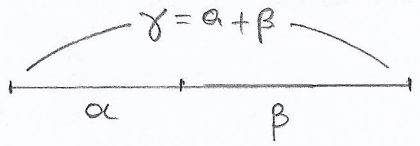


γεωμετρικός μέσος β με άλλη διατύπωση

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \iff \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \frac{\mu+M}{M} = \frac{M}{\mu}$$

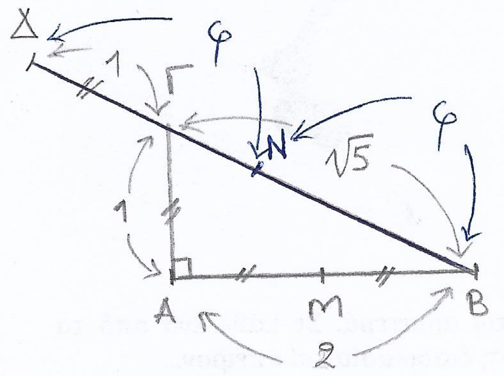
$$\iff \beta^2 - \alpha\beta - \alpha^2 = 0 \iff \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - 1 = 0 \iff$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(-1) = 5$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \begin{array}{l} \nearrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} := \varphi \text{ χρυσή τομή} \\ \searrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ μη δεκτή} \end{array}$$

γεωμετρική κατασκευή της φ



ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ (a_n)

$a_{n+1} - a_n = \omega$ $\quad n = (0), 1, 2, 3, \dots$ $\quad \omega$ διαφορά

$a_n = a_1 + (n-1)\omega$ $\quad$ αναδρομικός τύπος

$\beta = \dfrac{a+\gamma}{2}$ $\quad$ β αριθμητικός μέσος

$S_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $\quad$ άθροισμα n πρώτων όρων

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ (a_n)

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \neq 0$ $\quad n = (0), 1, 2, 3, \dots$ $\quad \lambda$ λόγος

$a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}$ $\quad$ αναδρομικός τύπος

$\dfrac{a}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \beta^2 = a\gamma$ $\quad$ β γεωμετρικός μέσος

$$S_n = \begin{cases} a_1 \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}, & \lambda \neq 1 \\ a_1 n, & \lambda = 1 \end{cases}$$

άθροισμα n πρώτων όρων

$S_\infty = \dfrac{a_1}{1-\lambda}$ $\quad$ άθροισμα απείρων όρων $(|\lambda| < 1)$

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΤΡΟΠΩΝ ΗΜ πεδίου (dN) ανά στοιχειώδες διάστημα συχνότητας (dν)

A

αποδεικνύεται $g(\nu) := \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$ $\qquad [g(\nu)] = \frac{1}{Hz} = s$

V ο όγκος της κοιλότητας ή
του 3Δ κουτιού περιοδικότητας με ακμές έστωσαν $a_x, a_y, a_z \Rightarrow V = a_x a_y a_z$

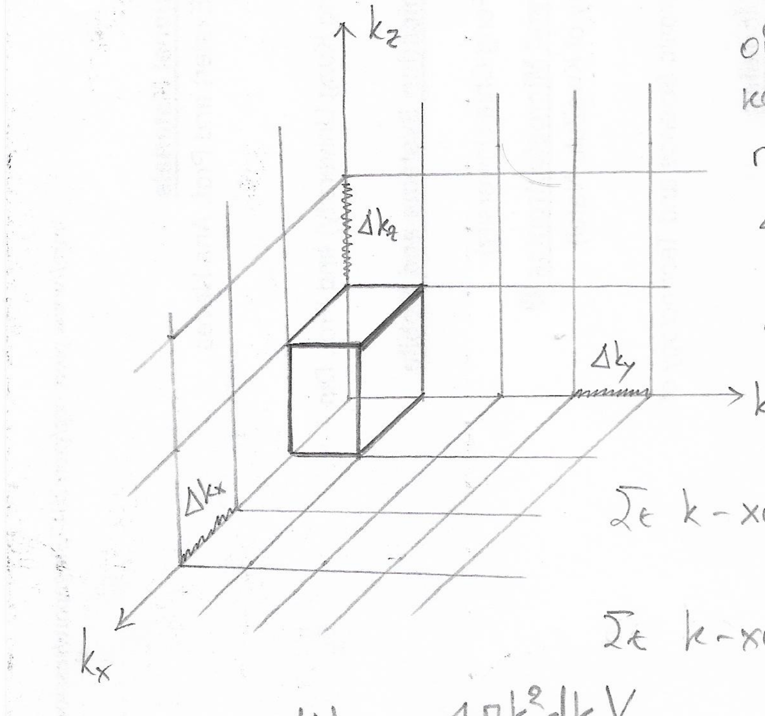
Θα κάνουμε την απόδειξη για περιοδικές συνοριακές συνθήκες.
Στο βιβλίο ∃ και η απόδειξη για ορθογώνια κοιλότητα.

έστω
$$\left.\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi)} \\ \vec{E}(\vec{0},t) &= \vec{E}_0\, e^{i(-\omega t+\varphi)} \\ \vec{E}((a_x,0,0),t) &= \vec{E}_0\, e^{i(k_x a_x-\omega t+\varphi)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow e^{ik_x a_x} = 1 \Rightarrow k_x a_x = 2\pi n_x,\ n_x \in \mathbb{Z}$$

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{a_x},\ n_x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{βήμα στο } k_x \quad \Delta k_x = \frac{2\pi}{a_x}$$

ομοίως
$$k_y = \frac{2\pi n_y}{a_y},\ n_y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{βήμα στο } k_y \quad \Delta k_y = \frac{2\pi}{a_y}$$

»
$$k_z = \frac{2\pi n_z}{a_z},\ n_z \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{βήμα στο } k_z \quad \Delta k_z = \frac{2\pi}{a_z}$$



οι επιτρεπόμενες k καταστάσεις είναι στις κορυφές των μικρών ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων με ακμούλες

$$\Delta k_x = \frac{2\pi}{a_x} \quad \Delta k_y = \frac{2\pi}{a_y} \quad \Delta k_z = \frac{2\pi}{a_z}$$

Αυτές οι κορυφές, όμως, διαμοιράζονται εξ ίσου σε 8 όμοια ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Άρα

Σε k-χώρο $\frac{(2\pi)^3}{a_x a_y a_z} = \frac{(2\pi)^3}{V}$ ∃ 1 k-κατάσταση

Σε k-χώρο $4\pi k^2 dk$ ∃ dN_k k-καταστάσεις

δηλαδή από $k \to k+dk$
(σφαιρικός φλοιός)

$$\Rightarrow dN_k = \frac{4\pi k^2 dk\, V}{8\pi^3}$$

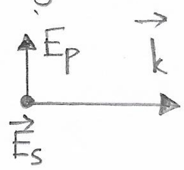
B

$$dN_k = \frac{4\pi k^2 dk\, V}{8\pi^3}$$

$$c = \lambda\nu, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{k}\nu \Rightarrow k = \frac{2\pi}{c}\nu \Rightarrow dk = \frac{2\pi}{c}d\nu \Bigg\} \Rightarrow$$

$$dN_\nu = \frac{4\pi}{\cancel{8\pi^3}}\,\frac{\cancel{4\pi^2}}{c^2}\nu^2\,\frac{\cancel{2\pi}}{c}d\nu\, V \Rightarrow dN_\nu = \frac{4\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu \Bigg\} \Rightarrow$$

Αλλά, $\exists$ 2 πιθανές πολώσεις του ηλεκτρικού πεδίου κάθετες στο $\vec{k}$



ο αριθμός των επιτρεπόμενων κανονικών τρόπων είναι $\quad dN = \frac{8\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu \Rightarrow$

$$g(\nu) := \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi V}{c^3}\nu^2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ του κλασικού νόμου Rayleigh-Jeans από το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας και το $g(\nu) := \frac{dN}{d\nu}$

$g(\nu) := \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3} \qquad [g(\nu)] = \frac{1}{Hz} = s \qquad$ κανονικοί τρόποι ανά συχνότητα

$\frac{g(\nu)}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \qquad \left[\frac{g(\nu)}{V}\right] = \frac{1}{m^3\,Hz} = \frac{s}{m^3} \qquad$ κανονικοί τρόποι ανά συχνότητα, ανά όγκο

$\rho(\nu,T) = \frac{g(\nu)}{V}\cdot\underbrace{\bar{E}}_{\text{μέση ενέργεια κάθε κανονικού τρόπου}} \qquad [\rho(\nu,T)] = \frac{J}{m^3\,Hz} = \frac{J\,s}{m^3} \qquad$ ενέργεια ανά συχνότητα, ανά όγκο

Άρα το ερώτημα είναι πόση είναι η μέση ενέργεια $\bar{E}$ κάθε κανονικού τρόπου.

Στην κλασική φυσική, αυτό το περιγράφει το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας (equipartition theorem): σε θερμική ισορροπία αποδίδουμε μέση ενέργεια $\frac{1}{2}k_B T$ σε κάθε βαθμό ελευθερίας του δομικού λίθου.

π.χ δομικός λίθος με M βαθμούς ελευθερίας έχει $\bar{E} = \frac{M}{2} k_B T$

και σύστημα N τέτοιων δομικών λίθων έχει ενέργεια $\frac{MN}{2} k_B T$

3Δ ιδανικό αέριο $M=3$ (κίνηση x, y, z) $\Rightarrow \bar{E} = \bar{E}_{KIN} = \frac{3}{2} k_B T$

1Δ ιδανικό αέριο $M=1$ (κίνηση x) $\Rightarrow \bar{E} = \bar{E}_{KIN} = \frac{1}{2} k_B T$

1Δ ΑΑΤ $M=2$ (κίνηση x, ταλάντωση) $\Rightarrow \bar{E}_{KIN} = \frac{1}{2} k_B T = \bar{E}_{ΔΥΝ}$

$\Rightarrow \bar{E} = k_B T$

Αν λοιπόν έχουμε μια συλλογή τέτοιων ΑΑΤ με $\bar{E} = k_B T \Rightarrow$

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot k_B T$$

νόμος Rayleigh–Jeans

($\nu \to \infty \Rightarrow \rho(\nu, T) \to \infty$ "υπεριώδης καταστροφή")

Αν δεν είχαμε $M=2$ βαθμούς ελευθερίας, αλλά άλλο αριθμό M, τότε θα καταλήγαμε στη σχέση

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{M}{2} k_B T$$

γενικότερος κλασικός νόμος, ο οποίος παρουσιάζει το ίδιο πρόβλημα...

Το πρόβλημα έγκειται στο ότι με το θεώρημα ισοκατανομής ενέργειας η μέση ενέργεια κάθε κανονικού τρόπου $\bar{E} = \bar{E}(T)$, δηλαδή εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία T.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΝΟΜΟΥ PLANCK (~ όπως την έκανε ο Planck) 1900 ①

πρόβλημα ακτινοβολίας μέλανος σώματος Του λάχιστον από το 1859 Kirchhoff

ο Planck ασχολήθηκε με αυτό > 1894
η απόδειξη που παραθέτουμε εδώ έγινε το 1900

πειραματικό ταίριασμα σε υψηλές συχνότητες Wien 1896

νόμος Rayleigh-Jeans 1900 (συμπίπτει με πείραμα μόνο σε πολύ χαμηλές συχνότητες)

ο Planck χρησιμοποίησε

ΥΠΟΘΕΣΗ στατιστική κατανομή Boltzmann

ΥΠΟΘΕΣΗ η ΗΜ ενέργεια μπορεί να είναι μόνο διακριτό ("κβαντισμένο") πολλαπλάσιο της ποσότητας $h\nu$, όπου h είναι αυτό που λέμε σήμερα σταθερά του Planck και ν η συχνότητα

για τις υποθέσεις αυτές δεν ήταν και πολύ χαρούμενος...

1905 Einstein
εξήγησε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο
υποθέτοντας ότι υπάρχουν αυτά τα «κβάντα» φωτός

1926 πρωτογράφτηκε η λέξη «φωτόνιο» Gilbert Newton Lewis

ο Planck εισήγαγε την έννοια resonator (αντηχείο, ταλαντωτής)

ο οποίος έχει διακεκριμένες, δηλαδή όχι συνεχείς αλλά εξαρτώμενες από ένα φυσικό αριθμό n, «κβαντισμένες», επιτρεπόμενες τιμές ενέργειας E_n για δεδομένη συχνότητα

$$E_n = nh\nu \quad , n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

υπέθεσε ότι η μέση ενέργεια κάθε κανονικού τρόπου $\overline{E}$
σε δεδομένη συχνότητα ν και θερμοκρασία T
είναι στην πραγματικότητα μια μέση τιμή $\overline{E(\nu,T)}$
των ενεργειών ενός μεγάλου αριθμού resonators
που ο κάθε ένας βρίσκεται σε διαφορετική στάθμη E_n
ενώ η πιθανότητα καταλήψεως της στάθμης P_n δίνεται από τη στατιστική Boltzmann

ενώ λοιπόν κλασικά είχαμε $\overline{E(T)} = M \cdot \frac{1}{2} k_B T$

Τώρα έχουμε $\overline{E(\nu,T)} = \sum_n E_n P_n$

$\beta := \frac{1}{k_B T}$ $\quad P_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}$, $\quad Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$

πιθανότητα καταλήψεως της στάθμης n

συνάρτηση επιμερισμού (partition function)

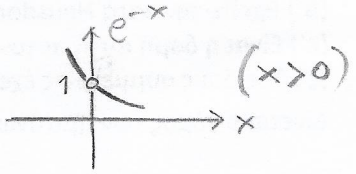
$x := \frac{h\nu}{k_B T} = \beta h\nu > 0$

$$* \quad \overline{E(\nu,T)} = \sum_n n h\nu \frac{e^{-\beta n h\nu}}{Z} = \frac{x}{Z\beta} \overset{A}{\sum_n n e^{-nx}}$$

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_n e^{-\beta n h\nu} = \sum_n e^{-nx}$$

$a_n = e^{-nx}$ π.χ. $a_0 = 1$, $a_1 = e^{-x}$, $a_2 = e^{-2x}$

$a_{n+1} = e^{-(n+1)x}$ $\quad \lambda = \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-x} < 1$



λόγος γεωμετρικής προόδου

οπότε η συνάρτηση επιμερισμού είναι το άθροισμα ∞ όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $a_0 = 1$ και λόγο $\lambda = \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-x} < 1$ $\quad S_\infty = \frac{\text{πρ. όρος}}{1-\lambda}$

$$Z = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

$$Z = \sum_n e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -\underbrace{\sum_n n e^{-nx}}_{A} = \frac{-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} \Rightarrow A = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$

Επομένως $\ast$ $$\overline{E(\nu,T)} = \frac{x\,\cancel{(1-e^{-x})}}{\beta}\,\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{x}{\beta}\,\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{\beta}\,\frac{1}{e^{x}-1}$$

$$\overline{E(\nu,T)} = \frac{h\nu\,\cancel{k_B T}}{\cancel{k_B T}}\,\frac{1}{e^{h\nu/k_B T}-1}$$

$$\boxed{\overline{E(\nu,T)} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T}-1}}$$

$$g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3} \qquad [g(\nu)] = \frac{1}{Hz} = s$$

$$\frac{g(\nu)}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \qquad \left[\frac{g(\nu)}{V}\right] = \frac{1}{m^3\cdot Hz} = \frac{s}{m^3}$$

$$\rho(\nu,T) = \frac{g(\nu)}{V}\cdot\overline{E(\nu,T)} \qquad [\rho(\nu,T)] = \frac{J}{m^3\,Hz} = \frac{Js}{m^3}$$

$$\rho(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot\frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T}-1} \Rightarrow \rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T}-1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8 Για θερμοκρασία (α') 300K (β') 6000K, (γ') 6K

Υπολογίστε το μήκος κυματος λ_Δ όποιο η πρόβλεψη του νόμου Rayleigh-Jeans ρ_{RJ} είναι διπλάσια από την πειραματική τιμή ρ την όποία εξηγεί ο νόμος Planck.

ΛΥΣΗ

Θέλουμε $\rho_{RJ} = 2\rho \Rightarrow \rho_0 x^2 = 2\rho_0 \dfrac{x^3}{e^x - 1} \Rightarrow e^x - 1 = 2x \Rightarrow$

$$\boxed{e^x = 1 + 2x}$$

γραφικά, ρίζα $x_\Delta \simeq 1.25645 \simeq \frac{5}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{h\nu}{k_B T} \\ c = \lambda\nu \end{array}\right\} \lambda = \frac{hc}{k_B T x} \Rightarrow \lambda_\Delta = \frac{hc}{k_B T x_\Delta}$$

$$\frac{hc}{k_B} \simeq 14.404 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Km}$$

(α') $T = 300K \Rightarrow \ldots \Rightarrow \lambda_\Delta \simeq 38.2\ \mu m$ (FIR $25\mu m < \lambda < 1000\mu m$)

(MIR $2.5\mu m < \lambda < 25\mu m$)

(β') $T = 6000K \Rightarrow \ldots \Rightarrow \lambda_\Delta \simeq 1.91\ \mu m$ (NIR $0.8 < \lambda < 2.5\mu m$)

(γ') $T = 6K \Rightarrow \ldots \Rightarrow \lambda_\Delta \simeq 1.91\ mm$ ~ μικροκύματα

ISO 20473 NIR $0.78\mu m < \lambda < 3\mu m$

MIR $3\mu m < \lambda < 50\mu m$

FIR $50\mu m < \lambda < 1000\mu m$

ΑΣΚΗΣΗ Πότε $\rho_{RJ} = \rho$;

$$\rho_{RJ} = \rho \Rightarrow \rho_0 x^2 = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \Rightarrow x = e^x - 1 \Rightarrow e^x = 1 + x \Rightarrow x = 0$$

ΑΤΟΠΟ

πρέπει $x \neq 0$

Άρα ποτέ $\rho_{RJ} = \rho$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> $T = ;$: $\rho_{RJ} = 2\rho$ σε $\lambda = 400\,nm$
(στα όρια του υπεριώδους)

$$\rho_{RJ} = 2\rho \Rightarrow \rho_0 x^2 = 2\rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \Rightarrow e^x - 1 = 2x \Rightarrow e^x = 1 + 2x$$

$x \neq 0$ γραφικά, ρίζα $x_* = 1.25645 \simeq \frac{5}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{h\nu}{k_B T} \\ c = \lambda\nu \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{k_B T x} \qquad \frac{hc}{k_B} \simeq 14.404 \cdot 10^{-3}\,K \cdot m \simeq 14.4 \cdot 10^{-3}\,K \cdot m$$

$$T = \frac{hc}{k_B \lambda x}$$

$$T = \frac{14.4\ 10^{-3}\,K \cdot m\ 4}{4 \cdot 10^2 \cdot 10^{-9}\,m\ 5} = 2.88\,\frac{10^{-3}}{10^{-7}}\,K \Rightarrow T \simeq 28800\,K$$

μόνο μερικοί αστέρες
πολύ μεγάλης μάζας
π.χ. $30\,M_{ΗΛΙΟΥ}$

όποτε το "UV catastrophe"
"υπεριώδης καταστροφή"
είναι μία λανθασμένη ονομασία...