



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΥΜΠΥΚΝΩΜΕΝΗΣ ΥΛΗΣ

Εξετάσεις Κβαντικής Οπτικής και Laser

Διδάσκων: Κωνσταντίνος Σιμσερίδης

ΑΘΗΝΑ 2026

Τομέας Φυσικής Συμπυκνωμένης Ύλης. Τμήμα Φυσικής. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
Κβαντική Οπτική και Lasers. Διδάσκων: Κωνσταντίνος Σιμσερίδης

Εξέταση, 11 Ιουνίου 2026

Θέμα 1. (1 μονάδα) Είναι λογικό να θεωρήσουμε τη δυναμική ενέργεια στην προσέγγιση διπόλου, $U_E(\vec{r}, t) = -\vec{P} \cdot \vec{E}$, ως διαταραχή στην $\hat{H}_0$ (τη μη διαταραγμένη Χαμιλτονιανή); Συγκρίνετε τις ενεργειακές αυτές κλίμακες, χρησιμοποιώντας το παλαιοκβαντικό πρότυπο Bohr. Δίνεται το Rydberg ενέργειας $R_E = 13.6$ eV, καθώς και οι επιτρεπόμενες ακτίνες Bohr $r_n = a_0 n^2$, και ενέργειες Bohr, $E_n = -\frac{R_E}{n^2}$. Εδώ a_0 είναι η ακτίνα Bohr, ≈ 0.52 Å. Βρείτε, δηλαδή πόσο θα έπρεπε να είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου $\mathcal{E}$ ώστε η μέγιστη τιμή του μέτρου της $U_E(\vec{r}, t)$ να ισούται με $|E_n| = \frac{R_E}{n^2}$. Είναι πειραματικώς εφικτά τα πεδία αυτά; Για σύγκριση, διάσπαση του αέρα εμφανίζεται για πεδία τάξεως μεγέθους $\approx 10^6$ V/m, ισχυρά εργαστηριακά στατικά πεδία είναι συνήθως $\approx 10^7 - 10^8$ V/m, ενώ πολύ ισχυροί παλμοί laser μπορούν στιγμιαία να φτάσουν $10^{10} - 10^{12}$ V/m.

Θέμα 2. (3 μονάδες) Δισταθμικό σύστημα ($\Delta\Sigma$) σε ημικλασική προσέγγιση και προσέγγιση διπόλου. Δίνονται οι εξισώσεις πριν από την προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος (rotating wave approximation, RWA)

$$\dot{C}_1(t) = C_2(t) \frac{i\Omega_R}{2} [e^{i\Delta t} + e^{-i\Sigma t}] \quad (1)$$

$$\dot{C}_2(t) = C_1(t) \frac{i\Omega_R}{2} [e^{-i\Delta t} + e^{i\Sigma t}] \quad (2)$$

(α') Εξηγήστε και ορίστε τα σύμβολα, Ω_R , Δ , Σ , $C_1(t)$, $C_2(t)$.

(β') Σε τι συνίσταται η RWA; Κάντε την και δείξτε πως για $\Delta = 0$ θα ισχύει

$$C_1(t) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \quad (3)$$

$$C_2(t) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \quad (4)$$

(γ') Λύστε τις Εξισώσεις (26)-(27) για αρχικές συνθήκες

$$C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}, \quad C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}. \quad (5)$$

Υπάρχουν ταλαντώσεις της πιθανότητας παρουσίας του ηλεκτρονίου στις στάθμες του $\Delta\Sigma$ με αυτές τις αρχικές συνθήκες; Αν ναι, βρείτε τη μορφή τους. Τι συμβαίνει όταν $\theta = \varphi$;

(δ') Αν η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα είναι θετική, ποια είναι η περίοδος των ταλαντώσεων, T , ποια η μέγιστη και ποια η ελάχιστη διαφορά των πιθανοτήτων παρουσίας του ηλεκτρονίου στις στάθμες, $|C_1(t)|^2 - |C_2(t)|^2$ και ποιες οι μέσες τους τιμές, $\langle |C_1(t)|^2 \rangle$ και $\langle |C_2(t)|^2 \rangle$;

Θέμα 3. (3 μονάδες) Θεωρήστε τις διαφορικές εξισώσεις ρυθμών LASER στην αδιάστατη μορφή

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1}, \quad (6)$$

$$\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \varrho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2, \quad (7)$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \left\{ \frac{A'}{A}\nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1) \right\} \frac{1}{\tau_0(1 - \tau_1)}. \quad (8)$$

Στη στάσιμη κατάσταση, αγνοώντας το $\frac{A'}{A} \ll 1$, ισχύουν οι εξισώσεις

$$\nu_1 = \tau_1 r_N, \quad \forall r_N \quad (9)$$

$$\nu_2 = \begin{cases} r_N, & \forall r_N \leq 1 \\ \tau_1 r_N + (1 - \tau_1), & \forall r_N \geq 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\varrho = \begin{cases} 0, & \forall r_N \leq 1 \\ r_N - 1, & \forall r_N \geq 1 \end{cases} \quad (11)$$

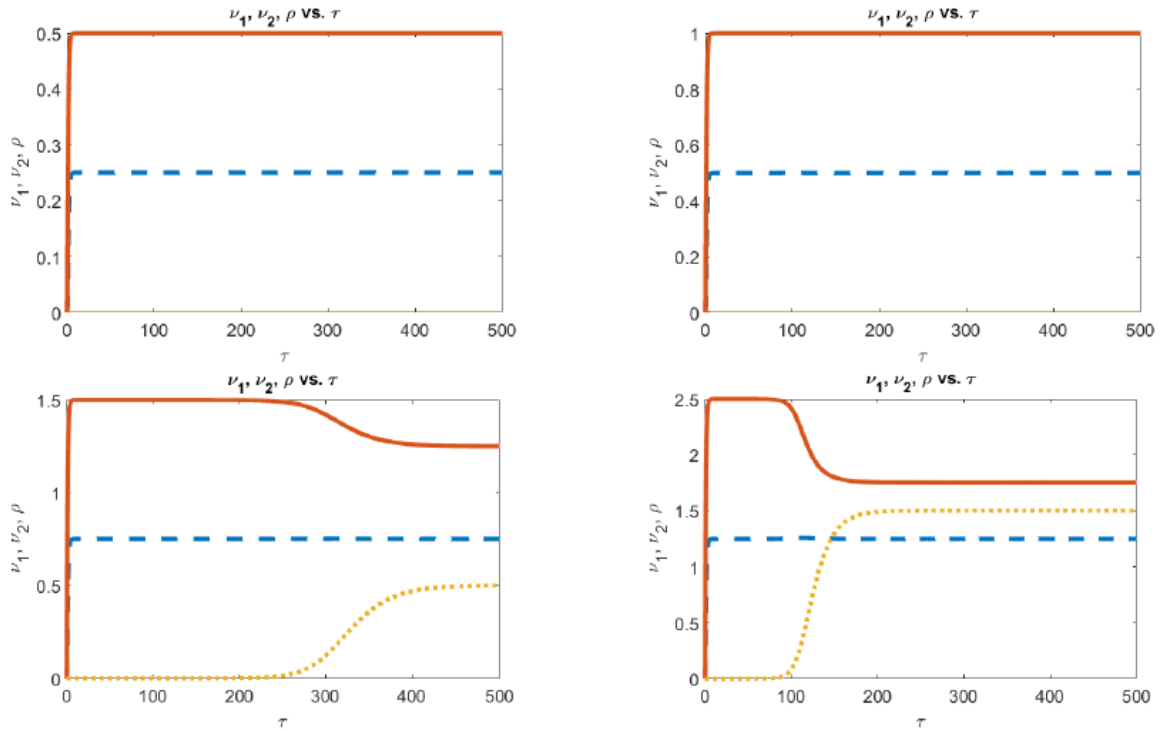
Η αριθμητική επίλυση των Εξ. (68),(69),(70) φαίνεται στην Εικόνα 2, όπου μεταβάλλουμε μόνο μία από τις παραμέτρους r_N , τ_1 , τ_0 , $\frac{A'}{A}$.

(α') Ποιά παράμετρος μεταβάλλεται; Ποια είναι η τιμή της μεταβαλλομένης παραμέτρου σε κάθε εικόνα;

(β') Πόσος είναι ο λόγος των χρόνων ζωής των σταθμών, $\frac{t_1}{t_2}$;

(γ') Γιατί υπάρχει διαφορά στο χρόνο που χρειάζεται να γίνει η ϱ αισθητή στις κάτω εικόνες;

(δ') Γιατί πριν αρχίσει να γίνεται η ϱ αισθητή, σε όλες τις εικόνες, $\frac{\nu_2}{\nu_1} = 2$;



Εικόνα 1 Αλλάζουμε μία παράμετρο μόνο και παρακολουθούμε τη χρονική εξέλιξη των Εξ. (68),(69),(70).

Θέμα 4. (3 μονάδες) Δίνεται η κατάσταση

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t)|\downarrow, 1\rangle + c_2(t)|\uparrow, 0\rangle. \quad (12)$$

Να λυθεί το χρονοεξαρτημένο πρόβλημα

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi(t)\rangle, \quad (13)$$

για τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings,

$$\hat{H} = \hat{H}_{JC} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g \left(\hat{S}_+\hat{a} + \hat{S}_-\hat{a}^\dagger \right), \quad (14)$$

με αρχικές συνθήκες $c_1(0) = 0$, $c_2(0) = 1$. Δηλαδή βρείτε:

- (α') τι ταλαντώσεις κάνουν τα $|c_1(t)|^2$, $|c_2(t)|^2$, $\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$, $\langle\hat{S}_+\hat{S}_-\rangle$ και ζωγραφίστε τες,
- (β') την αντίστοιχη περίοδο T_R και το μέγιστο ποσοστό μεταβιβάσεως A_R ,
- (γ') τις μέσες τιμές των $\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$, $\langle\hat{S}_+\hat{S}_-\rangle$,
- (δ') το μέσο ρυθμό μεταβιβάσεως k από την άνω στάθμη στην κάτω στάθμη.

Να απαντηθούν όλα τα θέματα.

Τομέας Φυσικής Συμπυκνωμένης Ύλης. Τμήμα Φυσικής. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Κβαντική Οπτική και Lasers. Διδάσκων: Κωνσταντίνος Σιμσερίδης

Εξέταση, 11 Ιουνίου 2026

Θέμα 1. (1 μονάδα) Είναι λογικό να θεωρήσουμε τη δυναμική ενέργεια στην προσέγγιση διπόλου, $U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{\mathcal{E}}$, ως διαταραχή στην $\hat{H}_0$ (τη μη διαταραγμένη Χαμιλτονιανή); Συγκρίνετε τις ενεργειακές αυτές κλίμακες, χρησιμοποιώντας το παλαιοκβαντικό πρότυπο Bohr. Δίνεται το Rydberg ενέργειας $R_E = 13.6$ eV, καθώς και οι επιτρεπόμενες ακτίνες Bohr $r_n = a_0 n^2$, και ενέργειες Bohr, $E_n = -\frac{R_E}{n^2}$. Εδώ a_0 είναι η ακτίνα Bohr, ≈ 0.52 Å. Βρείτε, δηλαδή πόσο θα έπρεπε να είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου $\mathcal{E}$ ώστε η μέγιστη τιμή του μέτρου της $U_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$ να ισούται με $|E_n| = \frac{R_E}{n^2}$. Είναι πειραματικώς εφικτά τα πεδία αυτά; Για σύγκριση, διάσπαση του αέρα εμφανίζεται για πεδία τάξεως μεγέθους $\approx 10^6$ V/m, ισχυρά εργαστηριακά στατικά πεδία είναι συνήθως $\approx 10^7 - 10^8$ V/m, ενώ πολύ ισχυροί παλμοί laser μπορούν στιγμιαία να φτάσουν $10^{10} - 10^{12}$ V/m.

Λύση Θέματος 1.

Στην προσέγγιση διπόλου, η αλληλεπίδραση ατόμου - HM πεδίου είναι

$$U_{\mathcal{E}} = -\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \quad (15)$$

όπου $\vec{\mathcal{P}} = -e\vec{r}$ είναι η διπολική ροπή και $\vec{\mathcal{E}}$ το ηλεκτρικό πεδίο. Η μη διαταραγμένη Χαμιλτονιανή $\hat{H}_0$ περιγράφει το άτομο χωρίς πεδίο. Θεωρούμε κατά την εκφώνηση πως η απόλυτη τιμή των ιδιοενεργειών είναι $|E_n| = \frac{R_E}{n^2}$. Για να μπορεί να θεωρηθεί ο όρος $U_{\mathcal{E}}$ ως διαταραχή (μικρός δηλαδή) θα πρέπει

$$|U_{\mathcal{E}}|_{\max} \ll |E_n|, \quad (16)$$

δηλαδή η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης να είναι πολύ μικρότερη από τις τυπικές ενέργειες Bohr. Ας υποθέσουμε πως

$$|U_{\mathcal{E}}| = |E_n|, \quad (17)$$

Πόσο θα πρέπει να είναι τότε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου; Από την προηγούμενη εξίσωση παίρνουμε

$$|e\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}| = \left| \frac{R_E}{n^2} \right|, \quad (18)$$

Παίρνοντας το μέγιστο εσωτερικό γινόμενο, ώστε να εξετάσουμε τη μέγιστη δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης και υποθέτοντας πως τα ηλεκτρόνια βρίσκονται στις προβλεπόμενες από το πρότυπο Bohr τροχιές, $r = r_n = a_0 n^2$,

$$ea_0 n^2 \mathcal{E} = \frac{R_E}{n^2}, \quad (19)$$

προκύπτει μέτρο ηλεκτρικού πεδίου

$$\mathcal{E} = \frac{R_E}{ea_0 n^4}, \quad (20)$$

$$\mathcal{E} = \frac{13.6 \text{ eV}}{ea_0 n^4}, \quad (21)$$

$$\mathcal{E} = \frac{13.6 \text{ V}}{0.52 \times 10^{-10} \text{ m } n^4}, \quad (22)$$

$$\mathcal{E} = 26.15 \times 10^{10} \frac{\text{V}}{\text{m}} \frac{1}{n^4}, \quad (23)$$

Άρα, μικρά n , θα χρειαζόταν εξαιρετικά υψηλά μέτρα ηλεκτρικού πεδίου, αφού για σύγκριση, διάσπαση του αέρα εμφανίζεται για πεδία τάξεως μεγέθους $\approx 10^6 \text{ V/m}$ και τα ισχυρά εργαστηριακά στατικά πεδία είναι συνήθως $\approx 10^7 - 10^8 \text{ V/m}$. Οπότε, η προσέγγιση διπόλου είναι από αυτή την άποψη εντάξει. Μπορούμε να φτιάξουμε και ισχυρότερα πεδία, π.χ. ισχυροί παλμοί laser $10^{10} - 10^{12} \text{ V/m}$. Τότε δεν θα ισχύει η προσέγγιση διπόλου.

Θέμα 2. (3 μονάδες) Δισταθμικό σύστημα ($\Delta\Sigma$) σε ημικλασική προσέγγιση και προσέγγιση διπόλου. Δίνονται οι εξισώσεις πριν από την προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος (rotating wave approximation, RWA)

$$\dot{C}_1(t) = C_2(t) \frac{i\Omega_R}{2} [e^{i\Delta t} + e^{-i\Sigma t}] \quad (24)$$

$$\dot{C}_2(t) = C_1(t) \frac{i\Omega_R}{2} [e^{-i\Delta t} + e^{i\Sigma t}] \quad (25)$$

(α') Εξηγήστε και ορίστε τα σύμβολα, Ω_R , Δ , Σ , $C_1(t)$, $C_2(t)$.

(β') Σε τι συνίσταται η RWA; Κάντε την και δείξτε πως για $\Delta = 0$ θα ισχύει

$$C_1(t) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \quad (26)$$

$$C_2(t) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \quad (27)$$

(γ') Λύστε τις Εξισώσεις (26)-(27) για αρχικές συνθήκες

$$C_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}, \quad C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}. \quad (28)$$

Υπάρχουν ταλαντώσεις της πιθανότητας παρουσίας του ηλεκτρονίου στις στάθμες του $\Delta\Sigma$ με αυτές τις αρχικές συνθήκες; Αν ναι, βρείτε τη μορφή τους. Τι συμβαίνει όταν $\theta = \varphi$;

(δ') Αν η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα είναι θετική, ποια είναι η περίοδος των ταλαντώσεων, T , ποια η μέγιστη και ποια η ελάχιστη διαφορά των πιθανοτήτων παρουσίας του ηλεκτρονίου στις στάθμες, $|C_1(t)|^2 - |C_2(t)|^2$ και ποιες οι μέσες τους τιμές, $\langle |C_1(t)|^2 \rangle$ και $\langle |C_2(t)|^2 \rangle$;

Λύση Θέματος 2.

(α') Θεωρία, θα πρέπει να μπορείτε να γράψετε μερικές λέξεις. $\Omega_R = \frac{pE_0}{\hbar}$ είναι η συχνότητα Rabi. $\mathcal{P}$ είναι το 12 στοιχείο πίνακα της παράλληλης στο ηλεκτρικό πεδίο συνιστώσας της ηλεκτρικής διπολικής ροπής και E_0 το πλάτος του πεδίου (στο πλαίσιο της προσεγγίσεως διπόλου). $\Delta = \omega - \Omega$ είναι ο αποσυντονισμός, $\Sigma = \omega + \Omega$, ω είναι η κυκλική συχνότητα του HM πεδίου, $\Omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ όπου E_1 και

E_2 οι ιδιοενέργειες των δύο σταθμών, $C_1(t)$ ο συντελεστής της 1, $C_2(t)$ ο συντελεστής της 2 στην κυματοσυνάρτηση του διαταραγμένου συστήματος.

(β') RWA θα πει πως αγνοούμε του ταχείς όρους, δηλαδή αυτούς με το Σ . Επειδή $\omega \sim \Omega \Rightarrow |\Delta| \ll \Sigma$. Άρα οι εξισώσεις (24) - (25) γίνονται

$$\dot{C}_1(t) = C_2(t) \frac{i\Omega_R}{2} e^{i\Delta t} \quad (29)$$

$$\dot{C}_2(t) = C_1(t) \frac{i\Omega_R}{2} e^{-i\Delta t} \quad (30)$$

και για $\Delta = 0$ θα ισχύει

$$\dot{C}_1(t) = C_2(t) \frac{i\Omega_R}{2} \quad (31)$$

$$\dot{C}_2(t) = C_1(t) \frac{i\Omega_R}{2} \quad (32)$$

Δηλαδή σε μορφή πίνακα

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{i\Omega_R}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dot{\chi}(t) = iA\chi(t) \quad (33)$$

Δηλαδή η πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Omega_R}{2} \\ \frac{\Omega_R}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής

$$\chi(t) = \vec{v} e^{i\lambda t}, \quad (35)$$

οπότε, $\dot{\chi}(t) = i\lambda \vec{v} e^{i\lambda t}$, επομένως προκύπτει το πρόβλημα ιδιοανυσμάτων - ιδιοτιμών

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}. \quad (36)$$

Και για μη τετριμμένες λύσεις πρέπει

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{\Omega_R}{2} \\ \frac{\Omega_R}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (37)$$

από όπου προκύπτουν οι ιδιοτιμές

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\Omega_R}{2} \quad (38)$$

Για την 1η ιδιοτιμή $\lambda_1 = \frac{\Omega_R}{2}$ προκύπτει το κανονικοποιημένο ιδιοάνυσμα

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

διότι $\begin{bmatrix} 0 & \frac{\Omega_R}{2} \\ \frac{\Omega_R}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \frac{\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_{11} = v_{21}$ και το $\frac{1}{\sqrt{2}}$ προκύπτει από την κανονικοποίηση. (40)

και για τη 2η ιδιοτιμή $\lambda_2 = -\frac{\Omega_R}{2}$ προκύπτει το κανονικοποιημένο ιδιοάνυσμα

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

διότι $\begin{bmatrix} 0 & \frac{\Omega_R}{2} \\ \frac{\Omega_R}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = -\frac{\Omega_R}{2} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_{12} = -v_{22}$ και το $\frac{1}{\sqrt{2}}$ προκύπτει από την κανονικοποίηση. (42)

Κάθε ένα από τα $\vec{v}_1 e^{i\lambda_1 t}$, $\vec{v}_2 e^{i\lambda_2 t}$ αποτελεί μερική λύση, άρα η γενική λύση είναι

$$\chi(t) = \sigma_1 \vec{v}_1 e^{i\lambda_1 t} + \sigma_2 \vec{v}_2 e^{i\lambda_2 t} \quad (43)$$

ή αλλιώς,

$$C_1(t) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \quad (44)$$

$$C_2(t) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \quad (45)$$

(Υ') Για $t = 0$

$$C_1(0) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \Leftrightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = e^{i\theta} \quad (46)$$

$$C_2(0) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \Leftrightarrow \sigma_1 - \sigma_2 = e^{i\varphi} \quad (47)$$

Οπότε,

$$\sigma_1 = \frac{e^{i\theta} + e^{i\varphi}}{2} \quad (48)$$

$$\sigma_2 = \frac{e^{i\theta} - e^{i\varphi}}{2} \quad (49)$$

Άρα,

$$C_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{e^{i\theta} + e^{i\varphi}}{2} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{e^{i\theta} - e^{i\varphi}}{2} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \right] \quad (50)$$

$$C_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{e^{i\theta} + e^{i\varphi}}{2} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{e^{i\theta} - e^{i\varphi}}{2} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \right] \quad (51)$$

Δηλαδή, όντως υπάρχουν ταλαντώσεις της πιθανότητας παρουσίας του ηλεκτρονίου στις στάθμες του $\Delta\Sigma$ με αυτές τις αρχικές συνθήκες.

Όταν $\theta = \phi$, τότε

$$\frac{e^{i\theta} + e^{i\varphi}}{2} = \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta}}{2} = e^{i\theta} \quad \text{και} \quad \frac{e^{i\theta} - e^{i\varphi}}{2} = \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta}}{2} = 0 \quad (52)$$

Οπότε,

$$C_1(t) = C_2(t) = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} \quad (53)$$

Συνεπώς,

$$|C_1(t)|^2 = |C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} \quad (54)$$

Οι πιθανότητες παρουσίας του ηλεκτρονίου στις δύο στάθμες είναι ανεξάρτητες του χρόνου και ίσες. Δηλαδή, τότε δεν υπάρχει ταλάντωση της πιθανότητας.

(δ') Από τις εξισώσεις (50)-(51) λαμβάνουμε

$$2\sqrt{2} C_1(t) = (e^{i\theta} + e^{i\varphi}) e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + (e^{i\theta} - e^{i\varphi}) e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \quad (55)$$

$$2\sqrt{2} C_2(t) = (e^{i\theta} + e^{i\varphi}) e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - (e^{i\theta} - e^{i\varphi}) e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \quad (56)$$

ή

$$2\sqrt{2} C_1(t) = e^{i\theta} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + e^{i\varphi} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + e^{i\theta} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} - e^{i\varphi} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \quad (57)$$

$$2\sqrt{2} C_2(t) = e^{i\theta} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + e^{i\varphi} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - e^{i\theta} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} + e^{i\varphi} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \quad (58)$$

ή

$$2\sqrt{2} C_1(t) = e^{i\theta} 2 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + e^{i\varphi} 2i \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \quad (59)$$

$$2\sqrt{2} C_2(t) = e^{i\theta} 2i \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + e^{i\varphi} 2 \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \quad (60)$$

Τελικά προκύπτει

$$|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin(\theta - \varphi) \sin(\Omega_R t) \quad (61)$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin(\theta - \varphi) \sin(\Omega_R t) \quad (62)$$

Οπότε, η περίοδος είναι

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_R} \quad (63)$$

και η διαφορά των πιθανοτήτων είναι

$$|C_1|^2 - |C_2|^2 = \sin(\theta - \varphi) \sin \Omega_R t \quad (64)$$

Σε απόλυτες τιμές

$$\max(|C_1|^2 - |C_2|^2) = |\sin(\theta - \varphi)| \quad (65)$$

$$\min(|C_1|^2 - |C_2|^2) = 0 \quad (66)$$

Επειδή $\langle \sin \Omega_R t \rangle = 0$, οι αντίστοιχες μέσες τιμές είναι

$$\langle |C_1|^2 \rangle = \langle |C_2|^2 \rangle = \frac{1}{2} \quad (67)$$

Θέμα 3. (3 μονάδες) Θεωρήστε τις διαφορικές εξισώσεις ρυθμών LASER στην αδιάστατη μορφή

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1}, \quad (68)$$

$$\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \varrho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2, \quad (69)$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \left\{ \frac{A'}{A} \nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1) \right\} \frac{1}{\tau_0(1 - \tau_1)}. \quad (70)$$

Στη στάσιμη κατάσταση, αγνοώντας το $\frac{A'}{A} \ll 1$, ισχύουν οι εξισώσεις

$$\nu_1 = \tau_1 r_N, \quad \forall r_N \quad (71)$$

$$\nu_2 = \begin{cases} r_N, & \forall r_N \leq 1 \\ \tau_1 r_N + (1 - \tau_1), & \forall r_N \geq 1 \end{cases} \quad (72)$$

$$\varrho = \begin{cases} 0, & \forall r_N \leq 1 \\ r_N - 1, & \forall r_N \geq 1 \end{cases} \quad (73)$$

Η αριθμητική επίλυση των Εξ. (68),(69),(70) φαίνεται στην Εικόνα 2, όπου μεταβάλλουμε μόνο μία από τις παραμέτρους r_N , τ_1 , τ_0 , $\frac{A'}{A}$.

(α') Ποιά παράμετρος μεταβάλλεται; Ποια είναι η τιμή της μεταβαλλομένης παραμέτρου σε κάθε εικόνα;

(β') Πόσος είναι ο λόγος των χρόνων ζωής των σταθμών, $\frac{t_1}{t_2}$;

(γ') Γιατί υπάρχει διαφορά στο χρόνο που χρειάζεται να γίνει η ϱ αισθητή στις κάτω εικόνες;

(δ') Γιατί πριν αρχίσει να γίνεται η ϱ αισθητή, σε όλες τις εικόνες, $\frac{\nu_2}{\nu_1} = 2$;

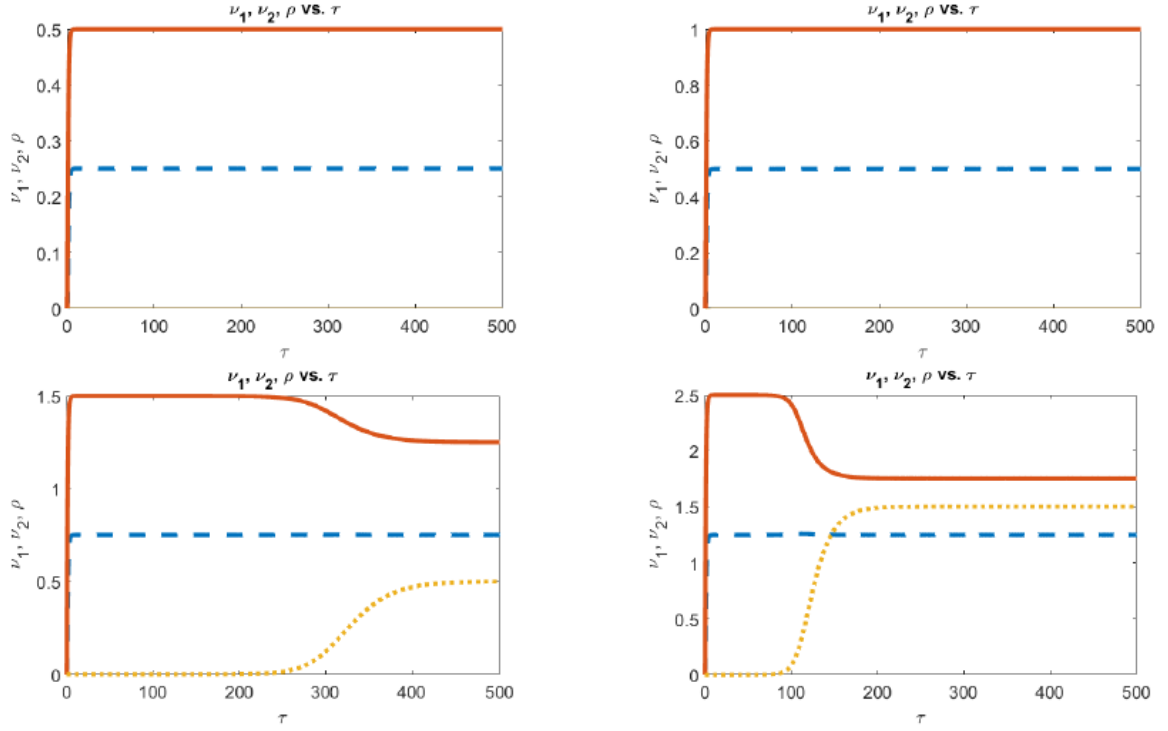
Λύση Θέματος 3

(α') Επειδή στη στάσιμη κατάσταση, στα δύο πρώτα διαγράμματα $\varrho = 0$, ενώ στα δύο επόμενα $\varrho \neq 0$, μεταβάλλεται η r_N , δείτε π.χ. την εξίσωση (73) για την στάσιμη κατάσταση. Στο 1ο διάγραμμα, στη στάσιμη κατάσταση, $\varrho = 0$, άρα $r_N < 1$ και από την εξίσωση (72), $\nu_2 = r_N \Rightarrow 0.5 = r_N \Rightarrow r_N = 0.5$. Στο 2ο διάγραμμα, στη στάσιμη κατάσταση, $\varrho = 0$, άρα $r_N < 1$ και από την εξίσωση (72), $\nu_2 = r_N \Rightarrow 1 = r_N \Rightarrow r_N = 1$. Στο 3ο διάγραμμα, στη στάσιμη κατάσταση, $\varrho \neq 0$, άρα $r_N > 1$ και από την εξίσωση (73), $\varrho = r_N - 1 \Rightarrow 0.5 = r_N - 1 \Rightarrow r_N = 1.5$. Στο 4ο διάγραμμα, στη στάσιμη κατάσταση, $\varrho \neq 0$, άρα $r_N > 1$ και από την εξίσωση (73), $\varrho = r_N - 1 \Rightarrow 1.5 = r_N - 1 \Rightarrow r_N = 2.5$.

(β') Όταν $\varrho = 0$, $\nu_1 = \tau_1 r_N$ και $\nu_2 = r_N$, επομένως $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \tau_1$. Στις δύο πρώτες εικόνες στη στάσιμη κατάσταση έχουμε $\frac{0.25}{0.5} = \frac{0.5}{1} = \frac{1}{2} = \tau_1$.

(γ') Αύξηση του r_N σημαίνει αύξηση του $\frac{d\nu_2}{d\tau}$ στην εξίσωση (69), άρα αυξάνεται γρηγορότερα το ν_2 . Τότε στην εξίσωση (70), αυξάνεται ο όρος $\frac{A'}{A} \nu_2$, άρα αυξάνεται το $\frac{d\varrho}{d\tau}$, άρα αυξάνεται το ϱ .

(δ') Πριν αρχίσει να γίνεται η ϱ αισθητή, σε όλες τις εικόνες, ο λόγος $\frac{\nu_2}{\nu_1}$ ισούται με το λόγο των χρόνων ζωής της άνω στάθμης προς τον χρόνο ζωής της κάτω στάθμης, δηλαδή οι πληθυσμοί μοιράζονται στις στάθμες αναλόγως με τον χρόνο ζωής των. Αλλιώς, αφού εκεί έχουμε (για λίγο) σχεδόν στάσιμη κατάσταση, θα προκύπτει πάλι $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{r_N}{\tau_1 r_N} = \frac{1}{\tau_1} = 2$.



Εικόνα 2 Αλλάζουμε μία παράμετρο μόνο και παρακολουθούμε τη χρονική εξέλιξη των Εξ. (68),(69),(70).

Θέμα 4. (3 μονάδες) Δίνεται η κατάσταση

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t)|\downarrow, 1\rangle + c_2(t)|\uparrow, 0\rangle. \quad (74)$$

Να λυθεί το χρονοεξαρτημένο πρόβλημα

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (75)$$

για τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings,

$$\hat{H} = \hat{H}_{JC} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g \left(\hat{S}_+\hat{a} + \hat{S}_-\hat{a}^\dagger \right), \quad (76)$$

με αρχικές συνθήκες $c_1(0) = 0$, $c_2(0) = 1$. Δηλαδή βρείτε:

- (α') τι ταλαντώσεις κάνουν τα $|c_1(t)|^2$, $|c_2(t)|^2$, $\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$, $\langle\hat{S}_+\hat{S}_-\rangle$ και ζωγραφίστε τις,
- (β') την αντίστοιχη περίοδο T_R και το μέγιστο ποσοστό μεταβιβάσεως A_R ,
- (γ') τις μέσες τιμές των $\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$, $\langle\hat{S}_+\hat{S}_-\rangle$,
- (δ') το μέσο ρυθμό μεταβιβάσεως k από την άνω στάθμη στην κάτω στάθμη.

Λύση Θέματος 4

Θέτοντας την εξίσωση (74) και την εξίσωση (76) στην εξίσωση (75), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 i\hbar\dot{c}_1(t)|\downarrow, 1\rangle + i\hbar\dot{c}_2(t)|\uparrow, 0\rangle = & c_1(t)\hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}|\downarrow, 1\rangle + c_1(t)\hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_-|\downarrow, 1\rangle + \\
 & c_1(t)\hbar g\hat{S}_+\hat{a}|\downarrow, 1\rangle + c_1(t)\hbar g\hat{S}_-\hat{a}^\dagger|\downarrow, 1\rangle + \\
 & c_2(t)\hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}|\uparrow, 0\rangle + c_2(t)\hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_-|\uparrow, 0\rangle + \\
 & c_2(t)\hbar g\hat{S}_+\hat{a}|\uparrow, 0\rangle + c_2(t)\hbar g\hat{S}_-\hat{a}^\dagger|\uparrow, 0\rangle.
 \end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned}
 i\hbar\dot{c}_1(t)|\downarrow, 1\rangle + i\hbar\dot{c}_2(t)|\uparrow, 0\rangle = & c_1(t)\hbar\omega |1|\downarrow, 1\rangle + c_1(t)\hbar\Omega|0, 1\rangle + \\
 & c_1(t)\hbar g |1|\uparrow, 0\rangle + c_1(t)\hbar g\sqrt{2}|0, 2\rangle + \\
 & c_2(t)\hbar\omega |0|\uparrow, 0\rangle + c_2(t)\hbar\Omega|\uparrow, 0\rangle + \\
 & c_2(t)\hbar g |0|0, 0\rangle + c_2(t)\hbar g |1|\downarrow, 1\rangle.
 \end{aligned} \tag{78}$$