

2. ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΜΕ ΥΛΗ

2.1 Προκαταρκτικά



Θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε ιδιαιτερότητες των ηλεκτρικών φορτίων έναντι των βαρυτικών μαζών. Τα φορτία, σε αντίθεση προς τις μάζες δεν αρέσκονται να φορτώνονται κινητική ενέργεια. Βάλτε μια δύναμη, σταθερή, για ευκολία, να σπρώχνει ένα σωματίδιο με μόνο μάζα, σχ. 2.1. Θα δείτε το έργο που κάνει η δύναμη να γίνεται κινητική ενέργεια. Κάντε, τώρα, το ίδιο με σωματίδιο που φέρει φορτίο, σχ. 2.2. Θα δείτε, τώρα, ότι το σωματίδιο αποκτά μικρότερη κινητική ενέργεια από αυτή που αντιστοιχεί σε δεδομένο χρόνο, διότι το επιταχυνόμενο σωματίδιο εκπέμπει καθ' οδόν H/M ενέργεια, τόση όση είναι η διαφορά αυτής που θα είχε χωρίς φορτίο πλην αυτή που του απέμεινε. Οπωσδήποτε το φορτίο ενεργεί κατά τρόπο που να διατηρείται η ενέργεια. Για να δούμε τι γίνεται και με την ορμή; Εκ πρώτης όψεως, ο νόμος που καθορίζει τη δύναμη

$$\frac{dP}{dt} = F \quad (2.1)$$

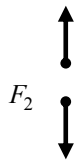
φαίνεται να παραβιάζεται μια και μας δίνει ορμή για τη στιγμή t , $\underline{p}_o + \underline{F}t$, η οποία αντιστοιχεί σε κινητική ενέργεια, $(\underline{p}_o + \underline{F}t)^2/2m$, μεγαλύτερη από αυτή που στη πράξη βλέπουμε λόγω των εκπομπών. Ο νόμος είναι εν τάξει, απλώς εμείς δεν τον εφαρμόσαμε στο όλο σύστημα φορτίου-ακτινοβολίας προς την οποία ακτινοβολία μαζί με τη ροή ενέργειας εκρέει και ορμή με ρυθμό $d\underline{p}_{εκ}/dt$. Έτσι, γράφουμε

$$\frac{d}{dt}(\underline{p} + \underline{p}_{\varepsilon\kappa}) = \underline{F} \quad (2.2)$$

και είμαστε εν τάξει. Αν μετασχηματίσετε την (2.2) κρατώντας στο αριστερό μέλος της μόνο τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σωματιδίου, $d\underline{p}/dt$, τότε στο δεξιό μέλος θα εμφανιστεί το $-d\underline{p}_{\varepsilon\kappa}/dt$ ως δύναμη. Η δύναμη αυτή ασκείται από την ακτινοβολία στο σωματίδιο μας ως η αντίδραση της δυνάμεως $d\underline{p}_{\varepsilon\kappa}/dt$ μέσω της οποίας το φορτίο μεταφέρει ενέργεια στην ακτινοβολία.

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = -\frac{d\underline{p}_{\varepsilon\kappa}}{dt} + \underline{F} \quad (2.3)$$

Τέλος, υπό ορισμένες συνθήκες είναι ενδεχόμενο να έχουμε ροή ενέργειας από την ακτινοβολία προς το φορτίο με αντίθετους ρυθμούς ροής ορμής.



Σχήμα 2-1 Δύο εσωτερικές ίσες και αντίθετες δυνάμεις

Η ιστορία μας δεν διαφέρει και πολύ από αυτή όπου θα είχαμε, με μια μπάλα η οποία υπό την επίδραση της βαρύτητας πέφτει στο κενό. Σε ορισμένο χρόνο θα αποκτήσει δεδομένη ταχύτητα, χωρίς απώλειες. Αποκτά όλη την κινητική ενέργεια που πήρε ως έργο από την δύναμη της βαρύτητας. Φανταστείτε τώρα την μπάλα να πέφτει υπό την επίδραση της βαρύτητας στον αέρα. Το τι γίνεται τώρα είναι κάτι ανάλογο με την κίνηση φορτίου. Εκρέει κινητική ενέργεια από την μπάλα προς τον περιβάλλοντα αέρα με ταυτόχρονη εκροή ορμής με ένα ρυθμό $d\bar{p}_{\varepsilon\kappa}/dt$, ο οποίος πρέπει να ληφθεί υπόψη στην εξίσωση που διέπει τον ρυθμό μεταβολής της ορμής της

μπάλας. Έχουμε, λοιπόν ως εξίσωση που διέπει την κίνηση της μπάλας στον αέρα τη (2.2). Η έκφραση $-d\bar{p}_{εκ}/dt$ στην περίπτωση αυτή δίνει τη δύναμη που ασκεί ο αέρας αντιτιθέμενος στην κίνηση της μπάλας. Όπως βλέπετε, η δύναμη με την οποία η μπάλα αλληλεπιδρά με τον αέρα συνδέεται για δεδομένο χρόνο με καθορισμένο ποσό ενέργειας. Ανά πάσα στιγμή, με καθορισμένο ρυθμό εκροής ενέργειας.

Με τα πιο πάνω μπορεί κανείς να αισθανθεί τη ρήση του Maxwell κατά την εναρκτήρια διάλεξη του (1860) στο King's College του Πανεπιστημίου του Λονδίνου, που έχει ως εξής:

«Η έρευνα των ιδιαίτερων σχέσεων μεταξύ σωμάτων που έχει οδηγήσει σε ειδικές εκδηλώσεις δυνάμεων της φύσεως αποτελεί μεγάλο μέρος της πειραματικής φυσικής. Υπάρχουν, όμως, ορισμένοι νόμοι οι οποίοι ρυθμίζουν το ποσό της ενέργειας που διαλαμβάνεται υπό ορισμένες συνθήκες, και που προσδιορίζουν το ολικό αποτέλεσμα των διαπλεκόμενων δυνάμεων. Οι νόμοι αυτοί είναι μεταξύ των πλέον σημαντικών συμπερασμάτων της φυσικής επιστήμης. Η επιστήμη που στηρίζεται στους νόμους αυτούς είναι η επιστήμη της ενεργειακής. Η εφαρμογή των αρχών αυτών στα φυσικά φαινόμενα είναι ειδική έρευνα, την οποία η επιστήμη στο παρόν στάδιο της δείχνει ότι θα οδηγήσει στη μορφή εκείνη από την οποία θα αναμένονται τα μεγαλύτερα αποτελέσματα στην επερχόμενη γενεά».

Το όλο κείμενο μπορείτε να το βρείτε στο Am. J. Physics, 47 (11), (1979), 928-933. Τα λόγια του Maxwell, πριν ενάμιση περίπου αιώνα, υπήρξαν προφητικά. Αυτό γίνεται στη μελέτη των στοιχειωδών σωματίων, στις αλληλεπιδράσεις με τα διάφορα πεδία που συνιστούν τους αντίστοιχους φορείς δυνάμεων.

Περισσότερες ιδιομορφίες θα δει κανείς, αν παραβλέψει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, φορέα των ηλεκτρικών και μαγνητικών δυνάμεων, στην περίπτωση περισσοτέρων φορτίων. Ας πάρουμε δύο, χωρίς εξωτερικές

δυνάμεις, τα οποία σε δεδομένη στιγμή το ένα έχει ταχύτητα \underline{v}_1 και το άλλο \underline{v}_2 . Εφόσον δεν υπάρχει παραλληλία στις ταχύτητες οι αντίστοιχες δυνάμεις Lorentz δεν αθροίζονται στο μηδέν. Η διαφορά από το 0 θα είναι μικρή και θα οφείλεται στο μαγνητικό μέρος των δυνάμεων. Μια και δεν έχουμε εξωτερικές δυνάμεις η δύναμη στο κάθε φορτίο οφείλεται σε δύναμη που προέρχεται από το άλλο. Είναι εσωτερικές δυνάμεις, οι οποίες δεν φαίνεται να ισορροπούν και ο νόμος δράσεως-αντιδράσεως φαίνεται να παραβιάζεται, σχ. 2.2, και όχι μόνο, αν \underline{p}_1 , \underline{p}_2 είναι οι ορμές των φορτισμένων σωματιδίων θα μπορούσε, αγνοώντας το H/M πεδίο βάσει του νόμου της δυναμικής να καταλήξει ότι

$$\frac{d\underline{p}_1}{dt} + \frac{d\underline{p}_2}{dt} \neq 0 \quad (2.4)$$

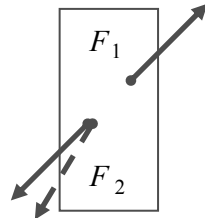
ή

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 \neq 0 \quad (2.5)$$

και να θεωρήσει ότι η ορμή μεμονωμένου συστήματος δεν διατηρείται. Όμως, η διατήρηση της ορμής για συστήματα χωρίς εξωτερικές δυνάμεις είναι νόμος γενικότητας και βασικά το μεμονωμένο σύστημα συνίσταται από τα δύο φορτία και το H/M πεδίο, του οποίου η ορμή είναι διάχυτη στο χώρο, και περιγράφεται με πυκνότητα ορμής. Η ορμή του H/M πεδίου, \underline{p} , ευρίσκεται με ολοκλήρωση της αντίστοιχης πυκνότητας εφ' όλου του χώρου.

Για το σύστημα των φορτίων και του συναφούς H/M πεδίου έχουμε

$$\frac{d\left(\underline{p}_1 + \underline{p}_2 + \underline{p}_{\text{ακτινοβ}}\right)}{dt} = 0 \quad (2.6)$$



Σχήμα 2-2 Εξισορρόπηση εσωτερικών δυνάμεων που ασκούνται από φορτισμένα σωματίδια

Όπου οι ορμές $\underline{p}_1, \underline{p}_2$ καθορίζονται από τις αντίστοιχες δυνάμεις Lorentz και αντίστοιχους ρυθμούς εκροών, ή και ενδεχομένως εισροών κινητικής ενέργειας στα σωματίδια μας.

Αν και τα διαπλεκόμενα ποσά ορμής μεταξύ ύλης και ακτινοβολίας σε αλληλεπίδραση είναι συγκριτικά μικρά, παίζουν λίαν σημαντικό ρόλο, όπως θα δούμε, στις διεργασίες ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ ατομικής ύλης και ακτινοβολίας. Η διατήρηση της ορμής, σε συνδυασμό με τη συμμετρία εκπομπής έναντι απορρόφησης οδήγησαν τον Einstein (1917), [11], στην διεργασία της επαγόμενης εκπομπής, η οποία και αποτελεί τη βάση για την επίτευξη συνεκτικής ακτινοβολίας laser. Λεπτομέρειες θα δούμε στα επόμενα.

2.2 Μηχανισμοί αλληλεπίδρασης

Θα αναφερθούμε σε διεργασίες ανταλλαγής ενέργειας και ορμής μεταξύ ακτινοβολίας και ατομικής ύλης οι οποίες θα μας επιτρέψουν να κατανοήσουμε τη λειτουργία του laser καθώς και τις θεωρήσεις που θα κάνουμε προκειμένου να αναζητήσουμε κατάλληλα υλικά για τη κατασκευή laser. Οι διεργασίες που περιέγραψε ο Einstein σχετικά με την αλληλεπίδραση ακτινοβολίας με την ύλη είναι τρεις: (α) απορρόφησης φωτονίου, (β) αυθόρμητης εκπομπής και (γ) προκαλούμενης ή επαγόμενης εκπομπής.

(α) *Απορρόφηση φωτονίου.* Έστω δισταθμικό άτομο με ενέργειες $E_2 > E_1$ το οποίο βρίσκεται αρχικά στην θεμελιώδη κατάσταση E_1 . Το άτομο μπορεί να διεγερθεί στην κατάσταση E_2 με απορρόφηση φωτονίου ενέργειας

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega \quad (2.7)$$

όπου ω η συχνότητα του φωτονίου. Στη περίοδο από τα τέλη του 1916 έως το 1917 ο Einstein περιέγραψε [11, 20, 22, 23] ότι ο φωτόνιο έχει επίσης μία ορμή \underline{p} μέτρου

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} \quad (2.8)$$

Προκειμένου να διατηρηθεί η ορμή του συστήματος θα πρέπει το άτομο που είναι αρχικά ακίνητο να αποκτήσει και αυτό μία ορμή \underline{p} . Το άτομο αποκτώντας αυτή την ορμή αποκτά επίσης και κινητική ενέργεια

$$E_{κιν} = \frac{p^2}{2m} \quad (2.9)$$

Σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της ενέργειας θα πρέπει:

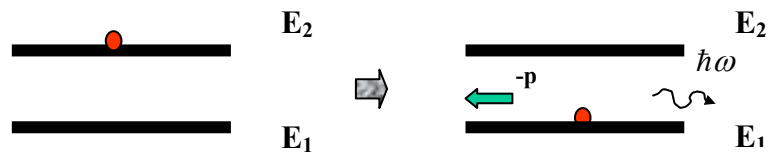
$$E_2 - E_1 + E_{κιν} = \hbar\omega \quad (2.10)$$

Η ορμή όμως που αποκτά το άτομο κατά την απορρόφηση φωτονίου και η κινητική του ενέργεια είναι ελάχιστες και έτσι με καλή προσέγγιση ισχύει η σχέση (2.7) αντί της (2.10). Η διεργασία της απορρόφησης φωτονίου φαίνεται στο σχήμα 2-3.



Σχήμα 2-3 Μηχανισμός απορρόφησης φωτονίου από αρχικά ακίνητο άτομο

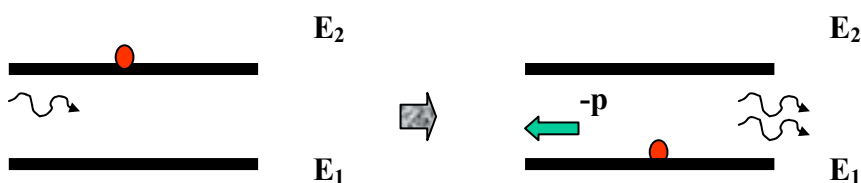
(β) *Διεργασία αυθόρμητης εκπομπής.* Ενώ είναι διεγερμένο το άτομο στην στάθμη E_2 είναι δυνατό να αποδιεγερθεί και να μεταπέσει στην κατάσταση E_1 με σύγχρονη εκπομπή φωτονίου ενέργειας σύμφωνα με την σχέση (2.7). Ανάλογα με το συνδυασμό κυματοσυναρτήσεων των δύο ενεργειακών σταθμών και το εύρος του ενεργειακού χάσματος $E_2 - E_1 = \hbar\omega$, υπάρχει μία πιθανότητα το άτομο να αποδιεγερθεί αυθόρμητα και να μεταπέσει στην ενεργειακή κατάσταση E_1 με σύγχρονη εκπομπή φωτονίου ενέργειας $\hbar\omega$. Το φωτόνιο εκπέμπεται προς τυχούσα κατεύθυνση και με τυχαία φάση. Προκειμένου να διατηρηθεί η ορμή του συστήματος άτομο-φωτόνιο το άτομο, αρχικά ακίνητο, αναδρά με ορμή $-\underline{p}$, αντίθετη προς αυτή του φωτονίου. Η διεργασία αυτή παρίσταται στο σχήμα 2-4.



Σχήμα 2-4 Μηχανισμός αυθόρμητης εκπομπής φωτονίου από αρχικά ακίνητο άτομο

Ο Einstein φανταζόταν την ακτινοβολία να έχει βελονοειδή μορφή, δεδομένου ότι εκπεμόταν ένα σωματίδιο, το φωτόνιο, σε ορισμένη κατεύθυνση. Από την ηλεκτρομαγνητική θεωρία είναι γνωστό ότι ταλαντευόμενο φορτίο δεν εκπέμπει ακτινοβολία σφαιρικής κατανομής έντασης. Στην προκειμένη περίπτωση της αυθόρμητης εκπομπής επειδή η κατεύθυνση της ορμής του φωτονίου είναι τυχαία, η συνολικά εκπεμπόμενη ακτινοβολία από το σύνολο των ατόμων της ύλης θα έχει σφαιρική κατανομή.

(γ) *Διεργασία εξαναγκασμένης εκπομπής.* Προκειμένου ο Einstein να ερμηνεύσει τον νόμο του Planck χρειάστηκε να υποθέσει επί πλέον της διεργασίας απορρόφησης και αυθόρμητης εκπομπής και αυτή της εξαναγκασμένης εκπομπής. Αυτή είναι η αντίστροφη διεργασία από την απορρόφηση φωτονίου, σχήμα (2-5).



Σχήμα 2-5 Μηχανισμός εξαναγκασμένης εκπομπής φωτονίου από αρχικά ακίνητο άτομο

Ένα διεγερμένο άτομο είναι δυνατό να εξαναγκασθεί σε αποδιέγερση και να μεταπέσει σε στάθμη χαμηλότερης ενέργειας, πριν προλάβει να το κάνει αυτό αυθόρμητα, εξ' αιτίας της αλληλεπίδρασης του με ένα άλλο κατάλληλο φωτόνιο ενέργειας $\hbar\omega$. Το εκπεμπόμενο φωτόνιο θα έχει την ίδια συχνότητα, φάση και ορμή (και πόλωση) με το αρχικό φωτόνιο

Η δέσμη που θα δημιουργηθεί με αυτό τον τρόπο, η δέσμη laser, θα είναι μονοχρωματική, σύμφωνη, και κατευθυνόμενη. Θα ήταν δυνατό να πάρει κανείς μία φωτεινή δέσμη από συμβατική φωτεινή πηγή που να είναι μονοχρωματική (περνώντας την μέσα από φίλτρα ή φράγματα) και κατευθυνόμενη (με κατάλληλη επεξεργασία), αλλά δεν θα έχει πολύ ισχυρή

ένταση αφού τα οπτικά μέσα που τις έδωσαν τις άλλες ιδιότητες θα έχουν μειώσει την ένταση της παρά το ότι η ισχύς της αυξάνει με τη θερμοκρασία.

Η δέσμη που θα δημιουργηθεί με αυτό τον τρόπο, η δέσμη laser, θα είναι μονοχρωματική, σύμφωνη, και κατευθυνόμενη. Θα ήταν δυνατό να πάρει κανείς μία φωτεινή δέσμη από συμβατική φωτεινή πηγή που να είναι μονοχρωματική (περνώντας την μέσα από φίλτρα ή φράγματα) και κατευθυνόμενη (με κατάλληλη επεξεργασία), αλλά δεν θα έχει πολύ ισχυρή ένταση αφού τα οπτικά μέσα που τις έδωσαν τις άλλες ιδιότητες θα έχουν μειώσει την ένταση της παρά το ότι η ισχύς της αυξάνει με τη θερμοκρασία.

2.3 **Νόμος του Planck με βάση τις διεργασίες του Einstein**

Στη διεργασία αυθόρμητης εκπομπής (β) ο Einstein υπέθεσε (1917) ότι η πιθανότητα να εκπέμψει αυθόρμητα ένα διεγερμένο άτομο στη κατάσταση E_2 φωτόνιο μέσα σε χρόνο dt είναι

$$dW_{\alpha\beta} = A_{21}dt \quad (2.11)$$

όπου A_{21} ο συντελεστής αυθόρμητης εκπομπής του Einstein. Με την εκπομπή του φωτονίου το άτομο μεταβαίνει στη θεμελιώδη κατάσταση E_1 . Όσον αφορά την διεργασία (α) η πιθανότητα απορρόφησης φωτονίου από H/M ακτινοβολία πυκνότητας $\rho(\omega)$, $dW_{\alpha\text{απορ}}$, εκφράζεται μέσα από την

$$dW_{\alpha\text{απορ}} = B_{12}\rho(\omega) dt \quad (2.12)$$

Με την απορρόφηση φωτονίου το άτομο μεταβαίνει στη διεγερμένη κατάσταση E_2 . Ο Einstein πίστευε ότι αν έκανε κατάλληλη χρήση των δύο διεργασιών θα ήταν σε θέση να βγάλει τον τύπο του Planck. Υπέθεσε επίσης

ότι μόνο τα φωτόνια με ενέργεια $\hbar\omega = E_2 - E_1$ θα είναι δυνατόν να απορροφηθούν. Διαφορετικά, αν $\hbar\omega \neq E_2 - E_1$ η πιθανότητα να απορροφηθεί το φωτόνιο υπάρχει μεν αλλά είναι πολύ μικρή. Στη συζήτηση που γίνεται εδώ περιοριζόμαστε σε δύο μόνο στάθμες, τα άτομα είναι διασταθμικά παρόλο που ακόμα και αυτά με ένα μόνο ηλεκτρόνιο έχουν πάρα πολλές ενεργειακές στάθμες και μάλιστα στην περιοχή των υψηλών ενεργειών το φάσμα τους είναι σχεδόν συνεχές.

Με τις δύο αυτές διεργασίες απορρόφησης και αυθόρμητης εκπομπής ο Einstein δεν κατάφερε να παράγει τον τύπο του Planck της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος και αναγκάστηκε να εισαγάγει και μία τρίτη διεργασία αλληλεπίδρασης ακτινοβολίας και ύλης: την εξαναγκασμένη ή διεγερμένη εκπομπή. Το διεγερμένο τώρα άτομο αναδρά στην 'σύγκρουση' με το προσπίπτον φωτόνιο και παίρνει την ορμή του αλλά στην αντίθετη κατεύθυνση. Από την αλληλεπίδραση αυτή εκπέμπεται εξαναγκασμένα (όχι αυθόρμητα) ένα άλλο φωτόνιο με την ίδια ορμή, διεύθυνση, συχνότητα και φάση με το προσπίπτον. Η πιθανότητα να συμβεί μία τέτοια εκπομπή είναι κατά τον Einstein:

$$dW_{\text{διεγ.εκπ.}} = B_{21}\rho(\omega) dt \quad (2.13)$$

Με βάση τις τρεις διεργασίες του Einstein γεννήθηκε η ιδέα, με κάποιες αμφιβολίες αρχικά, της κατασκευής της οπτικής μηχανής laser. Για να κατασκευαστεί ο laser θα έπρεπε να υπάρχουν αρχικά πολλά διεγερμένα άτομα στην κατάλληλη στάθμη. Σύμφωνα όμως με την θερμοδυναμική η πιθανότητα p_1 να βρεθεί ένα άτομο στην κατάσταση E_1 είναι:

$$p_1 \sim e^{-\frac{E_1}{kT}} \quad (2.14)$$

και η πιθανότητα p_2 να βρεθεί το άτομο στην κατάσταση E_2 είναι:

$$p_2 \sim e^{-\frac{E_2}{kT}} \quad (2.15)$$

αλλά $p_2 < p_1$ γιατί $E_2 > E_1$. Έτσι η τάση της φύσης είναι να βρίσκονται τα περισσότερα ηλεκτρόνια σε χαμηλότερες στάθμες, δηλ. $N_2 < N_1$.

Προκειμένου να εξαχθεί ο νόμος ακτινοβολίας μέλανος σώματος του Planck μέσα από τις τρεις διεργασίες αλληλεπίδρασης ατόμου & φωτονίου σκέφτεται κανείς ως εξής. Σε ένα θερμό σώμα σε θερμοκρασία T , η πιθανότητα ένα από τα άτομα του να βρίσκεται στην στάθμη n είναι από την στατιστική του Boltzmann:

$$p_n = \frac{g_n}{Z} e^{-\frac{E_n}{kT}} \quad (2.16)$$

όπου η g_n αντιπροσωπεύει τον εκφυλισμό της στάθμης E_n , δηλ. g_n στάθμες κατέχουν την ίδια ενέργεια E_n . Η παράμετρος Z είναι η συνάρτηση επιμερισμού:

$$Z = \sum_n g_n e^{-\frac{E_n}{kT}} \quad (2.17)$$

για όλες τις στάθμες n τέτοια ώστε να κανονικοποιείται η πιθανότητα p_n . Έστω ότι, από N συνολικά άτομα σε όλες στις στάθμες, βρίσκονται N_n άτομα στην κατάσταση E_n , τότε:

$$N_n = N \frac{g_n}{Z} e^{-\frac{E_n}{kT}} \quad (2.18)$$

Ο μέσος αριθμός των ατόμων στις ενεργειακές στάθμες E_1 και E_2 (εκφραζόμενος σαν μέσος αριθμός ανά μονάδα όγκου) θα είναι:

$$N_1 = N \frac{g_1}{Z} e^{-\frac{E_1}{kT}} \quad \& \quad N_2 = N \frac{g_2}{Z} e^{-\frac{E_2}{kT}} \quad (2.19)$$

Το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας. Τα άτομα, δηλαδή, απορροφούν ενέργεια και συγχρόνως την εκπέμπουν. Οι ιδιότητες του συστήματος, θερμοκρασία κλπ., παραμένουν έτσι αναλλοίωτες. Στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας ο μέσος αριθμός ατομικών μεταπτώσεων στη μονάδα του χρόνου στο άτομο από κατάσταση $2 \rightarrow 1$ είναι:

$$N_2 (dW_{αυθ.} + dW_{διεγ.εκπ.}) \quad (2.20)$$

ίσος με τον μέσο αριθμό των ατόμων που μεταβαίνουν στη μονάδα του χρόνου από την κατάσταση $1 \rightarrow 2$

$$N_1 dW_{διεγ.απορ.} \quad (2.21)$$

Επομένως η θερμοδυναμική ισορροπία εκφράζεται:

$$N \frac{g_2}{Z} e^{-\frac{E_2}{kT}} [A_{21} dt + B_{21} \rho(\omega, T) dt] = N \frac{g_1}{Z} e^{-\frac{E_1}{kT}} B_{12} \rho(\omega, T) dt \quad (2.22)$$

η οποία οδηγεί στην:

$$g_2 e^{-\frac{E_2}{kT}} [A_{21} + B_{21} \rho(\omega, T)] = g_1 e^{-\frac{E_1}{kT}} B_{12} \rho(\omega, T) \quad (2.23)$$

Ο Einstein χρησιμοποίησε την πειραματικά υποστηριζόμενη υπόθεση ότι η ακτινοβολία $\rho(\omega, T)$ πυκνώνει με την αύξηση της θερμοκρασίας T . Έτσι, για $T \rightarrow \infty$ έπεται ότι $\rho(\omega, T) \rightarrow \infty$. Κάτι τέτοιο βέβαια αποτελεί σχήμα λόγου διότι δεν είναι εφικτό να φέρουμε την ύλη σε άπειρη θερμοκρασία. Με αυτή, όμως, την υπόθεση η προηγούμενη έκφραση δίνει:

$$g_2 B_{21} = g_1 B_{12} \quad (2.24)$$

και επομένως:

$$g_1 B_{12} \rho(\omega, T) = g_2 (A_{21} + B_{21} \rho(\omega, T)) e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} \quad (2.25)$$

ενώ $E_2 - E_1 = \hbar\omega$. Από τις δύο προηγούμενες εκφράσεις προκύπτει:

$$\rho(\omega, T) = \frac{A_{21}/B_{21}}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (2.26)$$

Ο Planck είχε ήδη υπολογίσει την πυκνότητα ακτινοβολίας ανά μονάδα συχνότητας, $\rho(\omega, T)$ με θερμοδυναμικό συλλογισμό ως εξής. Ο αριθμός των τροπών ακτινοβολίας ανά μονάδα συχνότητας ανάμεσα στις συχνότητες ω και $\omega + d\omega$ μέσα στην κοιλότητα όγκου V υπολογίζεται σε $\frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}$ [7].

Η πιθανότητα που χαρακτηρίζει την εκπομπή κβάντου ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας αυτής της συχνότητας σε θερμοκρασία T είναι $\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$,

ώστε η πυκνότητα ακτινοβολίας να είναι:

$$\begin{aligned} \rho(\omega, T) &= \frac{\text{ενέργεια}}{(\text{όγκος})(\text{συχνότητα})} = \\ &= \frac{(\text{αριθμός τροπών ακτινοβολίας})}{(\text{συχνότητα})} \cdot \text{πιθανότητα} \cdot \frac{(\text{ενέργεια φωτονίου})}{(\text{όγκος})} = \\ &= \frac{2V\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \cdot \frac{\hbar\omega}{V} \quad (2.27) \end{aligned}$$

Επομένως, από τις σχέσεις 2.26 & 2.27 ο λόγος των συντελεστών Einstein αυθόρμητης και εξαναγκασμένης εκπομπής θα είναι (παραλείποντας τους δείκτες):

$$\frac{A}{B} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \quad (2.28)$$

Ο λόγος των πιθανοτήτων αυθόρμητης και εξαναγκασμένης εκπομπής θα είναι επομένως:

$$\frac{dW_{\text{αυθ}}}{dW_{\text{διεγ. εκπ}}} = \frac{A}{B\rho} = e^{\hbar\omega/kT} - 1 \quad (2.29)$$

Σε συνήθη θερμοκρασία ο λόγος των δύο πιθανοτήτων είναι υπέρ της αυθόρμητης εκπομπής, η οποία βέβαια δεν συνεισφέρει στη λειτουργία laser. Για να γίνει ο λόγος αυτός ίσος με την μονάδα, για εκπομπή ακτινοβολίας π.χ. στο κίτρινο χρώμα ($\lambda=0,6 \text{ nm}$), θα πρέπει η θερμοκρασία του ατομικού συστήματος να ανέβει στους 34,485 K! Εκτός, φυσικά, αν δημιουργήσω αναστροφή πληθυσμού ($\Delta N=N_2-N_1>0$), μία κατάσταση μη ισορροπίας, οπότε σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος τα φωτόνια της εξαναγκασμένης εκπομπής θα είναι περισσότερα από αυτά της αυθόρμητης τα οποία παίζουν το ρόλο θορύβου στο σήμα laser μέσα στην κοιλότητα. Τα φωτόνια της εξαναγκασμένης εκπομπής θα ενισχύονται μέσα στη κοιλότητα δίνοντας δέσμη μονοχρωματική, κατευθυνόμενη, σύμφωνη και μεγάλης πυκνότητας ακτινοβολίας.

2.4 Ασκήσεις

Άσκηση 2-1

Προκειμένου να πάρετε μία ιδέα για το μέγεθος των ενεργειακών διαφορών σχετικών με τη μεταφορική κίνηση φορτίου, θεωρείστε ηλεκτρόνιο σε

κυβικό κιβώτιο ακμής L . Βρείτε τύπο για τις ιδιοτιμές της ενέργειας. Σχηματίστε ένα μέρος από το φάσμα των γραμμών εκπομπής.

Για να δείτε τη δυνατότητα εκπομπής στο ‘συνεχές’ βρείτε για δεδομένο μήκος ακμής του κιβωτίου την ελάχιστη συχνότητα (ή μέγιστο μήκος κύματος) με την οποία μπορεί να εκπέμψει φωτόνιο. Βάζοντας αριθμούς μπορείτε να σχηματίσετε αντίληψη για το φάσμα στα μεγάλα μήκη κύματος και τη δυνατότητα παραπλήσιων σε ενέργεια φωτονίων.

Άσκηση 2-2.

Βρείτε την έκφραση για τη θερμοκρασία στην οποία σε κοιλότητα μέλανος σώματος η πιθανότητα διεγερόμενης εκπομπής για κάποια συχνότητα ω , θα είναι ίση με την αντίστοιχη πιθανότητα αυθόρμητης εκπομπής.

Σχεδιάστε σε διάγραμμα τη μεταβολή της θερμοκρασίας ως προς το μήκος κύματος στη περίπτωση αυτή ισορροπίας.

Τι τιμές θα πάρει η θερμοκρασία όταν η συχνότητα μεταβάλλεται από το ένα έως το άλλο άκρο του φάσματος;

Άσκηση 2-3.

Θεωρείστε την αλληλεπίδραση ακτινοβολίας με την ύλη σε κοιλότητα μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία. Βρείτε την πυκνότητα ακτινοβολίας μέλανος σώματος για διάφορες θερμοκρασίες, π. χ. 900, 1650, και 6400 K (θερμοκρασία επιφάνειας του ήλιου) και για μήκη κύματος $6,94 \cdot 10^{-7} \text{m}$ (ερυθρό), $1,15 \cdot 10^{-6} \text{m}$ (υπέρυθρο), $1,25 \cdot 10^{-2} \text{m}$ (μικροκύματα) και σε περιοχές μηκών κύματος του εύρους $\Delta\lambda=10\text{nm}$ (ενός φίλτρου).

