ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ της αλληλεπιδράσεως ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ – ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΚΒΑΝΤΩΣΗ ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ

Στην ημικλασική προσέγγιση για το ΗΜ πεδίο χρησιμοποιούσαμε τη γλώσσα των ανυσματικών μεγεθών $\vec{E}, \vec{B}$.

(Υποθέσαμε το πλάτος του $\vec{E}$ (και του $\vec{B}$) σταθερό: η απορρόφηση ή η εκπομπή να μην επηρεάζει το πλάτος του πεδίου.

Για να ισχύει κάτι τέτοιο θα πρέπει η ΗΜ ακτινοβολία να είναι πυκνή.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τη γλώσσα του αριθμού των φωτονίων

Πρέπει να βρεθεί μια έκφραση της Χαμιλτονιανής του ΗΜ πεδίου που να επιτρέπει το μετασχηματισμό της στη γλώσσα του αριθμού των φωτονίων αντί της γλώσσας των $\vec{E}, \vec{B}$.

χρειαζόμαστε

- $\hat{H}_{HM}$
- $\hat{H}_{\Delta\Sigma}$
- $\hat{H}_{\Delta\Sigma-HM}$

ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΣΠΙΝΟΡΕΣ

Σπίνορας (spinor) Σπίνωρ = διάνυσμα στήλη

για ΔΣ έχει 2 συνιστώσες $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

για ΤΣ έχει 3 συνιστώσες $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

ορισμοί

$|\,|\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ απουσία ηλεκτρονίου στο ΔΣ, ενέργεια μηδενική

$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$ ηλεκτρόνιο στην κάτω στάθμη, ενέργεια E_1

$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \bullet \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle$ ηλεκτρόνιο στην άνω στάθμη, ενέργεια E_2

ερμιτιανός συζυγής or Hermitian conjugate
$A^\dagger$ conjugate transpose or Hermitian transpose
$(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji}$ † dagger στιλέτο

$E_2 - E_1 := \hbar\Omega$

$\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{S}_+^\dagger = \hat{S}_-$

$\hat{S}_+|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ καμία δράση $\hat{S}_+|0\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_+|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle$ Το ανέβασα $\hat{S}_+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$

$\hat{S}_+|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ Το πετά έξω $\hat{S}_+|\uparrow\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_-|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ καμία δράση $\hat{S}_-|0\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_-|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ Το πετά έξω $\hat{S}_-|1\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_-|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$ Το κατέβασα $\hat{S}_-|2\rangle = |1\rangle$

$\hat{S}_+$ τελεστής αναβιβάσεως, raising operator

$\hat{S}_-$ τελεστής καταβιβάσεως, lowering operator

πίνακες Pauli και σχέσεις τους με τους $\hat{S}_+, \hat{S}_-$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z$ καθώς και οι κυκλικές εναλλαγές των

π.χ. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

$$\{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y\} = \{\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\} = \{\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{0}$$

Δηλαδή οι πίνακες Pauli αντιμετατίθενται.

π.χ. $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = \hat{0} \Rightarrow \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y = -\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x$

$\hat{\sigma}_y \cdot \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \cdot \hat{\sigma}_y = \hat{0} \Rightarrow \hat{\sigma}_y \cdot \hat{\sigma}_z = -\hat{\sigma}_z \cdot \hat{\sigma}_y$

$\hat{\sigma}_z \cdot \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_x \cdot \hat{\sigma}_z = \hat{0} \Rightarrow \hat{\sigma}_z \cdot \hat{\sigma}_x = -\hat{\sigma}_x \cdot \hat{\sigma}_z$

π.χ $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

$$\hat{S}_+\hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_-\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I} \quad \text{ή} \quad \boxed{\{\hat{S}_+, \hat{S}_-\} = \hat{I}}$$

$$\hat{S}_+\hat{S}_- - \hat{S}_-\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_z \quad \text{ή} \quad [\hat{S}_+, \hat{S}_-] = \hat{\sigma}_z$$

$$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x$$

$$\hat{S}_+ - \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\hat{\sigma}_y$$

$$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{S}_+\hat{S}_- &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{S}_-\hat{S}_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

... μόλις τα είπαμε...

$$\hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbb{I}}$$

Μπορούμε να το γράψουμε και στη μορφή $\{\hat{S}_+, \hat{S}_-\} = \hat{\mathbb{I}}$

$\{A, B\} = AB + BA$ άγκιστρο Poisson ή αντιμεταθέτης
anticommutator

$[A, B] = AB - BA$ μεταθέτης commutator

όταν $\{A, B\} = 0 \Rightarrow AB + BA = 0 \Rightarrow AB = -BA$
αντιμεταθετική ιδιότητα
anticommutative property

όταν $[A, B] = 0 \Rightarrow AB - BA = 0 \Rightarrow AB = BA$
μεταθετική ιδιότητα
commutative property

Οι τελεστές καταστροφής-δημιουργίας / καταβιβάσεως-αναβιβάσεως

σχέσεις αντιμεταθέσεως ακολουθούν των φερμιονίων π.χ. τα ηλεκτρόνια
anticommutative relations fermions electrons

σχέσεις μεταθέσεως ακολουθούν των μποζονίων π.χ. τα φωτόνια
commutative relations bosons photons

Ἡ Χαμιλτονιανή τοῦ ΔΣ εἶναι

$$\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+} = E_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}$$

ἀφοῦ

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = E_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ἰδιοάνυσμα ἰδιοτιμή ἰδιοάνυσμα

$E_2 = E_1 + \hbar\Omega$

E_1

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 \end{pmatrix} = E_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ἰδιοάνυσμα ἰδιοτιμή ἰδιοάνυσμα

$$\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+}$$

Ἄν θέσουμε $E_1 = 0 \Rightarrow E_2 = \hbar\Omega$ γίνεται

$E_2 = \hbar\Omega$

E_1 μηδέν

$$\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_-}$$

Ἄν θέσουμε E_2 μηδέν E_1 $\quad E_2 = +\frac{\hbar\Omega}{2} \quad E_1 = -\frac{\hbar\Omega}{2}$

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{S}_+ \hat{S}_- - \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{S}_- \hat{S}_+ = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{\sigma}_z}$ ἡ μορφή τοῦ $\hat{H}_{\Delta\Sigma}$ στο ἄρθρο τῶν Jaynes – Cummings

Ὁ τελεστής $\hat{S}_+\hat{S}_-$ μετρᾶ τον ἀριθμό τῶν ἠλεκτρονίων στην ΑΝΩ ΣΤΑΘΜΗ

ἀφοῦ

$$\hat{S}_+\hat{S}_-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad \hat{S}_+\hat{S}_-|\uparrow\rangle=1|\uparrow\rangle$$

$$\hat{S}_+\hat{S}_-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\qquad \hat{S}_+\hat{S}_-|\downarrow\rangle=0|\downarrow\rangle$$

Ὁ τελεστής $\hat{S}_-\hat{S}_+$ μετρᾶ τον ἀριθμό τῶν ἠλεκτρονίων στην ΚΑΤΩ ΣΤΑΘΜΗ

ἀφοῦ

$$\hat{S}_-\hat{S}_+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad \hat{S}_-\hat{S}_+|\uparrow\rangle=0|\uparrow\rangle$$

$$\hat{S}_-\hat{S}_+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\qquad \hat{S}_-\hat{S}_+|\downarrow\rangle=1|\downarrow\rangle$$

<u>ΑΛΛΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>

$$\left(\hat{S}_+\right)^\dagger=\hat{S}_-$$

$$\{\hat{S}_+,\hat{S}_+^\dagger\}=\{\hat{S}_+,\hat{S}_-\}=\hat{S}_+\hat{S}_-+\hat{S}_-\hat{S}_+=\hat{\mathbb{I}}$$

$$\{\hat{S}_-,\hat{S}_-^\dagger\}=\{\hat{S}_-,\hat{S}_+\}=\hat{S}_-\hat{S}_++\hat{S}_+\hat{S}_-=\hat{\mathbb{I}}$$

$$\{\hat{S}_+,\hat{S}_+\}=\hat{S}_+\hat{S}_++\hat{S}_+\hat{S}_+=2\hat{S}_+\hat{S}_+=2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}:=\hat{O}$$

$$\{\hat{S}_-,\hat{S}_-\}=\hat{S}_-\hat{S}_-+\hat{S}_-\hat{S}_-=2\hat{S}_-\hat{S}_-$$

$$=2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$=\hat{O}$$

Ὁ $\hat{S}_+$ εἶναι τελεστὴς ἀναβιβάσεως (raising operator)
διότι ἀναβιβάζει τὴν ἐνέργεια
δημιουργώντας ἠλεκτρόνια ἐνέργειας $\hbar\Omega$
ἐξ οὗ καὶ ἡ ὀνομασία
τελεστὴς δημιουργίας (creation operator).

Ὁ $\hat{S}_-$ εἶναι τελεστὴς καταβιβάσεως (lowering operator)
διότι καταβιβάζει τὴν ἐνέργεια
καταστρέφοντας ἠλεκτρόνια με ἐνέργεια $\hbar\Omega$
ἐξ οὗ καὶ ἡ ὀνομασία
τελεστὴς καταστροφῆς (annihilation operator)

Ἐπειδὴ τα ἠλεκτρόνια εἶναι φερμιόνια,
ἰσχύει ἡ ἀπαγορευτικὴ ἀρχὴ τοῦ Pauli
δηλ μπορούμε να ἔχουμε μόνο ἕνα ἠλεκτρόνιο με ἐνέργεια $\hbar\Omega$
(ἀγνοοῦμε το spin σε ὅλο αὐτό το μάθημα)

ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΣΕΩΣ ΦΕΡΜΙΟΝΙΩΝ π.χ. ηλεκτρονίων

$\hat{a}_i$ τελεστής καταστροφής φερμιονίου στην κατάσταση i

$\hat{a}_i^{\dagger}$ τελεστής δημιουργίας φερμιονίου στην κατάσταση i

Για τα φερμιόνια ισχύουν οι σχέσεις αντιμετάθεσης

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^{\dagger}\} = \delta_{ij}$$

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = 0$$

$$\{\hat{a}_i^{\dagger}, \hat{a}_j^{\dagger}\} = 0$$

$$\{\hat{a}_i^{\dagger}, \hat{a}_j^{\dagger}\} = 0 \Rightarrow \{\hat{a}_r^{\dagger}, \hat{a}_r^{\dagger}\} = 0 \Rightarrow 2\,\hat{a}_r^{\dagger}\hat{a}_r^{\dagger} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\hat{a}_r^{\dagger}\hat{a}_r^{\dagger} = 0}}$$

το οποίο σημαίνει ότι δεν μπορούμε να βάλουμε δύο φερμιόνια στην ίδια κατάσταση, το οποίο είναι η απαγορευτική αρχή Pauli.

συχνά καλείται τελεστής δημιουργίας στη Κβαντική Μηχανική
creation operator

Τελεστής αναβιβάσεως
raising operator

lowering operator
Τελεστής καταβιβάσεως

ladder operators
Τελεστές κλίμακας

γραμμική άλγεβρα
linear algebra

συχνά καλείται τελεστής καταστροφής στη Κβαντική Μηχανική
annihilation operator

Σε πολλές περιοχές της Φυσικής & της Χημείας, η χρήση αυτών των τελεστών αντί κυματοσυναρτήσεων λέγεται δεύτερη κβάντωση second quantization

ΔΣ

στοιχειώδεις διεγέρσεις από τη θεμελιώδη κατάσταση

elementary excitations from ground state

$|x\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ πάνω ↓ κάτω

αριστερά → δεξιά $\langle x| = (\alpha^* \ \ \beta^*)$

$|\downarrow\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \langle\downarrow| = \langle 1| = (0 \ \ 1)$

$\langle\downarrow|\downarrow\rangle = (0 \ \ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

$|\uparrow\rangle = |2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \langle\uparrow| = \langle 2| = (1 \ \ 0)$

$\langle\uparrow|\uparrow\rangle = (1 \ \ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

μετά

$$\hat{a}_{12}^{+} := |\uparrow\rangle\langle\downarrow| = |2\rangle\langle 1| = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{2\times 1}\underbrace{(0 \ \ 1)}_{1\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}_+$$

πρώτα

$$\hat{a}_{12} := |\downarrow\rangle\langle\uparrow| = |1\rangle\langle 2| = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{2\times 1}\underbrace{(1 \ \ 0)}_{1\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}_-$$

Άρα η Χαμιλτονιανή $\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_-$ γράφεται

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\,\hat{a}_{12}^{+}\hat{a}_{12} = \hbar\Omega\,|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle\langle\uparrow| = \hbar\Omega\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

$$= \hbar\Omega\,|2\rangle\langle 1|1\rangle\langle 2| = \hbar\Omega\,|2\rangle\langle 2|$$

$$= \hbar\Omega\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(0 \ \ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(1 \ \ 0) = \hbar\Omega\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα έχουμε τις εναλλακτικές γραφές $\qquad = \hbar\Omega\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- = \hbar\Omega\,\hat{a}_{12}^{+}\hat{a}_{12} = \hbar\Omega\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| = \hbar\Omega\,|2\rangle\langle 2|$$

$$= \hbar\Omega\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1 \ \ 0) = \hbar\Omega\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar\Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Γενικώς: $\boxed{\hat{a}_{\mu\nu} := |\mu\rangle\langle\nu| \iff \hat{a}_{\mu\nu}^{+} = |\nu\rangle\langle\mu|}$

$$\hat{a}_{12}^{+}|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\uparrow\rangle = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}\underset{1\times 2}{\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}}\underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$$

εναλλακτικώς $= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$

$$\hat{a}_{12}^{+}|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$$

εναλλακτικώς $= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$

$$\hat{a}_{12}^{+}|0\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$$

εναλλακτικώς $= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$

$$\hat{a}_{12}|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \ldots = |\downarrow\rangle$$

$$\hat{a}_{12}|\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\downarrow\rangle = \ldots = |0\rangle$$

$$\hat{a}_{12}|0\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|0\rangle = \ldots = |0\rangle$$

Παρομοίως θα γράφαμε

$$\hat{a}_{21} := |2\rangle\langle 1| = \hat{a}_{12}^{+}$$

$$\hat{a}_{21}^{+} := |1\rangle\langle 2| = \hat{a}_{12}$$

ΤΣ

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \longrightarrow \langle x| = (\alpha^* \ \beta^* \ \gamma^*)$$

Γενικώς:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{a}_{\mu\nu} &= |\mu\rangle\langle\nu| \\ \hat{a}^{+}_{\mu\nu} &= |\nu\rangle\langle\mu| \end{aligned}}$$

$$\hat{a}^{+}_{12} := |2\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12} := |1\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{13} := |3\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13} := |1\rangle\langle 3| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{12}|1\rangle = |2\rangle\langle 1|1\rangle = |2\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12}|2\rangle = |1\rangle\langle 2|2\rangle = |1\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{13}|1\rangle = |3\rangle\langle 1|1\rangle = |3\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13}|3\rangle = |1\rangle\langle 3|3\rangle = |1\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{13}|3\rangle = |3\rangle\langle 1|3\rangle = |0\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12}^{\dagger}|3\rangle = |2\rangle\langle 1|3\rangle = |2\rangle \cdot 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12}|3\rangle = |1\rangle\langle 2|3\rangle = |1\rangle 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13}^{\dagger}|2\rangle = |3\rangle\langle 1|2\rangle = |3\rangle 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13}|2\rangle = |1\rangle\langle 3|2\rangle = |1\rangle 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}_{TI} = \hbar\Omega_{12}\,\hat{a}^{+}_{12}\hat{a}_{12} + \hbar\Omega_{13}\,\hat{a}^{+}_{13}\hat{a}_{13}$$

$$= \hbar\Omega_{12}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} + \hbar\Omega_{13}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$= \hbar\Omega_{12}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \hbar\Omega_{13}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\hbar\Omega_{13}&0&0\\0&\hbar\Omega_{12}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\hat{H}_{TI} = \hbar\Omega_{12}|2\rangle\langle 1|1\rangle\langle 2| + \hbar\Omega_{13}|3\rangle\langle 1|1\rangle\langle 3|$$

$$= \hbar\Omega_{12}|2\rangle\langle 2| + \hbar\Omega_{13}|3\rangle\langle 3|$$

$$\hat{a}_{23} = |2\rangle\langle 3| = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}(1\;0\;0) = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{a}_{23}|3\rangle = |2\rangle$$

$$\hat{a}^{+}_{23} = |3\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(0\;1\;0) = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{a}^{+}_{23}|2\rangle = |3\rangle$$

$$\hat{a}_{21} = |2\rangle\langle 1| = \hat{a}^{+}_{12} \qquad \hat{a}_{31} = |3\rangle\langle 1| = \hat{a}^{+}_{13}$$

$$\hat{a}^{+}_{21} = |1\rangle\langle 2| = \hat{a}_{12} \qquad \hat{a}^{+}_{31} = |1\rangle\langle 3| = \hat{a}_{13}$$

$$\hat{a}_{32} = |3\rangle\langle 2| = \hat{a}^{+}_{23}$$

$$\hat{a}^{+}_{32} = |2\rangle\langle 3| = \hat{a}_{23}$$