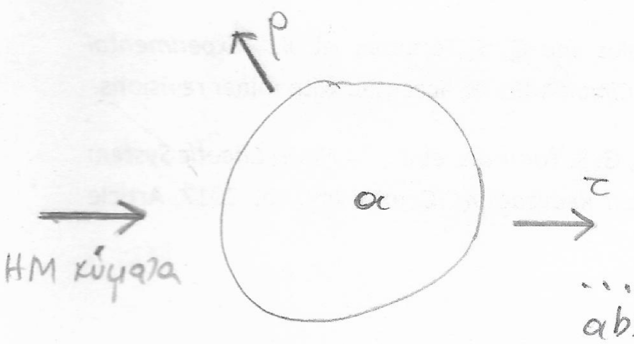
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

ΜΕΛΑΝ ΣΩΜΑ κ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ



$$\boxed{\alpha + \rho + \tau = 1}$$

...ἀπορροφήσεως absorption... ...ἀνακλάσεως reflection... ...διελεύσεως transmission...

συντελεστής... ...coefficient

$\boxed{\alpha}$: τὸ ποσοστὸ τῆς ΗΜ ἀκτινοβολίας που ἀπορροφᾶται ἀπὸ τὸ σῶμα

$\boxed{\rho}$: » ἀνακλᾶται »

$\boxed{\tau}$: » διέρχεται »

μέλαν σῶμα (black body) ἕνα ἐξιδανικευμένο σῶμα, τὸ ὁποῖο ἀπορροφᾶ
(μαῦρο) ὅλη τὴν προσπίπτουσα σὲ αὐτὸ ΗΜ ἀκτινοβολία, ἀνεξαρτήτως συχνότητας καὶ ἀνεξαρτήτως γωνίας προσπτώσεως.

δηλαδή $\boxed{\rho = 0,\ \tau = 0,\ \alpha = 1 \quad \forall \text{ συχνότητα},\ \forall \text{ γωνία προσπτώσεως}}$

Ἐὰν ἴσχυαν μόνο τὰ παραπάνω, τότε λόγω τῆς συνεχοῦς ἀπορροφήσεως ἐνέργειας, ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος θὰ αὐξανόταν συνεχῶς.

Ἔτσι, ἕνα μέλαν σῶμα, τὸ ὁποῖο βρίσκεται σὲ θερμοδυναμική ἰσορροπία (ἄρα καὶ σὲ σταθερὴ θερμοκρασία) θὰ πρέπει νά ἐπαν-ἐκπέμπει ΗΜ ἀκτινοβολία, ἡ ὁποία καλεῖται ἀκτινοβολία μέλανος σώματος black-body radiation, ἔτσι ὥστε νὰ διατηρεῖται τὸ ἐνεργειακὸ ἰσοζύγιο.

Ἡ ἀκτινοβολία μέλανος σώματος γίνεται σύμφωνα μὲ τὸ νόμο τοῦ Planck. οὕτως ὥστε τὸ φάσμα της ἐξαρτᾶται μόνο ἀπὸ τὴ θερμοκρασία (κ τὴ συχνότητα) $\rho(\nu, T)$
ἀνεξαρτήτως: σχήματος, συστάσεως τοῦ μέλανος σώματος, γωνίας ἐκπομπῆς

"Ενα μέλαν σώμα, σὲ θερμοδυναμικὴ ἰσορροπία, ἔχει τὶς ἀξιοσημείωτες ἰδιότητες:

(I1) εἶναι ἰδανικὸς ἐκπομπός, δηλ. ἐκπέμπει σὲ κάθε συχνότητα τουλάχιστον ὅση ἐνέργεια ἐκπέμπει οἱοδήποτε ἄλλο σῶμα ταυτόσημης θερμοκρασίας

(I2) εἶναι ἰσότροπος ἐκπομπός, δηλ. ἡ ἀκτινοβολία του διασπείρεται ἰσοτρόπως, ἀνεξαρτήτως κατευθύνσεως

Τα πραγματικά σώματα ἐκπέμπουν κλάσμα τῆς ἀκτινοβολίας μέλανος σώματος.

| συντελεστὴς ἐκπομπῆς ἢ ἐκπεμπότης
emission coefficient or emissivity | ϵ |

Το ποσοστὸ τῆς HM ἀκτινοβολίας, το ὁποῖο ἐπαν-εκπέμπεται ἀπὸ το σῶμα

ἐξ ὁρισμοῦ $\boxed{\epsilon_{\text{μέλανος σώματος}} = 1 \text{ σε θερμοδυν. ισορ.}}$

δηλ. συνοψίζοντας, | γιὰ τὸ μέλαν σῶμα ἰσχύει $a=1,\ \rho=0,\ \tau=0,\ \epsilon=1$ (σὲ θερμοδυναμικὴ ἰσορροπία) |

γκρίζο σῶμα gray body $\epsilon<1$, a, ρ, τ

λευκὸ σῶμα white body $\rho=1$ $a=0$ $\tau=0$

ἀδιαφανὲς σῶμα opaque body $\tau=0$ $a+\rho=1$

διαφανὲς σῶμα transparent body $\tau=1$ $a=0$ $\rho=0$

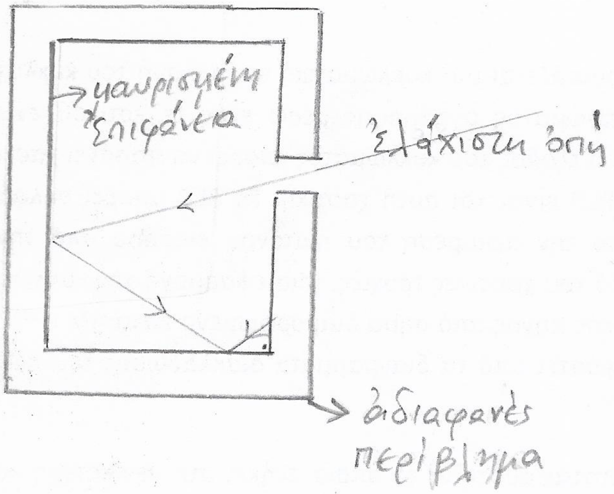
ἐνεργὸς θερμοκρασία
effective temperature — ἑνὸς σώματος π.χ. ἀστέρα, πλανήτη, κλπ

εἶναι ἡ θερμοκρασία ἑνὸς μέλανος σώματος, τὸ ὁποῖο θὰ ἐξέπεμπε τὴν ἴδια συνολικὴ (δηλ. ὁλοκληρωμένη σὲ ὅλες τὶς συχνότητες) ἔνταση ἀκτινοβολίας I $\left([I]=\frac{W}{m^2}\right)$

Προσεγγιστική πραγμάτωση μέλανος σώματος

κοιλότητα με οπή
cavity with a hole

photonics: "cavity"
(cavity with a hole)



1898
1901 Otto Lummer η Ferdinand Kurlbaum

σήμερα $\exists$ ενδιαφέρον για σχεδόν μέλανα σώματα (near black bodies)

Εφαρμογές

απόκρυψη (ραντάρ)

συλλέκτες ηλ. ενέργειας

ανιχνευτές υπέρυθρης ακτινοβολίας

τηλεσκόπια, κάμερες (ως π.χ. αντιανακλαστικές επιφάνειες για τη μείωση του διάχυτου ή αδέσποτου φωτός)

Προσεγγιστικά μέλανα σώματα

αιθάλη

απλό μαύρο χρώμα $\alpha \leq 0.975$

super black $\alpha \simeq 0.996$ $\rho = 0.004$

Vantablack (με νανοσωλήνες C) $\alpha = 0.9996$

$$\boxed{\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad \text{ν. Planck}}$$

$$\boxed{[\rho(\nu, T)] = \frac{J}{m^3\, Hz}}$$

Πυκνότητα ἐνέργειας ΗΜ ἀκτινοβολίας σὲ στοιχειώδη περιοχὴ συχνότητας, μέλανος σώματος σὲ θερμοδυναμικὴ ἰσορροπία

Νόμος τοῦ Planck καὶ σύγκριση μὲ τὶς προσεγγίσεις Rayleigh-Jeans κ Wien

(«Υπεριώδης καταστροφή» κ «Πρόβλημα μακρινοῦ ὑπερύθρου»)

$\rho(\nu,T)\,d\nu$

$[\rho(\nu,T)\,d\nu] = \frac{J}{m^3}$

$[\rho(\nu,T)] = \frac{J}{m^3\,Hz} = \frac{Js}{m^3}$

ἕνα ἀπὸ τὰ ζητήματα ποὺ ἀποκάλυψε τὴ κβάντωση τῆς ΗΜ ἀκτινοβολίας

$$\rho_{RJ}(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3} = \rho_{RJ}$$

Rayleigh-Jeans
κλασική φυσική, 1900

$$\rho_W(\nu,T) = \frac{a\nu^3}{e^{b\nu/T}} \xrightarrow[\text{ἀπὸ ν.Planck}]{\text{σταθερές}} \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}} = \rho_W$$

Wien
πειραματικὸ ταίριασμα (ἑλληνιστὶ fitting) στὶς ὑψηλὲς συχνότητες
1896

$$\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1} = \rho$$

Planck
παλαιὰ κβαντικὴ μηχανική, 1900
συμπίπτει μὲ τὰ πειραματικὰ δεδομένα γιὰ ὅλες τὶς συχνότητες καὶ θερμοκρασίες

$x := \frac{h\nu}{k_B T}$ (εἶναι > 0 γιὰ μη μηδενικὴ συχνότητα)

πεδία ὁρισμοῦ – φυσικοῦ ἐνδιαφέροντος

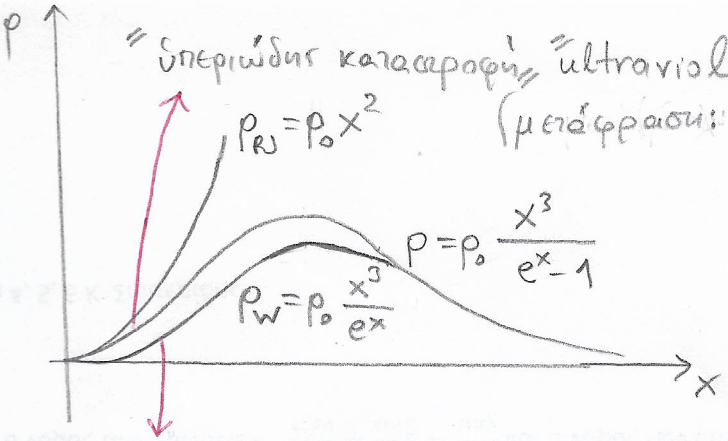
$\rho_{RJ} = \rho_0 x^2 \qquad A_{RJ} = \mathbb{R}_+$

$\rho_W = \rho_0 \frac{x^3}{e^x} \qquad A_W = \mathbb{R}_+$

$\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \qquad A = \mathbb{R}_+^*$

$\rho_0 := \frac{8\pi}{h^2}\left(\frac{k_B T}{c}\right)^3 \qquad [\rho_0] = \frac{J}{m^3\,Hz} = \frac{Js}{m^3}$

"υπεριώδης καταστροφή" "ultraviolet catastrophe" (μετάφραση: σε υψηλές συχνότητες)



"πρόβλημα μακρινού υπερύθρου" (μετάφραση: σε χαμηλές συχνότητες)
"far infrared problem"

Οι ονομασίες αυτές έχουν σχέση με τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα γύρω στο 1900 και είναι με αυτή την έννοια παραπλανητικές.

$$x := \frac{h\nu}{k_B T}$$

Όμως, η περιοχή όπου αρχίζουν οι αποκλίσεις, εξαρτάται προφανώς και από τη θερμοκρασία του μέλανος σώματος.

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> Συμβατικά στην περιοχή του ΗΜ φάσματος "μακρινό υπέρυθρο" (far infrared, FIR) έχουμε μήκος κύματος $25\,\mu m < \lambda < 1000\,\mu m$. Βρείτε σε τι $x=\frac{h\nu}{k_B T}$ αντιστοιχεί το FIR, για θερμοκρασία (α') 300K δηλαδή περίπου τη θερμοκρασία ενός ζώου, (β') 6000K δηλαδή περίπου για την ενεργό θερμοκρασία της φωτόσφαιρας του Ηλίου, (γ') 6K.

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{h\nu}{k_B T},\ c=\lambda\nu \Rightarrow \lambda=\frac{ch}{x k_B T} \\ 25\,\mu m < \lambda < 1000\,\mu m \end{array}\right\} \Rightarrow 25\,\mu m < \frac{ch}{x k_B T} < 1000\,\mu m \Rightarrow$$

$$\frac{ch}{k_B T\, 1000\,\mu m} < x < \frac{ch}{k_B T \cdot 25\,\mu m}$$

$$\frac{hc}{k_B} = \frac{6.626\cdot 10^{-34}\,Js\ 3\cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}}{1.380\cdot 10^{-23}\,JK^{-1}} \simeq 14.404\cdot 10^{-3}\,Km$$

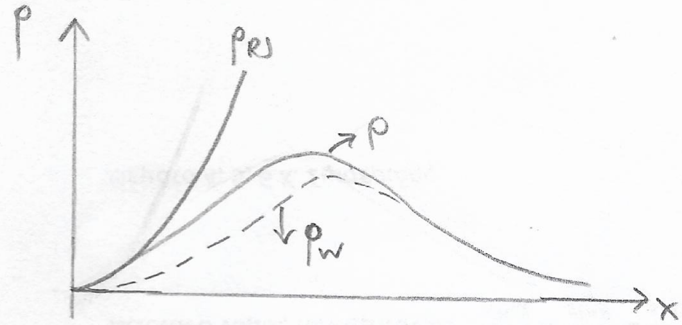
(α') 300K $\Rightarrow 0.048 < x < 1.921$

(β') 6000K $\Rightarrow 0.0024 < x < 0.09605$ $\qquad x_{χαμ} < x < x_{υψ}$

(γ') 6K $\Rightarrow 2.4 < x < 96.05$

x_{LOW} $\qquad x_{HIGH}$

ΑΣΚΗΣΗ FIR $25\mu m < \lambda < 1000\mu m$



Ποιά πρέπει νά είναι ή θερμοκρασία μέλανος σώματος T : $\rho_W = 0.5\rho$ γιά τό άνω καί τό κάτω όριο τής περιοχής FIR;

(δηλαδή «νά υπάρχει πρόβλημα στό μακρινό υπέρυθρο»)

ΛΥΣΗ

Ψάχνουμε $\rho_W = 0.5\rho \Rightarrow \rho_0 \frac{x^3}{e^x} = 0.5\,\rho_0 \frac{x^3}{e^x-1} \Rightarrow e^x - 1 = 0.5\,e^x \Rightarrow$

$0.5e^x = 1 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow \boxed{x = \ln 2 \simeq 0.693}$

$$x = \frac{h\nu}{k_B T},\quad c = \lambda\nu \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{ch}{x k_B T}} \quad \boxed{\frac{hc}{k_B} \simeq 14.404\, 10^{-3}\, Km}$$

$$25\,\mu m < \frac{ch}{x k_B T} < 1000\,\mu m \Rightarrow$$

$$\frac{hc}{x k_B\, 1000\mu m} < T < \frac{hc}{x k_B\, 25\mu m}$$

$$\frac{14.404\, \cancel{10^{-3}}\, K\cancel{m}}{\ln 2\; 1\cancel{000}\, \cancel{10^{-6}}\, \cancel{m}} < T < \frac{14.404\, 10^{-3}\, Km}{\ln 2 \cdot 25\, 10^{-6} m}$$

$$\frac{14.404}{0.693} K < T < \frac{14.404}{0.693} \cdot 40\, K$$

$$\boxed{21K \lesssim T \lesssim 831K}$$

Δύο διατυπώσεις τοῦ νόμου Stefan–Boltzmann

(1) ὡς πρὸς τὴν πυκνότητα ἐνέργειας $\varrho(T)$

(2) ὡς πρὸς τὴν ἔντασι ἀκτινοβολίας I

$$[\varrho(T)] = \frac{J}{m^3}$$

$$[I] = \frac{J}{m^2 \cdot s} = \frac{W}{m^2}$$

(1)

$$\varrho(T) := \int_0^\infty \rho(\nu, T)\, d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}\, d\nu$$

$\varrho(T) = a T^4$

πυκνότητα ἐνέργειας

$\frac{J}{m^3}$

κοιλότητα μέλανος σώματος

θερμοκρασίας T

$$x := \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow \nu = \frac{x k_B T}{h} \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T}{h} dx$$

$$\varrho(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \left(\frac{k_B T}{h}\right) \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx}_{\pi^4/15}$$

$$\varrho(T) = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^3} \cdot T^4$$

ἤ $\boxed{\varrho(T) = a T^4}$ $\quad a \simeq 7.5657 \cdot 10^{-16} \frac{J}{m^3 K^4}$

(2)

$I = \sigma T^4$

ἐνέργεια που ἐκπέμπεται ἀνὰ μονάδα ἐπιφανείας κ ἀνὰ μονάδα χρόνου

$\frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}$

κοιλότητα μέλανος σώματος

θερμοκρασίας T

$\boxed{\Phi_\sigma = \frac{n}{4} \langle \upsilon \rangle}$ ἀπὸ κινητική θεωρία ἀερίων (δεδομένο)

ροή σωματιδίων

κρούσεων στὰ τοιχώματα ἀνὰ μονάδα ἐπιφανείας καὶ ἀνὰ μονάδα χρόνου

$$[\Phi_\sigma] = \frac{1}{m^3} \cdot \frac{m}{s} = \frac{1}{m^2 \cdot s}$$

ροή φωτονίων

$\boxed{\Phi_\gamma = \frac{n}{4} c}$

$\boxed{\langle h\nu \rangle = \frac{\varrho(T)}{n}}$ μέση ἐνέργεια φωτονίου

ἔνταση ἐξερχόμενης ΗΜ ἀκτινοβολίας $\boxed{I = \Phi_\gamma \langle h\nu \rangle}$

Ἄρα $I = \frac{n}{4} c \frac{\varrho(T)}{n} \Rightarrow \boxed{I = \frac{c}{4} \varrho(T)}$

$$I = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} T^4$$

ἤ $\boxed{I = \sigma T^4}$ $\quad \sigma \simeq 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

$\boxed{\text{ΝΟΜΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΣ Wien}}$

$$x = \frac{h\nu}{k_B T}$$

$$\boxed{\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1}} \quad \text{ν. Planck}$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho_0 \frac{3x^2(e^x-1) - x^3 e^x}{(e^x-1)^2} = \rho_0 x^2 \frac{3(e^x-1) - x e^x}{(e^x-1)^2}$$

αν ψάχνουμε ακρότατα, θα πρέπει $\frac{d\rho}{dx} = 0 \Rightarrow (\text{αφού } x \neq 0) \quad 3(e^x - 1) = x e^x$

φαίνεται ότι $x_0 \sim 3$

ακριβέστερα, αριθμητικά βρίσκουμε ή και με online grapher $x_0 = 2.821439$

$$\Rightarrow \frac{h\nu_0}{k_B T} \simeq 2.821439 \Rightarrow \nu_0 \simeq \left(58.789 \, \frac{GHz}{K}\right) T \quad \text{ή} \quad \frac{\nu_0}{T} \simeq 58.789 \, \frac{GHz}{K}$$

"νόμος μετατόπισεως", πού ν_0 συναρτήσει πού T

$$\boxed{\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x}} \quad \text{ν. Wien}$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho_0 \frac{3x^2 e^x - x^3 e^x}{e^{2x}} = \rho_0 x^2 \frac{3e^x - x e^x}{e^{2x}} = \rho_0 x^2 \frac{3 - x}{e^x}$$

αν ψάχνουμε ακρότατα, θα πρέπει $\frac{d\rho}{dx} = 0 \Rightarrow (\text{για } x \neq 0) \quad x_0 = 3$

$$\Rightarrow \frac{h\nu_0}{k_B T} = 3 \Rightarrow \nu_0 = 3 \frac{k_B}{h} T \quad \text{ή} \quad \frac{\nu_0}{T} \simeq 62.510 \, \frac{GHz}{K}$$

"νόμος μετατοπίσεως", πού ν_0 συναρτήσει πού T

ΑΣΚΗΣΗ Δείξτε πώς στο σημείο x_0 η $\frac{d^2\rho_w}{dx^2} < 0$, ώστε πράγματι να έχουμε μέγιστο. Χρησιμοποιήστε το ν. Wien $\rho_w = \rho_0 \frac{x^3}{e^x}$

$$\frac{d^2\rho_w}{dx^2} = \rho_0 \frac{(6x - 3x^2)e^x - (3x^2 - x^3)e^x}{e^{2x}} = \rho_0 \frac{6x - 3x^2 - 3x^2 + x^3}{e^x} = \rho_0 \frac{6x - 6x^2 + x^3}{e^x}$$

$$\frac{d^2\rho_w}{dx^2} = \rho_0 x \frac{x^2 - 6x + 6}{e^x} \quad \text{και με } x = x_0 = 3 \Rightarrow \frac{d^2\rho_w}{dx^2} = \rho_0 \cdot 3 \cdot \frac{9 - 18 + 6}{e^3} < 0$$

Νόμος τού Planck στη μορφή $\rho(\lambda,T)$

$$\int_0^\infty \rho(\lambda,T)\,d\lambda \overset{\text{προσοχή στον ορισμό}}{:=} \int_0^\infty \rho(\nu,T)\,d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}\,d\nu$$

$$[\rho(\lambda,T)d\lambda] = \frac{J}{m^3}$$

$$[\rho(\nu,T)d\nu] = \frac{J}{m^3}$$

$$\Downarrow$$

$$[\rho(\lambda,T)] = \frac{J}{m^3 \cdot m}$$

$$[\rho(\nu,T)] = \frac{J}{m^3\,Hz}$$

$$c=\lambda\nu \Rightarrow \nu=\frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda}=(-1)c\lambda^{-2}$$

$$\int_0^\infty \rho(\lambda,T)\,d\lambda := \frac{8\pi h}{\cancel{c^3}}\cancel{c^3}\, c\int_\infty^0 \frac{1}{\lambda^3}\,\frac{1}{e^{hc/\lambda k_BT}-1}\,\frac{(-1)}{\lambda^2}\,d\lambda$$

$$= 8\pi hc\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/\lambda k_BT}-1}\,d\lambda \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho(\lambda,T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda k_BT}-1\right)}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: τα $\rho(\nu,T)$, $\rho(\lambda,T)$ δεν έχουν ίδιες μονάδες μετρήσεως (δεν είναι ίδια μεγέθη)

Ορίζοντας $\psi := \dfrac{hc}{\lambda k_BT}$ και $\rho_0' := 8\pi\dfrac{(k_BT)^5}{(hc)^4}$

$$\boxed{\rho(\psi) = \rho_0'\,\frac{\psi^5}{e^\psi-1}} \quad \text{ν. Planck}$$

$$[\rho_0'] = \frac{J^5\,s^4}{(Js)^4\,m^4} = \frac{J}{m^4} = \frac{J}{m^3\cdot m}$$

αν ψάχνουμε ακρότατα, θα πρέπει $\dfrac{d\rho}{d\psi}=0$

$$\left.\frac{d\rho}{d\psi} = \rho_0'\,\frac{5\psi^4(e^\psi-1)-\psi^5e^\psi}{(e^\psi-1)^2}\right\} \Rightarrow \psi^4\left\{5(e^\psi-1)-\psi e^\psi\right\}=0$$

$$\Rightarrow (\text{για } \psi\neq 0) \quad 5(e^\psi-1)=\psi e^\psi$$

φαίνεται ότι $\psi_0 \sim 5$ ή και με online grapher

ακριβέστερα αριθμητικά βρίσκουμε $\psi_0 \simeq 4.965114$

$$\frac{hc}{\lambda_0 k_BT} \simeq 4.965114 \Rightarrow \lambda_0 T \simeq 2.897772\,10^{-3}\,mK$$

"νόμος μετατοπίσεως" του λ_0 συναρτήσει του T

$$\boxed{\rho_w(\psi) = \rho_0' \frac{\psi^5}{e^\psi}}$$

ν. Wien

$$\frac{d\rho_w}{d\psi} = \rho_0' \frac{5\psi^4 e^\psi - \psi^5 e^\psi}{e^{2\psi}} \rightarrow \rho_0' \psi^4 \frac{5-\psi}{e^\psi} = \rho_0' \frac{5\psi^4 - \psi^5}{e^\psi}$$

και $\frac{d\rho_w}{d\psi} = 0 \Rightarrow$ (για $\psi \neq 0$) $5e^\psi = \psi e^\psi \Rightarrow$

$$\psi_0 = 5$$

$$\frac{hc}{\lambda_0 k_B T} = 5 \Rightarrow \lambda_0 T = 2.877554 \text{ mK}$$

"νόμος μετατοπίσεως" του λ_0 συναρτήσει του T

Ο νόμος μετατοπίσεως του Wien παρήχθη από τον Wilhelm Wien το 1893 στη μορφή

$$\lambda_0 \cdot T = \text{σταθερά}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δείξτε πώς στο σημείο ψ_0 η $\frac{d^2\rho_w}{d\psi^2} < 0$, ώστε πράγματι να έχουμε μέγιστο

Χρησιμοποιήστε το ν. Wien $\rho_w = \rho_0' \frac{\psi^5}{e^\psi}$

$$\frac{d^2\rho_w}{d\psi^2} = \rho_0' \frac{(20\psi^3 - 5\psi^4)e^\psi - (5\psi^4 - \psi^5)e^\psi}{e^{2\psi}} = \rho_0' \frac{20\psi^3 - 10\psi^4 + \psi^5}{e^\psi}$$

$$\frac{d^2\rho_w}{d\psi^2} = \rho_0' \psi^3 \frac{20 - 10\psi + \psi^2}{e^\psi}$$ και για $\psi = \psi_0 = 5 \Rightarrow \frac{d^2\rho_w}{d\psi^2} = \rho_0' 5^3 \frac{20 - 50 + 25}{e^5} < 0$