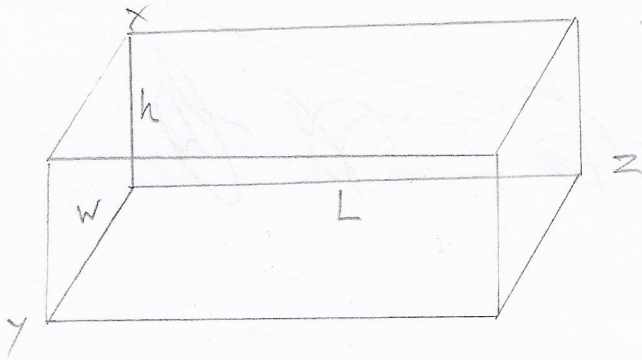
TM (transverse magnetic) mode $\nabla \times \vec{B} \neq 0$ $\vec{B} \perp \vec{k}$ (διεύθυνση διαδόσεως)

TEM (transverse electromagnetic) mode $\nabla \times \vec{E} = 0$, $\nabla \times \vec{B} = 0$ $\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k}$ (διεύθυνση διαδόσεως)

Ή ΕΣΤΙΝ ΤΕΜ

(λογίζονται ως διεύθυνση διαδόσεως την παράλληλη στη μακρά διάσταση της κοιλότητας, δηλ. τον άξονα z, λεγόμενο και οπτικό άξονα)

Είχαμε έφευγε την ορθογώνια κοιλότητα



$$E_x = E_{x0} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$$

$$E_y = E_{y0} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z)$$

$$E_z = E_{z0} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z)$$

$$B_x = \frac{i}{\omega} (E_{y0} k_z - E_{z0} k_y) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z)$$

$$B_y = \frac{i}{\omega} (E_{z0} k_x - E_{x0} k_z) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z)$$

$$B_z = \frac{i}{\omega} (E_{x0} k_y - E_{y0} k_x) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z)$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad k_x = \frac{m_x \pi}{a_x} \quad k_y = \frac{m_y \pi}{a_y} \quad k_z = \frac{m_z \pi}{a_z}$$

$$m_x, m_y, m_z \in \mathbb{Z}$$

$$m_x, m_y, m_z \in \mathbb{N}$$

ἀπορροφώντας την αλλαγή προτίγας στα
 E_{x0}, E_{y0}, E_{z0}

$$m_x := p$$

$$m_y := q$$

$$m_z := m$$

ἀριθμοί πρόπων
node numbers

- Όχι άνω του ενός να μηδενίζεται ταυτόχρονα (άλλιως δίνεται) με βάση τις άνωθεν εξισώσεις

$$\omega_{pqm} = \pi c \sqrt{\left(\frac{p}{h}\right)^2 + \left(\frac{q}{w}\right)^2 + \left(\frac{m}{L}\right)^2}$$

$$\gamma_{pqm} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{p}{h}\right)^2 + \left(\frac{q}{w}\right)^2 + \left(\frac{m}{L}\right)^2}$$

ορθογώνια κοιλότητα

$$\omega_{pqm} = \pi c \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{a^2} + \frac{m^2}{L^2}}$$

$$\nu_{pqm} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{a^2} + \frac{m^2}{L^2}}$$

Τετραγωνική κοιλότητα

$$a = w = h$$

$$\omega_{pqm} = \frac{\pi c}{a} \sqrt{p^2 + q^2 + m^2}$$

$$\nu_{pqm} = \frac{c}{2a} \sqrt{p^2 + q^2 + m^2}$$

Κυβική κοιλότητα

$$a = w = h = L$$

p	q	m	$\frac{2a\nu}{c}$	ΗΜ πεδίο
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	1	$\sqrt{2}$	$\neq 0$
1	1	1	$\sqrt{3}$	$\neq 0$
2	0	0	2	0
2	1	0	$\sqrt{5}$	$\neq 0$

Τετραγωνική κοιλότητα

Δ

$$\begin{aligned}\gamma_{pgm} &= \frac{c}{2} \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{a^2} + \frac{m^2}{L^2}} = \frac{c}{2} \frac{m}{L} \sqrt{1 + \frac{p^2 + q^2}{a^2} \cdot \frac{L^2}{m^2}} \\ &= \frac{c}{2} \frac{m}{L} \sqrt{1 + \frac{p^2 + q^2}{m^2} \cdot \frac{L^2}{a^2}} \\ &= \frac{c}{2} \frac{m}{L} \sqrt{1 + x}\end{aligned}$$

όπου

$$x = \frac{p^2 + q^2}{m^2} \left(\frac{L}{a}\right)^2$$

π.χ. Laser He-Ne

$$\lambda_0 = 632.8 \text{ nm} \quad \gamma_0 = 0.474 \text{ PHz}$$

$$L = 0.4 \text{ m}$$

As προσπαθούμε να βρούμε για έκτιμηση της τάξης μεγέθους του m.

Αν είχαμε μόνο διαγώνιες αρμόνες (1Δ περίληψη)

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{L}$$

$$\gamma_m = \frac{m\pi c}{2L}$$

$$\frac{1}{\lambda_m} = \frac{m}{2L} \Leftrightarrow L = m \frac{\lambda_m}{2}$$

ΘΕΛΟΥΜΕ

$$\gamma_m \sim \gamma_0$$

$$\frac{m\pi c}{2L} \sim 0.474 \text{ PHz}$$

$$m \sim \frac{2L \cdot 0.474 \text{ PHz}}{c} = \frac{2 \cdot 0.4 \text{ m} \cdot 0.474 \text{ PHz}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}$$

$$m \sim \frac{0.8 \cdot 0.474}{3} \cdot 10^7 = 0.1264 \cdot 10^7 \Rightarrow$$

$$m \approx 1.264 \cdot 10^6$$

$$m^2 \approx 1.6 \cdot 10^{12}$$

για $a = 1 \text{ mm}$ $\left(\frac{L}{a}\right)^2 = \left(\frac{4 \cdot 10^{-1}}{10^{-3}}\right)^2 = 160000$

για $a = 2 \text{ mm}$ $\left(\frac{L}{a}\right)^2 = \left(\frac{4 \cdot 10^{-1}}{2 \cdot 10^{-3}}\right)^2 = 40000$

για $a = 4 \text{ mm}$ $\left(\frac{L}{a}\right)^2 = \left(\frac{4 \cdot 10^{-1}}{4 \cdot 10^{-3}}\right)^2 = 10000$

για $a = 10 \text{ mm}$ $\left(\frac{L}{a}\right)^2 = \left(\frac{4 \cdot 10^{-1}}{10^{-2}}\right)^2 = 1600$

• Άρα, για μικρά $p, q \approx 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \times$ μικρό

οπότε, μπορούμε να κάνουμε ένα ανάπτυγμα Taylor

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots \approx 1 + \frac{x}{2}$$

Οπότε

$$\gamma_{pqm} \approx \frac{c}{2} \frac{m}{L} \left(1 + \frac{x}{2}\right)$$

$$\gamma_{pqm} \approx \frac{c}{2} \frac{m}{L} + \frac{c}{2} \frac{m}{L} \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2 + q^2}{m^2} \left(\frac{L}{a}\right)^2$$



$$\gamma_{pqm} \approx \frac{mc}{2L} + \frac{cL}{4a^2} \frac{p^2 + q^2}{m}$$



$$\gamma_{00m} \approx \frac{mc}{2L} = \gamma_m$$

οι οποίες είναι οι συχνότητες των διαγικών τρόπων στο 1Δ πρόβλημα

Βεβαίως, στο 3Δ πρόβλημα, αν δύο από τους αριθμούς τρόπων μηδενισίας έχουμε μηδενισμό ως ΗΜ πεδίου στην κοιλότητα.

Οι τρόποι με $p \neq 0$ ή $q \neq 0$ λέγονται εγκάρσιοι τρόποι (transverse modes)

Η συχνότητα απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών εχρηστών τρώων
η.χ. μεταβολή του p , με συγκεκριμένα q, m , είναι λοιπόν

$$\Delta \nu_{p,p+1} \approx \frac{cL}{4a^2} \frac{(p+1)^2 - p^2}{m} = \frac{cL}{4a^2} \frac{2p+1}{m}$$

π.χ. για $L=0.4m$ και $a=4mm$

$$\Delta \nu_{p,p+1} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 10^{-1}}{4 \cdot 16 \cdot 10^{-6}} \frac{2p+1}{m} = \frac{3 \cdot 10^{13}}{16m} (2p+1)$$

$$m \approx 1.264 \cdot 10^6$$

$$\Delta \nu_{p,p+1} \approx 0.148 \cdot \frac{10^{13}}{10^6} (2p+1) = 1.5 \cdot 10^6 (2p+1) \text{ Hz}$$

$$= 1.5 (2p+1) \text{ MHz}$$

$$\Delta \nu_{p,p+1} \approx 1.5 (2p+1) \text{ MHz}$$

$$\Delta \nu_{m,m+1} = \frac{c}{2L} = 375 \text{ MHz}$$

$$\Delta \nu_{m,m+1} \gg \Delta \nu_{p,p+1}$$

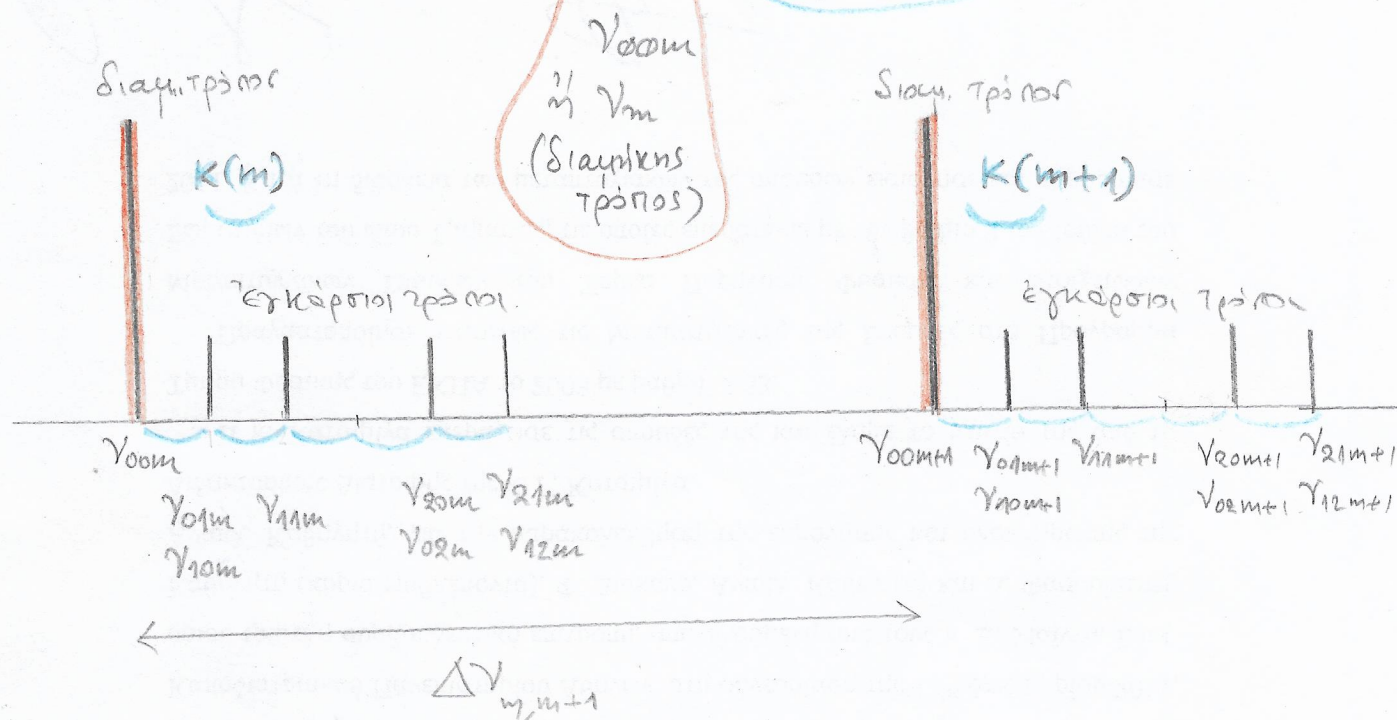
για $p=1$ $\Delta \nu_{p,p+1} \approx 4.5 \text{ MHz}$

Η συχνότητα απόσταση των διαγώνων τρώων είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη συχνότητα απόσταση των εχρηστών τρώων.

$$V_{pqm} \approx$$

$$\frac{mc}{2L} +$$

$$\frac{cL}{4a^2} \frac{p^2 + q^2}{m} \Rightarrow \dots$$



$$V_{pqm} \approx V_{00m} + K(m) \cdot (p^2 + q^2)$$

$$V_{01m} \approx V_{00m} + K(m)$$

$$V_{11m} \approx V_{00m} + 2 \cdot K(m)$$

$$V_{20m} \approx V_{00m} + 4 \cdot K(m)$$

$$V_{21m} \approx V_{00m} + 5 \cdot K(m)$$