Τομέας Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Κβαντική Οπτική και Lasers.

Εξέταση της 6ης Ιουλίου 2013. Διδάσκων Κ. Σιμσερίδης

Θέμα 1.

Πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας, μέλανος σώματος σε θερμική ισορροπία, $\rho(\nu,T)\mathrm{d}\nu$. Δίνεται η τελική έκφραση του νόμου του Planck:

$$\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}$$

1. Τι είναι «μέλαν σώμα»; Ποιες είναι οι μονάδες μετρήσεως της $\rho(\nu,T)$ στο Διεθνές Σύστημα;
2. Σε τι διαφέρουν στην τελική μαθηματική έκφραση οι νόμοι Planck, Rayleigh-Jeans, Wien;
3. Τι είναι η «υπεριώδης καταστροφή» και το «πρόβλημα μακρινού υπέρυθρου»;
4. Αποδείξτε το νόμο Stefan-Boltzmann στη μορφή $u(T) = aT^4$ όπου u είναι η πυκνότητα ενέργειας που μετριέται στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων σε $\mathrm{J/m^3}$. Με τι ισούται η σταθερά a;
5. Θεωρώντας δεδομένο ότι η ροή φωτονίων είναι $\Phi = (N/4)c$, όπου N η πυκνότητα φωτονίων, αποδείξτε ότι $I = (c/4)\,u$. I είναι η εκπεμπόμενη ισχύς ανά μονάδα επιφανείας.
6. Αποδείξτε το νόμο Stefan-Boltzmann στη μορφή $I = \sigma T^4$. Με τι ισούται η σταθερά σ;

Θέμα 2.

Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings

$$\hat{H}_{JC}^{m} = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^m(\hat{S}_+\hat{a}_m + \hat{S}_-\hat{a}_m^\dagger)$$

1. Εξηγήστε όλα τα σύμβολα που περιέχει.
2. Να υπολογιστούν τα $< \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m >$, $< \hat{S}_+\hat{S}_- >$, $< \hat{S}_+\hat{a}_m >$, $<\hat{S}_-\hat{a}_m^\dagger>$ για την κατάσταση:
   $|\psi_A(t)> = c_1(t)\,|\downarrow, n> + c_2(t)\,|\uparrow, n-1>$

Θεωρήστε τώρα αρχικές συνθήκες $c_1(0)=1$, $c_2(0)=0$.

3. Αποδείξτε ότι οι συντελεστές $c_1(t)$ και $c_2(t)$ ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$i\begin{pmatrix}\dot{c_1}\\ \dot{c_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\omega_m & g^m\sqrt{n} \\ g^m\sqrt{n} & \Omega + (n-1)\omega_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

Ορίζουμε τη «γενικευμένη συχνότητα Rabi» $\Omega_n = \left[\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2 + g^2 n\right]^{1/2}$, όπου για απλότητα θέσαμε τη «συχνότητα Rabi» $g^m = g$ καθώς και $\omega_m = \omega$. Περαιτέρω αποδεικνύεται ότι $|c_2(t)|^2 = \frac{ng^2}{\Omega_n^2}\sin^2(\Omega_n t)$.

4. Να αποδώσετε γραφικά τη χρονική εξέλιξη της «αναμενόμενης» ή «μέσης» τιμής του αριθμού των φωτονίων στην κοιλότητα.
5. Να αποδώσετε γραφικά τη χρονική εξέλιξη της «αναμενόμενης» ή «μέσης» τιμής του αριθμού των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη του δισταθμικού συστήματος.
6. Δείξτε ότι η συχνότητα Rabi καθορίζει (Ι) το πλάτος και (ΙΙ) το χρόνο μεταξύ διαδοχικών μεγίστων ή ελαχίστων των «ταλαντώσεων Rabi».

Θέμα 3.

Θεωρήστε το laser He-Ne. Στη στάσιμη κατάσταση ισχύουν οι εξισώσεις:

$$AN_2 + B\rho(N_2 - N_1) - \frac{N_1}{t_1} = 0 \qquad (\mathrm{A})$$

$$R + B\rho(N_1 - N_2) - AN_2 = 0 \qquad (\mathrm{B})$$

$$B\rho(N_2 - N_1) = \frac{\rho}{t_0\left(\frac{h\nu}{V}\right)F(\nu)} \qquad (\Gamma)$$

1. Εξηγήστε όλα τα σύμβολα.
2. Τι σημαίνει «στάσιμη κατάσταση»;
3. Εξηγήστε πως προκύπτει η κρίσιμη άντληση R_C.
4. Βρείτε τα N_1, N_2, ρ και την αναστροφή πληθυσμού ΔN συναρτήσει των R, t_1, t_2, R_C, B.
5. Αποδώστε γραφικά τα N_1, N_2, ΔN συναρτήσει του R.
6. Αποδώστε γραφικά τη ρ συναρτήσει του R.

<u>*Δίνεται:*</u> $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{\pi^4}{15}$

ΘΕΜΑ 1ο

1. Μέλαν σώμα είναι ένα εξιδανικευμένο φυσικό σώμα το οποίο απορροφά όλη την προσπίπτουσα σε αυτό ηλεκτρομαγνητική (ΗΜ) ακτινοβολία ανεξαρτήτως συχνότητας και ανεξαρτήτως γωνίας προσπτώσεως... Ένα μέλαν σώμα έχει

συντελεστή απορροφήσεως $a=1$

» ανακλάσεως $\rho=0$

» διελεύσεως $\tau=0$

...

Αν το μέλαν σώμα βρίσκεται σε θερμική ισορροπία πρέπει να επανεκπέμπει ΗΜ ακτινοβολία η οποία καλείται ακτινοβολία μέλανος σώματος... Εξ ορισμού ένα μέλαν σώμα έχει συντελεστή εκπομπής $\varepsilon=1$.

Μονάδες $\rho(\nu,T)$ στο S.I. $\quad \dfrac{J}{m^3\,Hz}=\dfrac{J\,s}{m^3}$

2.

$\rho_{RJ}=\rho_0 x^2$ Rayleigh–Jeans

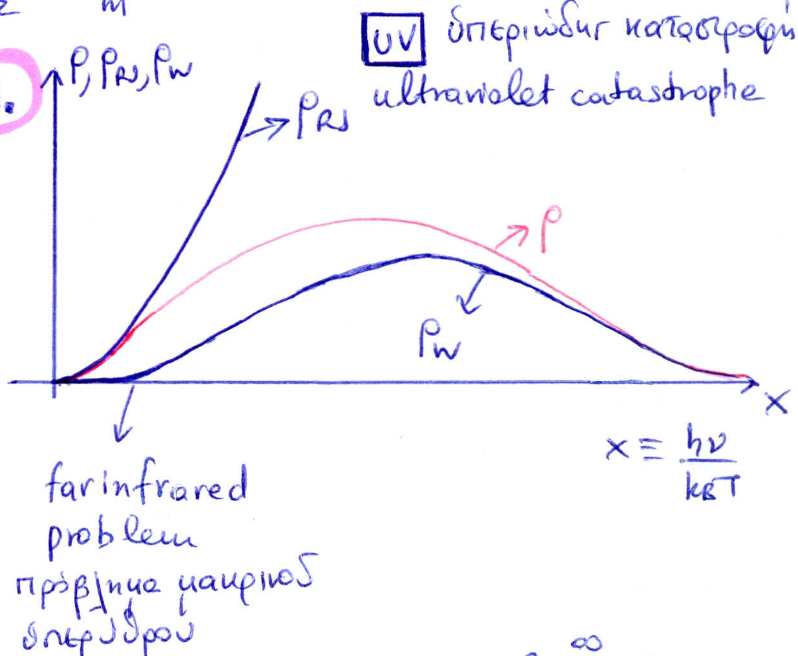
$\rho_W=\rho_0\dfrac{x^3}{e^x}$ Wien

$\rho=\rho_0\dfrac{x^3}{e^x-1}$ Planck

$$\rho_0=\frac{8\pi}{h^2}\left(\frac{k_BT}{c}\right)^3 \qquad x\equiv\frac{h\nu}{k_BT}$$

$$[\rho_0]=\frac{J\,s}{m^3}=\frac{J}{m^3\,Hz}$$

3.



4.

$$u(T):=\int_0^\infty \rho(\nu,T)\,d\nu=\int_0^\infty\frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}\,d\nu\overset{✡}{=}\frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{k_BT}{h}\left(\frac{k_BT}{h}\right)^3\underbrace{\int_0^\infty\frac{x^3}{e^x-1}\,dx}_{\text{ΔΙΝΕΤΑΙ}\,=\,\frac{\pi^4}{15}}$$

$$✡\quad x\equiv\frac{h\nu}{k_BT}\Longrightarrow \nu=\frac{k_BTx}{h}\Longrightarrow d\nu=\frac{k_BT}{h}dx$$

ΑΡΑ $\quad u(T)=\underbrace{\left(\dfrac{8\pi^5k_B^4}{15c^3h^3}\right)}_{\alpha}T^4$

5.

$$\left.\begin{array}{lr}\Phi=\dfrac{N}{4}c & \dfrac{m}{m^3\cdot s}\\[2mm] I=\Phi\langle h\nu\rangle & \dfrac{J}{m^2 s}\\[2mm] \langle h\nu\rangle=\dfrac{u}{N} & \dfrac{J\,\cancel{m^3}}{\cancel{m^3}}\end{array}\right\}\Longrightarrow I=\frac{N}{4}c\cdot\frac{u}{N}\Longrightarrow I=\frac{c}{4}u$$

6.

$$\left.\begin{array}{l}I=\dfrac{c}{4}u\\[2mm] u=\dfrac{8\pi^5k_B^4}{15c^3h^3}T^4\end{array}\right\}\quad I=\underbrace{\left(\frac{2\pi^5k_B^4}{15c^2h^3}\right)}_{\sigma}T^4$$

ΘΕΜΑ 2ο $\qquad \hat{H}^m_{JC} = \hbar\omega_m \hat{a}^\dagger_m \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+\hat{a}_m + \hat{S}_-\hat{a}^\dagger_m)$

1. Η $\hat{H}^m_{JC}$ προκύπτει από τη $\hat{H}^m_R$ (Rabi Hamiltonian) για το διστάθμιο άτομο

$$\hat{H}^m_R = \hbar\omega_m \hat{a}^\dagger_m \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ + \hat{S}_-)(\hat{a}^\dagger_m + \hat{a}_m)$$

όπου αγνοούμε τους όρους $\hat{S}_+\hat{a}^\dagger_m$ και $\hat{S}_-\hat{a}_m$ που δε διατηρούν την ενέργεια αν είχαμε μόνο τον τρόπο m.

$\hat{a}^\dagger_m, \hat{a}_m$: τελεστές δημιουργίας και καταστροφής για τον m τρόπο δηλαδή για <u>φωτόνια</u> → μποζόνια συχνότητας ω_m.

$\hat{S}_+, \hat{S}_-$: τελεστές ανύψωσης και καταβίβασης / αναβίβασης και καταβίβασης για τα <u>ηλεκτρόνια</u> → φερμιόνια

$\hbar\Omega = E_2 - E_1$: η ενεργειακή διαφορά των δύο σταθμών.

g^m η συχνότητα Rabi

2. $|\psi_A(t)\rangle = c_1(t)|\downarrow, n\rangle + c_2(t)|\uparrow, n-1\rangle$

$$\Rightarrow \langle \hat{a}^\dagger_m \hat{a}_m \rangle_A = \langle \psi_A(t) | \hat{a}^\dagger_m \hat{a}_m | \psi_A(t)\rangle = \{ c_1^*(t)\langle\downarrow,n| + c_2^*(t)\langle\uparrow,n-1| \} \hat{a}^\dagger_m \hat{a}_m \{ c_1(t)|\downarrow,n\rangle + c_2(t)|\uparrow,n-1\rangle \}$$

$$= |c_1(t)|^2 \langle\downarrow,n|\hat{a}^\dagger_m\hat{a}_m|\downarrow,n\rangle + c_1^*(t)c_2(t)\langle\downarrow,n|\hat{a}^\dagger_m\hat{a}_m|\uparrow,n-1\rangle +$$
$$c_2^*(t)c_1(t)\langle\uparrow,n-1|\hat{a}^\dagger_m\hat{a}_m|\downarrow,n\rangle + |c_2(t)|^2\langle\uparrow,n-1|\hat{a}^\dagger_m\hat{a}_m|\uparrow,n-1\rangle =$$
$$= |c_1(t)|^2 n\cdot 1 + c_1^*(t)c_2(t)\cdot(n-1)\cdot 0 + c_2^*(t)c_1(t)\,n\cdot 0 + |c_2(t)|^2(n-1)\cdot 1 =$$
$$= n\cdot|c_1(t)|^2 + n|c_2(t)|^2 - |c_2(t)|^2 = n - |c_2(t)|^2 \Rightarrow \boxed{\langle \hat{a}^\dagger_m \hat{a}_m\rangle_A = n - |c_2(t)|^2}$$

$$\Rightarrow \langle \hat{S}_+\hat{S}_-\rangle_A = \langle\psi_A(t)|\hat{S}_+\hat{S}_-|\psi_A(t)\rangle = \{c_1^*(t)\langle\downarrow,n| + c_2^*(t)\langle\uparrow,n-1|\}\hat{S}_+\hat{S}_-\{c_1(t)|\downarrow,n\rangle + c_2(t)|\uparrow,n-1\rangle\}$$

$$= |c_1(t)|^2\langle\downarrow,n|\hat{S}_+\hat{S}_-|\downarrow,n\rangle + c_1^*(t)c_2(t)\langle\downarrow,n|\hat{S}_+\hat{S}_-|\uparrow,n-1\rangle +$$
$$c_2^*(t)c_1(t)\langle\uparrow,n-1|\hat{S}_+\hat{S}_-|\downarrow,n\rangle + |c_2(t)|^2\langle\uparrow,n-1|\hat{S}_+\hat{S}_-|\uparrow,n-1\rangle =$$
$$= |c_1(t)|^2\cdot 0 + c_1^*(t)c_2(t)\underbrace{\langle\downarrow,n|\uparrow,n-1\rangle}_{0} + c_2^*(t)c_1(t)\cdot 0 + |c_2(t)|^2\cdot 1 \Rightarrow \boxed{\langle\hat{S}_+\hat{S}_-\rangle_A = |c_2(t)|^2}$$

$$\Rightarrow \langle\hat{S}_+\hat{a}_m\rangle_A = \langle\psi_A(t)|\hat{S}_+\hat{a}_m|\psi_A(t)\rangle = \{c_1^*(t)\langle\downarrow,n| + c_2^*(t)\langle\uparrow,n-1|\}\hat{S}_+\hat{a}_m\{c_1(t)|\downarrow,n\rangle + c_2(t)|\uparrow,n-1\rangle\} =$$

$$= |c_1(t)|^2\langle\downarrow,n|\hat{S}_+\hat{a}_m|\downarrow,n\rangle + c_1^*(t)c_2(t)\langle\downarrow,n|\hat{S}_+\hat{a}_m|\uparrow,n-1\rangle +$$
$$c_2^*(t)c_1(t)\langle\uparrow,n-1|\hat{S}_+\hat{a}_m|\downarrow,n\rangle + |c_2(t)|^2\langle\uparrow,n-1|\hat{S}_+\hat{a}_m|\uparrow,n-1\rangle =$$
$$= |c_1(t)|^2\sqrt{n}\underbrace{\langle\downarrow,n|\uparrow,n-1\rangle}_{0} + c_1^*(t)c_2(t)\cdot 0 + c_2^*(t)c_1(t)\sqrt{n}\langle\uparrow,n-1|\uparrow,n-1\rangle + |c_2(t)|^2\,0$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle\hat{S}_+\hat{a}_m\rangle_A = c_2^*(t)c_1(t)\sqrt{n}}$$

Ομοίως

$$\boxed{\langle\hat{S}_-\hat{a}^\dagger_m\rangle_A = c_1^*(t)c_2(t)\sqrt{n}}$$

3. $c_1(0)=1 \quad c_2(0)=0$ αρχικές συνθήκες

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_A(t)\rangle = \hat{H}|\psi_A(t)\rangle, \quad \hat{H}=\hat{H}^m_{JC} = \hbar\omega_m \hat{a}_m^{+}\hat{a}_m + \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^m(\hat{S}_+\hat{a}_m + \hat{S}_-\hat{a}_m^{+})$$

$$A' = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\{c_1(t)|\downarrow,n\rangle + c_2(t)|\uparrow,n-1\rangle\} = i\hbar\dot{c}_1|\downarrow,n\rangle + i\hbar\dot{c}_2|\uparrow,n-1\rangle$$

$$\Delta' = \left(\hbar\omega_m\hat{a}_m^{+}\hat{a}_m + \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^m\hat{S}_+\hat{a}_m + \hbar g^m\hat{S}_-\hat{a}_m^{+}\right)\left(c_1(t)|\downarrow,n\rangle + c_2(t)|\uparrow,n-1\rangle\right)$$

$$= c_1\hbar\omega_m n|\downarrow,n\rangle + c_1\hbar\Omega\cdot 0 + c_1\hbar g^m\sqrt{n}|\uparrow,n-1\rangle + c_1\hbar g^m\cdot 0$$
$$c_2\hbar\omega_m(n-1)|\uparrow,n-1\rangle + c_2\hbar\Omega|\uparrow,n-1\rangle + c_2\hbar g^m\cdot 0 + c_2\hbar g^m\sqrt{n}|\downarrow,n\rangle$$

$$= c_1\hbar\omega_m n|\downarrow,n\rangle + c_1\hbar g^m\sqrt{n}|\uparrow,n-1\rangle +$$
$$c_2\hbar\omega_m(n-1)|\uparrow,n-1\rangle + c_2\hbar\Omega|\uparrow,n-1\rangle + c_2\hbar g^m\sqrt{n}|\downarrow,n\rangle$$

επί $\langle\downarrow,n|$
$$\left.\begin{aligned} A' &= i\hbar\dot{c}_1 \\ \Delta' &= c_1\hbar\omega_m n + c_2\hbar g^m\sqrt{n}\end{aligned}\right\} \Rightarrow i\dot{c}_1 = n\omega_m c_1 + \sqrt{n}g^m c_2$$

επί $\langle\uparrow,n-1|$
$$\left.\begin{aligned} A' &= i\hbar\dot{c}_2 \\ \Delta' &= c_1\hbar g^m\sqrt{n} + c_2\hbar\omega_m(n-1) + c_2\hbar\Omega\end{aligned}\right\} \Rightarrow i\dot{c}_2 = c_1 g^m\sqrt{n} + (\Omega + (n-1)\omega_m)c_2$$

$$\Rightarrow i\begin{pmatrix}\dot{c}_1\\ \dot{c}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\omega_m & \sqrt{n}g^m \\ \sqrt{n}g^m & \Omega+(n-1)\omega_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

4. 5. 6. σημειώσεις...