Τομέας Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

**Κβαντική Οπτική και Lasers.**

Εξέταση της 15ης Ιουνίου 2016. Διδάσκων Κ. Σιμσερίδης

**Θέμα 1.**

**(α')** Σε ποια τιμή του $x = \frac{h\nu}{k_B T}$ η πρόβλεψη του νόμου Wien, $\rho_W$, είναι 0.99 της πειραματικής τιμής, $\rho$, οπότε, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η $\rho_W$ είναι καλή προσέγγιση της $\rho$; Πόσο μεγαλύτερη από την πειραματική τιμή είναι τότε η πρόβλεψη του κλασικού νόμου Rayleigh-Jeans, $\rho_{RJ}$;

**(β')** Σε ποιο μήκος κύματος συμβαίνει αυτό για θερμοκρασία 300 K, 6000 K, 4.2 K; Δίνονται η σταθερά Planck $h \approx 6.626 \times 10^{-34}$ Js, η σταθερά Boltzmann $k_B \approx 1.381 \times 10^{-23}$ J/K και η ταχύτητα του φωτός στο κενό $c \approx 2.998 \times 10^{8}$ m/s. Ακόμα δίνονται οι περιοχές Near-Infrared (NIR) 0.78 - 3 $\mu$m, Mid-Infrared (MIR) 3-50 $\mu$m, Far-Infrared (FIR) 50-1000 $\mu$m. Στις πράξεις μπορείτε να κάνετε προσεγγίσεις.

**Θέμα 2.**

**(α')** Θεωρήστε δισταθμικό σύστημα με $E_2 - E_1 = \hbar\Omega$. Υπολογίστε τα $\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle$, $\langle \hat{a}_m \hat{a}_m^\dagger \rangle$, $\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle$, $\langle \hat{S}_- \hat{S}_+ \rangle$, $< \hat{S}_+ \hat{a}_m >$, $< \hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger >$, $< \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger >$, $< \hat{S}_- \hat{a}_m >$ για την κατάσταση:

$$|\psi(t)> = \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} |\downarrow, 1> + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} |\uparrow, 0>$$

**(β')** Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Rabi ενός ΗΜ τρόπου.

$$\hat{H}_R^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_- \hat{a}_m).$$

Εξηγήστε όλα τα σύμβολα και συνοπτικά τι περιγράφει κάθε προσθετέος. Στον τελευταίο προσθετέο $\hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_- \hat{a}_m)$ υπάρχουν 4 «υποπροσθετέοι». Εξηγήστε ποια διαδικασία περιγράφει ο καθένας από αυτούς και με ποια δικαιολογία αγνοούμε 2 από τους 4 υποπροσθετέους στη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings. Ισχύει η ίδια δικαιολογία όταν έχουμε πολλούς τρόπους $m$;

**(γ')** Θεωρήστε τώρα τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings ενός ΗΜ τρόπου. Χρησιμοποιώντας τη χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schrödinger για την παραπάνω κατάσταση, $|\psi(t)>$, δείξτε ότι ικανοποιείται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix} -\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

**(δ')** Ορίζοντας $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ και δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής $\vec{x}(t) = \vec{v} e^{-i\lambda t}$, δείξτε ότι

$$\lambda = \frac{\omega + \Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega - \Omega}{2}\right)^2 + g^2}$$

**(ε')** Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα στην περίπτωση συντονισμού του φωτονίου με το δισταθμικό σύστημα.

**Θέμα 3.**

Θεωρήστε τις διαφορικές εξισώσεις ρυθμών στο laser στην αδιάστατη μορφή:

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} \qquad (\varepsilon_1)$$

$$\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \varrho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2 \qquad (\varepsilon_2)$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \{\frac{A'}{A}\nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1)\}\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)} \qquad (\varepsilon_3)$$

Οι εικόνες παριστάνουν τη λύση τους με matlab.

**(α')** Πόσος είναι ο λόγος των χρόνων ζωής των σταθμών 1 και 2;

**(β')** Γιατί στις εικόνες υπάρχει διαφορά στο χρόνο που χρειάζεται η $\varrho$ για να γίνει αισθητή;

**(γ')** Πως προκύπτει ότι στη στάσιμη κατάσταση και στις δύο περιπτώσεις, $\nu_1 \approx 0.75$, $\nu_2 \approx 1.25$, $\varrho \approx 0.5$;

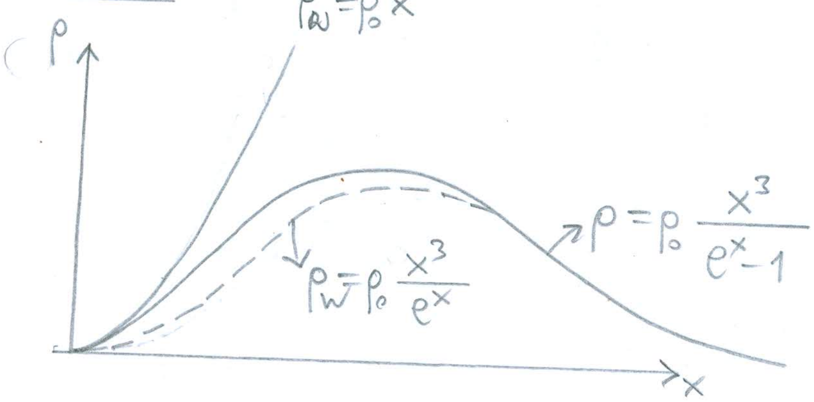
της ρ; Πόσο μεγαλύτερη από την πειραματική τιμή είναι τότε η $\rho_{RJ}$;

Σε ποιό μήκος κύματος συμβαίνει αυτό για θερμοκρασία 300K, 6000K, 4.2K

300K → ζώο, 6000K → φωτόσφαιρα Ηλίου, 4.2K → υγρό He

ΘΕΜΑ

ΛΥΣΗ




$$\rho_W = \frac{99}{100}\rho \Rightarrow \cancel{\rho_0}\frac{x^3}{e^x} = 0.99\cancel{\rho_0}\frac{x^3}{e^x-1} \Rightarrow e^x-1 = 0.99e^x \Rightarrow$$

$$0.01e^x = 1 \Rightarrow \boxed{e^x = 100} \Rightarrow \boxed{x = \ln 100 = 4.605 \simeq 4.6}$$

Τότε $\boxed{\frac{\rho_{RJ}}{\rho}} = \frac{\rho_0 x^2}{\rho_0 \frac{x^3}{e^x-1}} = \frac{(e^x-1)x^2}{x^3} = \frac{e^x-1}{x} = \frac{100-1}{4.6} = \boxed{21.5}$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{h\nu}{k_B T} \\ c &= \lambda\nu \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{hc}{k_B T\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{hc}{x k_B T}}$$

$$\boxed{\frac{hc}{k_B}} = \frac{6.626\times10^{-34}\,\cancel{J}s \; 2.998\times10^{8}\,m/\cancel{s}}{1.380\times10^{-23}\,\cancel{J}/K} = \boxed{14.395\times10^{-3}\,K\cdot m}$$

$T=300K$ $\quad \lambda = \frac{14.395\times10^{-3}\,Km}{4.6 \;\; 300K} \Rightarrow \lambda \simeq 10.431\ \mu m$ $\quad$ MIR Mid Infrared μεσαίο υπέρυθρο

$T=6000K$ $\quad \lambda = \frac{14.395\times10^{-3}\,Km}{4.6 \;\; 6000K} \Rightarrow \lambda \simeq 0.5216\ \mu m \simeq 521.6\ nm$ $\quad$ κυανοπράσινο

$T=4.2K$ $\quad \lambda = \frac{14.395\times10^{-3}\,Km}{4.6\cdot 4.2K} \Rightarrow \lambda \simeq 0.7451\ mm = 745.1\ \mu m$ $\quad$ FIR Far Infrared μακρινό υπέρυθρο

infra = υπό

NIR Near Infrared 0.78–3 μm
MIR Mid Infrared 3–50 μm
FIR Far Infrared 50–1000 μm

1502047З

ΑΣΚΗΣΗ (ΘΕΜΑ 2ο) 

(α) Υπολογίστε τα $\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rangle$, $\langle \hat{a}\hat{a}^{\dagger}\rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{S}_-\rangle$, $\langle \hat{S}_-\hat{S}_+\rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{a}^{\dagger}\rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{a}\rangle$, $\langle \hat{S}_-\hat{a}^{\dagger}\rangle$, $\langle \hat{S}_-\hat{a}\rangle$ για την κατάσταση

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow,1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow,0\rangle$$

ΛΥΣΗ

$$\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rangle = \left\{\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow,1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow,0|\right\}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\left\{\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow,1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow,0\rangle\right\}$$

$$= \left\{ \quad + \quad \text{ορθογ.} \right\}\left\{\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\cdot 1\cdot|\downarrow,1\rangle + \cancel{\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\cdot 0\,|\uparrow,0\rangle}\right\} = \frac{1}{2}$$

$$\langle \hat{a}\hat{a}^{\dagger}\rangle = \left\{\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow,0|\right\}\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\left\{\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow,1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow,0\rangle\right\}$$

$$\left\{ \quad \right\}\left\{\frac{e^{i\Omega t}}{\cancel{\sqrt{2}}}\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\sqrt{1}\sqrt{1}\,|\uparrow 0\rangle\right)$$

$$= \left\{ \quad \right\}\left\{\sqrt{2}\,e^{i\Omega t}|\downarrow 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\Omega t}|\uparrow 0\rangle\right\}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\langle \hat{S}_+\hat{S}_-\rangle = \left\{\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right\}\hat{S}_+\hat{S}_-\left\{\cancel{\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow,1\rangle} + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow,0\rangle\right\}$$

$$\left\{ \quad \text{ορθογ.} \quad \right\}\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\cdot|\uparrow 0\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \hat{S}_-\hat{S}_+\rangle = \left\{\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \underbrace{\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|}_{\text{ορθ}}\right\}\hat{S}_-\hat{S}_+\left\{\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \cancel{\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}$$

2

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle$$

$$\langle \hat{a}^{+}\hat{a}\rangle = \frac{1}{2} \qquad \langle \hat{S}_{+}\hat{S}_{-}\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \hat{a}\hat{a}^{+}\rangle = \frac{3}{2} \qquad \langle \hat{S}_{-}\hat{S}_{+}\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \hat{S}_{+}\hat{a}^{+}\rangle = \left\{\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{+i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right\}\hat{S}_{+}\hat{a}^{+}\left\{\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \cancel{\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle}\right\}$$

$$\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,|\uparrow 2\rangle \quad = 0$$

$$\langle \hat{S}_{-}\hat{a}\rangle = \left\{ \qquad \right\}\hat{S}_{-}\hat{a}\left\{\cancel{\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle} + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right\}$$

$$\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow \text{μηδέν} \quad = 0$$

$$0 \cdot |\downarrow, 0\rangle \quad = 0$$

$$\langle \hat{S}_{+}\hat{a}\rangle = \left\{\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right\}\hat{S}_{+}\hat{a}\left\{\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \cancel{\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle}\right\}$$

ορθ

$$\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\sqrt{1}\,|\uparrow 0\rangle = \frac{e^{2i\Omega t}}{2}$$

$$\langle \hat{S}_{-}\hat{a}^{+}\rangle = \left\{\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\downarrow 1| + \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\langle\uparrow 0|\right\}\hat{S}_{-}\hat{a}^{+}\left\{\cancel{\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle} + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right\}$$

ορθ

$$\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\sqrt{1}\,|\downarrow 1\rangle = \frac{e^{-2i\Omega t}}{2}$$

$$\langle \hat{S}_{+}\hat{a}^{+}\rangle = 0 \qquad \langle \hat{S}_{+}\hat{a}\rangle = \frac{e^{2i\Omega t}}{2}$$

$$\langle \hat{S}_{-}\hat{a}\rangle = 0 \qquad \langle \hat{S}_{-}\hat{a}^{+}\rangle = \frac{e^{-2i\Omega t}}{2}$$

(β) Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Jaynes – Cummings ενός ΗΜ τρόπου

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g\left(\hat{S}_+ a + S_-\hat{a}^\dagger\right)$$

Χρησιμοποιώντας την χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schrödinger για την παρακάτω κατάσταση $|\psi(t)\rangle$, δείξτε ότι ικανοποιείται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{pmatrix} -\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ΛΥΣΗ

$$i\hbar\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_{JC}|\psi(t)\rangle$$

$$AM = i\hbar\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}(+i\Omega)|\downarrow 1\rangle + i\hbar\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}(-i\Omega)|\uparrow 0\rangle$$

$$= \frac{-\hbar\Omega}{\sqrt{2}}e^{i\Omega t}|\downarrow 1\rangle + \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2}}e^{-i\Omega t}|\uparrow 0\rangle$$

$$\Delta M = \left(\hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar\omega\hat{a}^\dagger a + \hbar g S_+\hat{a} + \hbar g S_-\hat{a}^\dagger\right)\left\{\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle\right\}$$

$$= \hbar\Omega\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow 0\rangle + \hbar\omega\, 1\,\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow 1\rangle + \hbar g\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\sqrt{1}|\uparrow 0\rangle$$

$$\hbar g\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\sqrt{1}\,|\downarrow 1\rangle$$

$\underline{\text{επί}}\ \langle\downarrow 1|$

$$AM = \frac{-\hbar\Omega}{\sqrt{2}} e^{i\Omega t}$$

$$\Delta M = \hbar\omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} + \hbar g \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}$$

---

επί $\langle\uparrow 0|$

$$AM = \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2}} e^{-i\Omega t}$$

$$\Delta M = \hbar\Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} + \hbar g \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}$$

---

$$-\hbar\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} = \hbar\omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} + \hbar g \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}$$

$$\hbar\Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} = \hbar g \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} + \hbar\Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{pmatrix} -\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(δ) Ορίζουμε $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

και ΔΠΜ $\vec{x}(t) = \vec{v}\, e^{-i\lambda t}$ δείξαμε ότι

$$\lambda = \frac{\omega+\Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2 + g^2}$$

---

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} i\Omega \dfrac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ -i\Omega \dfrac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} -\Omega \dfrac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \Omega \dfrac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$i\dot{\vec{x}}(t) = \overset{A}{\begin{pmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{pmatrix}} \vec{x}(t)$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{v}\, e^{-i\lambda t} \\ \dot{\vec{x}}(t) &= \vec{v}(-i\lambda)\, e^{-i\lambda t} \end{aligned}\right\}$$

$$i\vec{v}(-i\lambda)\cancel{e^{-i\lambda t}} = A\vec{v}\,\cancel{e^{-i\lambda t}}$$

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v}}$$ πρόβλημα ιδιοτιμών

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v} \Rightarrow A\vec{v} = \lambda I \vec{v}$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \omega - \lambda & g \\ g & \Omega - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \omega - \lambda & g \\ g & \Omega - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\omega - \lambda)(\Omega - \lambda) - g^2 = 0$$

$$\omega\Omega - \omega\lambda - \Omega\lambda + \lambda^2 - g^2 = 0$$

$$\lambda^2 - (\omega + \Omega)\lambda + \omega\Omega - g^2 = 0$$

$$\Delta = (\omega + \Omega)^2 - 4(\omega\Omega - g^2) =$$

$$= \omega^2 + \Omega^2 + 2\omega\Omega - 4\Omega\omega + 4g^2$$

$$= (\omega - \Omega)^2 + 4g^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\omega + \Omega) \pm \sqrt{(\omega - \Omega)^2 + 4g^2}}{2}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\omega + \Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega - \Omega}{2}\right)^2 + g^2}}$$

δ) αν $\omega = \Omega \rightarrow \lambda = \Omega \pm g$

Βρίσκω ιδιοτιμές και ιδιοανύσματα στο σύστημα.

~~β) $\lambda = \Omega \pm g$~~

$$\begin{bmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

i) $\lambda = \Omega + g$

$$\begin{bmatrix} \Omega & g \\ g & \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = (\Omega + g) \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \cancel{\Omega u_{11}} + g u_{21} = \cancel{\Omega u_{11}} + g u_{11} \\ g u_{11} + \cancel{\Omega u_{21}} = \cancel{\Omega u_{21}} + g u_{21} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad g u_{21} = g u_{11} \Rightarrow u_{21} = u_{21} \Longrightarrow \text{ισχ}$$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ii) $\lambda = \Omega - g$

$$\begin{bmatrix} \Omega & g \\ g & \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = (\Omega - g) \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \cancel{\Omega u_{12}} + g u_{22} = \cancel{\Omega u_{12}} - g u_{12} \\ g u_{12} + \cancel{\Omega u_{22}} = \cancel{\Omega u_{22}} - g u_{22} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad u_{22} = - u_{12}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ΘΕΜΑ 3ο

(α') $\tau_1 = \frac{t_1}{t_2} = 0.5$ (δίνεται στα σχήματα)

$t_1 \rightarrow$ χρόνος ζωής της 1ης

$t_2 \rightarrow$ χρόνος ζωής της 2ης

(β) Η μόνη παράμετρος που διαφέρει στις 2 εικόνες είναι η $\frac{A'}{A}$

$\frac{A'}{A} = 10^{-4}$ αριστερά $\qquad \frac{A'}{A} = 10^{-9}$ δεξιά

Όταν $\rho = 0$, ο μόνος παράγων που μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση του $\rho$ είναι ο $\frac{A'}{A} \nu_2 \frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)}$

Άρα $\left[\frac{A'}{A} \nu_2 \frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)}\right]_{\text{αριστερά}} >> \left[\frac{A'}{A} \nu_2 \frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)}\right]_{\text{δεξιά}}$

$\Rightarrow \left[\frac{d\rho}{d\tau}\right]_{\text{αριστερά}} >> \left[\frac{d\rho}{d\tau}\right]_{\text{δεξιά}}$

$\Rightarrow$ αριστερά η $\rho$ γίνεται αισθητή γρηγορότερα

(γ') Στη στάσιμη κατάσταση $\frac{d\nu_1}{d\tau} = \frac{d\nu_2}{d\tau} = 0 = \frac{d\rho}{d\tau}$ $\Rightarrow$ ... πράξεις...

$$\nu_1 = \tau_1 r_N \quad , \forall r_N$$

$$\nu_2 = \begin{cases} r_N & , \forall r_N < 1 \\ \tau_1 r_N + (1-\tau_1) & , \forall r_N > 1 \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 0 & , \forall r_N < 1 \\ r_N - 1 & , \forall r_N > 1 \end{cases}$$

Άρα $\nu_1 = 0.5 \; 1.5 = 0.75$

$\nu_2 = 0.5 \; 1.5 + (1-0.5) = 1.25$

$\rho = 1.5 - 1 = 0.5$