Τομέας Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Κβαντική Οπτική και Lasers.

Εξέταση της 14ης Ιουνίου 2017. Διδάσκων Κ. Σιμσερίδης

Θέμα 1.

(α΄) Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Rabi ενός ΗΜ τρόπου. Εξηγήστε, συντόμως, όλα τα σύμβολα. Ποιούς όρους της αγνοούμε ώστε να καταλήξουμε στη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings και για ποιό λόγο;

Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings ενός ΗΜ τρόπου.

(β΄) Να υπολογιστούν τα $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$, $\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger \rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{S}_- \rangle$, $\langle \hat{S}_-\hat{S}_+ \rangle$, $< \hat{S}_+\hat{a} >$, $< \hat{S}_+\hat{a}^\dagger >$, $< \hat{S}_-\hat{a}^\dagger >$, $< \hat{S}_-\hat{a} >$ για την κατάσταση: $|\psi_A(t) > = c_1(t) \mid \downarrow, n > + c_2(t) \mid \uparrow, n-1 >$

(γ΄) Χρησιμοποιώντας την χρονοεξαρτημένη εξίσωση του Schrödinger, αποδείξτε ότι οι συντελεστές $c_1(t)$ και $c_2(t)$ ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$i\begin{pmatrix} \dot{c_1}(t) \\ \dot{c_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\omega & \sqrt{n}g \\ \sqrt{n}g & \Omega + (n-1)\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

(δ΄) Δείξτε ότι δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής $\vec{x}(t) = \vec{v}e^{-i\lambda t}$, καταλήγουμε στο πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοανυσμάτων $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα, τόσο για $n = 1$ όσο και γενικώς για οιοδήποτε n. Η γενική λύση είναι $\vec{x}(t) = \sigma_1\vec{v}_1 e^{-i\lambda_1 t} + \sigma_2\vec{v}_2 e^{-i\lambda_2 t}$.

(ε΄) Υποθέστε αρχικές συνθήκες $c_1(0) = 1, c_2(0) = 0$. Αποδείξτε ότι $|c_1(t)|^2 = 1 - \frac{ng^2}{\Omega_n^2}\sin^2(\Omega_n t)$ και $|c_2(t)|^2 = \frac{ng^2}{\Omega_n^2}\sin^2(\Omega_n t)$. Ποιο είναι το πλάτος A_n και ποια η περίοδος των ταλαντώσεων T_n;

Θεωρήστε τώρα $n = 1$.

(ς΄) Υποθέστε αρχικές συνθήκες $c_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = c_2(0)$ και συντονισμό και βρείτε τα $|c_1(t)|^2$ και $|c_2(t)|^2$.

(ζ΄) Υποθέστε αρχικές συνθήκες $c_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\varphi}$, $c_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ και συντονισμό και βρείτε τα $|c_1(t)|^2$ και $|c_2(t)|^2$.

Χρησιμοποιήστε, αν χρειαστεί, τους συμβολισμούς:

αποσυντονισμός $\Delta = \omega - \Omega$, γενικευμένη συχνότητα Rabi $\Omega_n = \sqrt{\left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2 + g^2 n}$, $H_n = \frac{\Omega+(n-1)\omega+n\omega}{2}$.

Θέμα 2.

Θεωρήστε τις διαφορικές εξισώσεις ρυθμών στο laser στην αδιάστατη μορφή:

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} \qquad (\varepsilon_1)$$

$$\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \varrho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2 \qquad (\varepsilon_2)$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \{\frac{A'}{A}\nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1)\}\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)} \qquad (\varepsilon_3)$$

Οι εικόνες παριστάνουν τη λύση τους με matlab.

(α΄) Πόσος είναι ο λόγος των χρόνων ζωής των σταθμών 1 και 2;

(β΄) Γιατί στις εικόνες υπάρχει διαφορά στο χρόνο που χρειάζεται η ϱ για να γίνει αισθητή;

(γ΄) Πως προκύπτει ότι στη στάσιμη κατάσταση και στις δύο περιπτώσεις, $\nu_1 \approx 0.75$, $\nu_2 \approx 1.25$, $\varrho \approx 0.5$;