Τομέας Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Κβαντική Οπτική και Lasers.

Εξέταση της 4ης Σεπτεμβρίου 2018. Διδάσκων Κ. Σιμσερίδης

Θέμα 1.

(α΄) Να ελεγχθούν οι $3s, 2p_z, 3d_{z^2}$ ως προς την ομοτιμία και
να βρείτε πόσες και ποιες κομβικές επιφάνειες έχει κάθε μία από τις $3s, 2p_z, 3d_{z^2}$.

(β΄) Να ελεγχθεί αν μεταβάσεις $1s \leftrightarrow 2p_z$, $1s \leftrightarrow 3p_z$, $2s \leftrightarrow 3p_z$ είναι επιτρεπόμενες ή απαγορευμένες στα πλαίσια της προσεγγίσεως διπόλου κι αν ισχύουν οι κανόνες επιλογής $\Delta l = \pm 1, \Delta m = 0, \pm 1$.

(γ΄) Να συγκριθούν οι ισχύες των οπτικών μεταβάσεων, στα πλαίσια της προσεγγίσεως διπόλου, $1s \leftrightarrow 2p_z$, $1s \leftrightarrow 3p_z$.

(δ΄) $\boldsymbol{p_{k_1 k_2}} := \int_{\pi\alpha\nu\tau o\acute{\upsilon}} dV\, \Phi^*_{k_1}(r)(-e)r\Phi_{k_2}(r)$ είναι τα στοιχεία πίνακα της διπολικής ροπής. Εξηγήστε γιατί εάν το στοιχείο πίνακα της διπολικής ροπής μηδενίζεται, δεν υπάρχει τέτοια οπτική μετάβαση.

(ε΄) Σε τι ενέργεια, συχνότητα, μήκος κύματος αντιστοιχούν οι μεταβάσεις $1s \leftrightarrow 2p_z$, $1s \leftrightarrow 3p_z$, $2s \leftrightarrow 3p_z$. Ποιά από αυτές τις μεταβάσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για LASER στο ορατό;

Θέμα 2.

(α΄) Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings ενός ΗΜ τρόπου. Υπολογίστε τα
$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$, $\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger \rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{S}_- \rangle$, $\langle \hat{S}_-\hat{S}_+ \rangle$, $< \hat{S}_+\hat{a} >$, $< \hat{S}_-\hat{a}^\dagger >$, $< \hat{S}_+\hat{a}^\dagger >$, $< \hat{S}_-\hat{a} >$
για την κατάσταση:

$$|\psi(t) >= \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \,|\downarrow 1 > + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \,|\uparrow 0 >$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας τη χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schrödinger για την παραπάνω κατάσταση, δείξτε ότι ικανοποιείται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix} -\Omega \dfrac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \Omega \dfrac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(γ΄) Ορίζοντας $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ και δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής $\vec{x}(t) = \vec{v}e^{-i\lambda t}$, δείξτε ότι

$$\lambda = \frac{\omega + \Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega - \Omega}{2}\right)^2 + g^2}$$

(δ΄) Βρείτε τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα $\vec{v}$ των λ, όταν ο αποσυντονισμός μηδενίζεται.

(ε΄) Βρείτε τι είδους ταλάντωση κάνει το ηλεκτρόνιο υπ' αυτές τις συνθήκες.

Τομέας Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Κβαντική Οπτική και Lasers.

Εξέταση της 4ης Σεπτεμβρίου 2018. Διδάσκων Κ. Σιμσερίδης

Θεωρήστε τις ιδιοσυναρτήσεις του ατόμου του Υδρογόνου $\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)\Theta_{lm}(\theta)\Phi_m(\varphi) = \Phi_k(\mathbf{r})$, όπου $k = \{n, l, m\}$ ο συλλογικός κβαντικός αριθμός. Δηλαδή n = 1, 2, 3, ... είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός, l = 0, 1, 2, ... , n–1 είναι ο τροχιακός κβαντικός αριθμός και m = –l, –l+1, ... , l–1, l είναι ο μαγνητικός κβαντικός αριθμός. Συγκεκριμένα δίνονται οι εξής:

$\Psi_{100}(r,\theta,\varphi) = (\pi\alpha_o^3)^{-1/2}\, e^{-\frac{r}{a_0}}$ $\qquad \Psi_{100} \equiv 1s$

$\Psi_{200}(r,\theta,\varphi) = (32\,\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,(2-\frac{r}{a_0})\, e^{-\frac{r}{2a_0}}$ $\qquad \Psi_{200} \equiv 2s$

$\Psi_{210}(r,\theta,\varphi) = (32\,\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{r}{a_0}\,\cos\theta\, e^{-\frac{r}{2a_0}}$ $\qquad \Psi_{210} \equiv 2p_z$

$\Psi_{21\pm1}(r,\theta,\varphi) = (64\,\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{r}{a_0}\,\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}\, e^{-\frac{r}{2a_0}}$ $\qquad (\Psi_{21+1}+\Psi_{21-1})/\sqrt{2} \equiv 2p_x$

$(\Psi_{21+1}-\Psi_{21-1})/i\sqrt{2} \equiv 2p_y$

$\Psi_{300}(r,\theta,\varphi) = (19683\,\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,(27-18\frac{r}{a_0}+2\frac{r^2}{a_0^2})\, e^{-\frac{r}{3a_0}}$ $\qquad \Psi_{300} \equiv 3s$

$\Psi_{310}(r,\theta,\varphi) = (6561\,\pi\alpha_o^3/2)^{-\frac{1}{2}}\,(6-\frac{r}{a_0})\,\frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}}\cos\theta$ $\qquad \Psi_{310} \equiv 3p_z$

$\Psi_{31\pm1}(r,\theta,\varphi) = (6561\,\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{3a_0}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$ $\qquad (\Psi_{31+1}+\Psi_{31-1})/\sqrt{2} \equiv 3p_x$

$(\Psi_{31+1}-\Psi_{31-1})/i\sqrt{2} \equiv 3p_y$

$\Psi_{320}(r,\theta,\varphi) = (39366\,\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3a_0}}(3\cos^2\theta-1)$ $\qquad \Psi_{320} \equiv 3d_{z^2}$

$\Psi_{32\pm1}(r,\theta,\varphi) = (6561\,\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3a_0}}\sin\theta\,\cos\theta\, e^{\pm i\varphi}$ $\qquad (\Psi_{32+1}+\Psi_{32-1})/\sqrt{2} \equiv 3d_{xz}$

$(\Psi_{32+1}-\Psi_{32-1})/i\sqrt{2} \equiv 3d_{yz}$

$\Psi_{32\pm2}(r,\theta,\varphi) = (26244\,\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3a_0}}\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\varphi}$ $\qquad (\Psi_{32+2}+\Psi_{32-2})/\sqrt{2} \equiv 3d_{x^2-y^2}$

$(\Psi_{32+2}-\Psi_{32-2})/i\sqrt{2} \equiv 3d_{xy}$

Οι αντίστοιχες ιδιοενέργειες είναι $E_k = \hbar\Omega_k = -\frac{R_E}{n^2} = E_n$, δηλαδή υπάρχει εκφυλισμός ως προς l,m.

R_E = 13.6 eV είναι η ενέργεια Rydberg και a_0 είναι η ακτίνα Bohr. Θεωρήστε επίσης δεδομένα:

Α) $\int_0^\infty e^{-\gamma r}\, r^n\, dr = \gamma^{-(n+1)}\, n!$ όπου n = 1, 2, 3, ... και γ > 0.

Β) Σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ), η αντιστροφή ως προς την αρχή του συστήματος αναφοράς δηλαδή η πράξη $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ αντιστοιχεί στις αλλαγές $r' = r$, $\theta' = \pi - \theta$, $\varphi' = \pi + \varphi$.

Γ) Ισχύει η παρακάτω έκφραση για το διάνυσμα θέσεως:
$\mathbf{r} = \frac{r}{2}\sin\theta\left[(\hat{x}-i\hat{y})\, e^{i\varphi} + (\hat{x}+i\hat{y})\, e^{-i\varphi}\right] + r\cos\theta\,\hat{z}$.

Δ) $h \approx 4.1\times10^{-15}$ eV s και $c \approx 3\times10^{8}$ m/s.

ΘΕΜΑ 1

Υπάρχει λυμένο (εξέταση 13/6/2018)

ΘΕΜΑ 2

ⓐ $$\hat{H}_{JC} = \hbar\omega\hat{a}^{+}\hat{a} + \hbar\Omega\hat{S}_{+}\hat{S}_{-} + \hbar g\left(\hat{S}_{+}\hat{a} + \hat{S}_{-}\hat{a}^{+}\right)$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle$$

$$\langle\hat{a}^{+}\hat{a}\rangle = \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right)\hat{a}^{+}\hat{a}\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right)$$

$$= \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right)\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\cdot 1|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\, 0\,|\uparrow 0\rangle\right)$$

$$= \frac{e^{-i\Omega t}\, e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\langle\downarrow 1|\downarrow 1\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle\hat{a}\hat{a}^{+}\rangle = \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right)\left[1 + \hat{a}^{+}\hat{a}\right]\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right)$$

επειδή $[\hat{a}, \hat{a}^{+}] = 1 \Rightarrow \hat{a}\hat{a}^{+} = 1 + \hat{a}^{+}\hat{a}$

$$= \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right)\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\, 2\,|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\cdot 1\,|\uparrow 0\rangle\right)$$

$$= \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\cdot 2 + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\cdot 1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\langle\hat{S}_{+}\hat{S}_{-}\rangle = \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right)\hat{S}_{+}\hat{S}_{-}\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right)$$

$$= \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right)\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\emptyset 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right)$$

$$= \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\uparrow 0\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle\hat{S}_{-}\hat{S}_{+}\rangle = \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right)\hat{S}_{-}\hat{S}_{+}\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right)$$

$$= \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right)\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\emptyset 0\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\langle \hat{S}_+ \hat{a} \rangle = \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1 | + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0 | \right) \hat{S}_+ \hat{a} \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} | \downarrow 1 \rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} | \uparrow 0 \rangle \right)$$

$$= \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1 | + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0 | \right) \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \sqrt{1} | \uparrow 0 \rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} | \emptyset \emptyset \rangle \right)$$

$$= \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \sqrt{1} = \frac{e^{2i\Omega t}}{2}$$

$$\langle \hat{S}_- \hat{a}^\dagger \rangle = \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1 | + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0 | \right) \hat{S}_- \hat{a}^\dagger \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} | \downarrow 1 \rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} | \uparrow 0 \rangle \right)$$

$$= \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1 | + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0 | \right) \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \sqrt{2} | \emptyset 2 \rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \sqrt{1} | \downarrow 1 \rangle \right)$$

$$= \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \sqrt{1} = \frac{e^{-2i\Omega t}}{2}$$

$$\langle \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger \rangle = \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1 | + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0 | \right) \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} | \downarrow 1 \rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} | \uparrow 0 \rangle \right)$$

$$= \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1 | + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0 | \right) \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \sqrt{2} | \uparrow 2 \rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \sqrt{1} | \emptyset 1 \rangle \right)$$

$$= 0$$

$$\langle \hat{S}_- \hat{a} \rangle = \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1 | + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0 | \right) \hat{S}_- \hat{a} \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} | \downarrow 1 \rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} | \uparrow 0 \rangle \right)$$

$$= \left(\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 1 | + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 0 | \right) \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \sqrt{1} | \emptyset 0 \rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} | \downarrow 0 \rangle \right)$$

$$= 0$$

(β) $i\hbar \dfrac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_{JC}|\psi(t)\rangle$

$$A' = i\hbar\left(i\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle - i\Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right) = -\hbar\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \hbar\Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle$$

$$B' = \left[\hbar\omega \hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hbar\Omega \hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g(\hat{S}_+\hat{a} + \hat{S}_-\hat{a}^{\dagger})\right]\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right)$$

$$\hbar\omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot |\downarrow 1\rangle + \hbar\omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \cdot \phi \cdot |\uparrow \phi\rangle$$

$$+\hbar\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\phi 1\rangle + \hbar\Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle$$

$$+\hbar g \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\sqrt{1}|\uparrow 0\rangle + \hbar g \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\phi 0\rangle$$

$$+\hbar g \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\sqrt{2}|\phi 2\rangle + \hbar g \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\sqrt{1}|\downarrow 1\rangle =$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{επί } \langle\downarrow 1| \Rightarrow -\hbar\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} = \hbar\omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} + \hbar g \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ &\text{επί } \langle\uparrow 0| \Rightarrow \hbar\Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} = \hbar\Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} + \hbar g \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -\Omega \dfrac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \Omega \dfrac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

σύστημα

(γ) $i\dot{\vec{x}}(t)$ A $\vec{x}(t)$

(γ)

$$\vec{x}(t) := \begin{bmatrix} \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} i\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ -i\Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} -\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Το σύστημα γίνεται

$$\left. i\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) \right\} \Rightarrow$$

Δοκιμάζουμε λύσεις τη μορφή $\vec{x}(t) = \vec{u}\, e^{-i\lambda t}$

$$i\vec{u}(-i\lambda)\cancel{e^{-i\lambda t}} = A\vec{u}\,\cancel{e^{-i\lambda t}} \Rightarrow \boxed{A\vec{u} = \lambda\vec{u}}$$

μας χρειάζονται οι ιδιοτιμές κ τα ιδιοανύσματα του πίνακα A

$$\begin{bmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \omega-\lambda & g \\ g & \Omega-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det = 0 \Rightarrow (\omega-\lambda)(\Omega-\lambda) - g^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (\omega+\Omega)\lambda + \omega\Omega - g^2 = 0$$

$$\Delta = (\omega+\Omega)^2 - 4(\omega\Omega - g^2) = (\omega-\Omega)^2 + 4g^2$$

$$\lambda_{2,1} = \frac{(\omega+\Omega) \pm \sqrt{(\omega-\Omega)^2 + 4g^2}}{2}$$

$$\lambda_{2,1} = \frac{\omega+\Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2 + g^2} = \frac{\Sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2}$$

$$\Sigma := \omega + \Omega \qquad \Delta := \omega - \Omega$$

(δ) για $\Delta = 0$ $\quad \lambda_{2,1} = \omega \pm g$

$\omega = \Omega$

$\Sigma = 2\omega$

• για $\lambda_1 = \omega - g$

$$\begin{bmatrix} \omega & g \\ g & \omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = (\omega - g)\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \omega u_{11} + g u_{21} &= (\omega - g) u_{11} \\ g u_{11} + \omega u_{21} &= (\omega - g) u_{21} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} g u_{21} &= -g u_{11} \\ g u_{11} &= -g u_{21} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_{21} = -u_{11} \qquad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix}$$

κανονικοποίηση

$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = 1 \Rightarrow$

$2|c|^2 = 1 \Rightarrow$

$|c|^2 = \frac{1}{2}$

π.χ. $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

• για $\lambda_2 = \omega + g$

$$\begin{bmatrix} \omega & g \\ g & \omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = (\omega + g)\begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \omega u_{12} + g u_{22} &= (\omega + g) u_{12} \\ g u_{12} + \omega u_{22} &= (\omega + g) u_{22} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} g u_{22} &= g u_{12} \\ g u_{12} &= g u_{22} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_{22} = u_{12} \qquad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}$$

κανονικοποίηση

$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = 1 \Rightarrow$

$2|c|^2 = 1 \Rightarrow$

$|c|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$

π.χ. $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(ε) $|c_1(t)|^2 = \frac{1}{2} = |c_2(t)|^2$ (δεδομένο)

$$\left|\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\right|^2 \qquad \left|\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\right|^2$$

∄ ταλάντωση πιθανότητας παρουσίας του ηλεκτρονίου στις δύο θέσεις

Η πιθανότητα μοιράζεται συνεχώς, ἐξ ἴσου.