Τομέας Φυσικής Συμπυκνωμένης Ύλης. Τμήμα Φυσικής. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
Κβαντική Οπτική και Lasers. Διδάσκων: Κωνσταντίνος Σιμσερίδης

Εξέταση, 2 Ιουλίου 2024

Θέμα 1.

Δισταθμικό Σύστημα σε Ημικλασική Προσέγγιση και Προσέγγιση Διπόλου. Δίνεται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων πριν από την Προσέγγιση Περιστρεφομένου Κύματος, δηλαδή,

$$\dot{C}_1(t) = C_2(t)\frac{i\Omega_{\mathrm{R}}}{2}\left[e^{i\Delta t} + e^{-i\Sigma t}\right], \tag{1}$$

$$\dot{C}_2(t) = C_1(t)\frac{i\Omega_{\mathrm{R}}}{2}\left[e^{-i\Delta t} + e^{i\Sigma t}\right]. \tag{2}$$

(α′) Εξηγήστε και ορίστε τα σύμβολα Ω_{R}, Δ, Σ, $C_1(t)$, $C_2(t)$. Πότε είναι ανώδυνο για την ακρίβειά μας να κάνουμε Προσέγγιση Περιστρεφομένου Κύματος και σε τι συνίσταται αυτή; Ποια είναι η μορφή των εξισώσεων μετά την Προσέγγιση Περιστρεφομένου Κύματος;
(β′) Ας υποθέσουμε, όμως, περαιτέρω, πως η ισχύς της διαταραχής είναι τόσο μεγάλη ώστε τα Δ και Σ να είναι μηδαμινά συγκρινόμενα με το Ω_{R}. Πώς θα απλοποιηθούν τότε οι Εξ. (1)-(2);

Για τις απλοποιημένες εξισώσεις:

(γ′) Βρείτε τα $C_1(t)$, $C_2(t)$ με αρχικές συνθήκες $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$.
(δ′) Υπολογίστε τις πιθανότητες παρουσίας του ηλεκτρονίου στις στάθμες, $P_1(t)$ και $P_2(t)$, την περίοδο, T, και το μέγιστο ποσοστό μεταβιβάσεως, $\mathcal{A}$, των ταλαντώσεων Rabi.
(ε′) Υπολογίστε το μέσο ρυθμό μεταβιβάσεως από τη στάθμη 1 στην στάθμη 2, $k = \frac{\langle P_2(t)\rangle}{t_{2,\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta}}$. Έχουμε αρχικά τοποθετήσει το ηλεκτρόνιο στη στάθμη 1. $\langle P_2(t)\rangle$ είναι η μέση τιμή της πιθανότητας παρουσίας του ηλεκτρονίου στη στάθμη 2 και $t_{2,\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta}$ είναι ο απαιτούμενος χρόνος ώστε να φτάσει η $P_2(t)$, πρώτη φορά, στην μέση τιμή $\langle P_2(t)\rangle$.

Θέμα 2.

(α′) Ημικλασικά, σε Δισταθμικό Σύστημα, το μέγιστο ποσοστό μεταβιβάσεως και η περίοδος είναι,

$$\mathcal{A} = \frac{\Omega_{\mathrm{R}}^2}{\Omega_{\mathrm{R}}^2 + \Delta^2}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_{\mathrm{R}}^2 + \Delta^2}}, \tag{3}$$

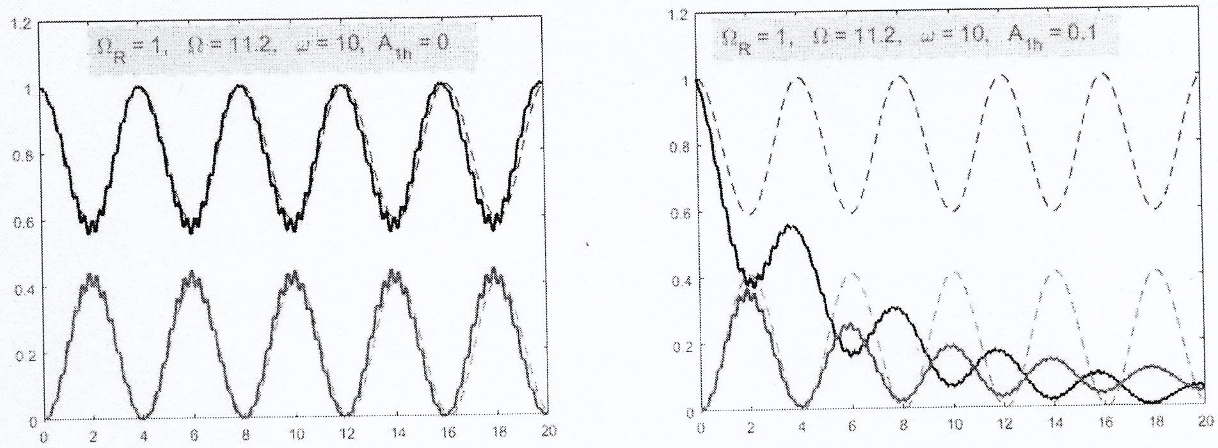
ενώ, κβαντικά, είναι,

$$\mathcal{A} = \frac{4g^2 n}{4g^2 n + \Delta^2}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{4g^2 n + \Delta^2}}, \tag{4}$$

όπου

$$\hbar|g| = |\mathcal{P}|\left|\left(\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right|. \tag{5}$$

$V = SL$ είναι ο όγκος της κοιλότητας, L το μήκος της και S η εγκάρσια διατομή της. Έγινε απλοποίηση συμβολισμού, $g_m = g$, $n_m = n$, $\omega_m = \omega$. Εξηγήστε ποια είναι η Ω_{R} και το πλάτος του ηλεκτρικού



Σχήμα 1 *Παράδειγμα. Επίδραση της Προσεγγίσεως Περιστρεφομένου Κύματος απουσία ή παρουσία Αυθόρμητης Εκπομπής από την κάτω στάθμη 1 προς μία βοηθητική* h. $\Omega_{\mathrm{R}} = 1$, $\Omega = 11.2$, $\omega = 10$, *αριστερά* $A_{1h} = 0$, *δεξιά* $A_{1h} = 0.1$, *στις ίδιες μονάδες.*

πεδίου στη κβαντική περίπτωση. Εξετάστε αν είναι σωστές οι μονάδες του πλάτους.
(β′) Εξηγήστε πώς διαμορφώνεται το πλάτος χωρικά. Υπολογίστε την πυκνότητα ενέργειας της κοιλότητας και δείξτε πως εξαρτάται καθαρά από τον αριθμό των φωτονίων και την ενέργεια κάθε φωτονίου.
(γ′) Να υπολογιστούν τα $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$, $\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger \rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{S}_- \rangle$, $\langle \hat{S}_-\hat{S}_+ \rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{a} \rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{a}^\dagger \rangle$, $\langle \hat{S}_-\hat{a}^\dagger \rangle$, $\langle \hat{S}_-\hat{a} \rangle$, για την κατάσταση

$$|\psi\rangle = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} |\downarrow, 2\rangle + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} |\uparrow, 1\rangle\,, \tag{6}$$

όπου οι ϕ και θ είναι αυθαίρετες γωνίες.
(δ′) Δίνονται τα $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. Αποδείξτε πως ο $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ έχει ιδιοκαταστάσεις τις $\hat{a}|n\rangle$, $\hat{a}^\dagger|n\rangle$, με ιδιοτιμές $n-1$, $n+1$, αντιστοίχως. Υπολογίστε τον μεταθέτη του τελεστή του αριθμού των φωτονίων $\hat{N}$ με τον τελεστή καταστροφής φωτονίου $\hat{a}$ και τον μεταθέτη του τελεστή του αριθμού των φωτονίων $\hat{N}$ με τον τελεστή δημιουργίας φωτονίου $\hat{a}^\dagger$.

(ε′) Εξηγήστε συνοπτικά τι αντιπροσωπεύουν οι καμπύλες στο Σχήμα 1.

Να απαντηθούν τα 10 υποερωτήματα.

ΘΕΜΑ 1

(α) $\dot{c}_1(t) = c_2(t)\frac{i\Omega_R}{2}\left(e^{i\Delta t} + e^{-i\Sigma t}\right)$

$\dot{c}_2(t) = c_1(t)\frac{i\Omega_R}{2}\left(e^{-i\Delta t} + e^{i\Sigma t}\right)$

E_2 —— $|\Phi_2\rangle$

E_1 —— $|\Phi_1\rangle$

$\Omega_R = \frac{\mathcal{P}\mathcal{E}_0}{\hbar}$ συχνότητα Rabi

$\mathcal{P} := \mathcal{P}_{z12} = -ez_{12} = -ez_{21} = \mathcal{P}_{z21}$ στοιχείο πίνακα διπολικής ροπής (z συνιστώσα) μεταξύ των $|\Phi_1\rangle$ κ $|\Phi_2\rangle$

@ προσέγγιση διπόλου πόλωση πεδίου ←

$\vec{\mathcal{E}} \simeq \underbrace{\vec{\mathcal{E}}_a \exp\left(i(\vec{k}\cdot\vec{R}+\phi\right)}_{\vec{\mathcal{E}}_0} e^{-i\omega t}$

$\Delta = \omega - \Omega$ ἀποσυντονισμός

ω: τοῦ ΗΜ πεδίου, Ω: $\frac{E_2 - E_1}{\hbar}$

$\Sigma = \omega + \Omega$

ἔχουμε υποθέσει $\Psi(\vec{r},t) = \sum_{k=1}^{2} c_k(t) e^{-i\Omega_k t}\Phi_k(\vec{r})$

$\Phi_k(\vec{r})$: ἀδιατάρακτες

$|c_k(t)|^2$ = πιθανότητα εὑρέσεως τοῦ ἠλεκτρονίου στην k στάθμη

Ἂν $\omega \sim \Omega \Rightarrow \Delta = \omega - \Omega$ μικρό κ $\Sigma = \omega + \Omega$ μεγάλο $\Rightarrow$
οἱ ὅροι $e^{\pm i\Sigma t}$ ἀντιπροσωπεύουν γρήγορες ταλαντώσεις,
οἱ ὁποῖες τελοῦνται πολλάκις σε χαρακτηριστικούς τοῦ συστήματος χρόνους →
θά ἔχουν διαταρακτική ἐπίδραση σε σχέση με τούς ὅρους $e^{\pm i\Delta t}$
Ἡ ἀγνόηση αὐτῶν τῶν γρήγορων ὅρων $e^{\pm i\Sigma t}$ καλεῖται RWA
(Rotating Wave Approximation, Προσέγγιση Περιστρεφομένου Κύματος)

Μετά τήν RWA, ἔχουμε

$\dot{c}_1(t) = c_2(t)\frac{i\Omega_R}{2}e^{i\Delta t}$

$\dot{c}_2(t) = c_1(t)\frac{i\Omega_R}{2}e^{-i\Delta t}$

(β) Ἂν $\Omega_R \gg \Delta$ κ $\Omega_R \gg \Sigma \Rightarrow$ οἱ ἐξισώσεις γίνονται $\dot{c}_1(t) = c_2(t)\, i\Omega_R$

$e^{\pm i\Delta t} \simeq 1$, $e^{\pm i\Sigma t} \simeq 1$ $\qquad \dot{c}_2(t) = c_1(t)\, i\Omega_R$

(γ) Υπάρχει στις σημειώσεις 2024_29 με δύο τρόπους. Μετά ἀπό πράξεις, προκύπτει

κ (δ) $c_1(t) = \cos(\Omega_R t) \Rightarrow P_1(t) = \cos^2(\Omega_R t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\Omega_R t)$

$c_2(t) = i\sin(\Omega_R t) \Rightarrow P_2(t) = \sin^2(\Omega_R t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\Omega_R t)$

$T = \frac{2\pi}{2\Omega_R} = \frac{\pi}{\Omega_R}$ $\qquad A = 1$

(ε) $\langle P_1(t)\rangle = \frac{1}{2} = \langle P_2(t)\rangle$

σ.2

t_{2mean} = ο απαιτούμενος χρόνος ώστε $P_2(t) = \langle P_2(t)\rangle$ για 1η φορά (δεδομένου πως στην αρχή $P_1(0)=1$, $P_2(0)=0$)

$$P_2(t) = \langle P_2(t)\rangle \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\Omega_R t) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(2\Omega_R t) = 0 \Rightarrow \text{(1η φορά)}$$

$$2\Omega_R t_{2mean} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_{2mean} = \frac{\pi}{4\Omega_R}$$

$$k_{12} = \frac{\langle P_2(t)\rangle}{t_{2mean}}$$

$$\Downarrow$$

$$k_{12} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{4\Omega_R}} = \frac{4\Omega_R}{2\pi} = \frac{2\Omega_R}{\pi}$$

ΘΕΜΑ 2

(α) κ (β) υπάρχουν στις σημειώσεις 2024_25. Συνοπτικά:

$$\Omega_R = 2\sqrt{n}\, g \qquad E_{0m} = \left|\left(\frac{4\hbar\omega_m n_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \cdot \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right|$$

$$U = \frac{\hbar\omega_m n_m}{V}\left\{1 - \cos\left(\frac{2m\pi z}{L}\right)\right\} \qquad [\Omega_R] = s^{-1} \quad [E_{0m}] = \frac{V}{m} \quad [U] = \frac{J}{m^3}$$

πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου κοιλότητας

$$\int_0^L U S\, dz = \frac{\hbar\omega_m n_m}{V} S \int_0^L \left(1 - \cos\left(\frac{2m\pi z}{L}\right)\right) dz$$

ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου κοιλότητας

$$= \hbar\omega_m n_m$$

Σωστότερα, όμως $U = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\underbrace{\frac{E_{0m}}{\sqrt{2}}}\right)^2 \Rightarrow \ldots$

↳ ενεργός τιμή, όχι πλάτος...

$$\Rightarrow U = \frac{\hbar\omega_m n_m}{V}\,\frac{1}{2}\left\{1 - \cos\left(\frac{2m\pi z}{L}\right)\right\}$$

πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου κοιλότητας

$\Rightarrow$ ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου κοιλότητας $= \frac{\hbar\omega_m n_m}{2}$

απομένει $\frac{\hbar\omega_m n_m}{2}$ για την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου της κοιλότητας...

(γ) $|\psi\rangle = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt2}|\downarrow,2\rangle + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt2}|\uparrow,1\rangle$

$$\langle \hat a^+\hat a\rangle = \langle\psi|\hat a^+\hat a|\psi\rangle = \left(\frac{e^{-i\phi}}{\sqrt2}\langle\downarrow,2| + \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt2}\langle\uparrow,1|\right)\hat a^+\hat a\left(\frac{e^{i\phi}}{\sqrt2}|\downarrow2\rangle + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt2}|\uparrow,1\rangle\right)$$

$$= \frac12\langle\downarrow2|\hat a^+\hat a|\downarrow2\rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2}\langle\downarrow2|\hat a^+\hat a|\uparrow1\rangle + \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2}\langle\uparrow1|\hat a^+\hat a|\downarrow2\rangle + \frac12\langle\uparrow1|\hat a^+\hat a|\uparrow1\rangle =$$

$$= \frac12\cdot 2\langle\downarrow2|\downarrow2\rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2}1\langle\downarrow2|\uparrow1\rangle + \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2}2\langle\uparrow1|\downarrow2\rangle + \frac12 1\langle\uparrow1|\uparrow1\rangle = \frac32$$

$\langle\hat a\hat a^+\rangle$ όμοιως ή επειδή $[\hat a,\hat a^+]=1 \Rightarrow \hat a\hat a^+ = 1+\hat a^+\hat a$

$$\langle\psi|\hat a\hat a^+|\psi\rangle = \langle\psi|1+\hat a^+\hat a|\psi\rangle = \frac52$$

$$\langle\hat S_+\hat S_-\rangle = \langle\psi|\hat S_+\hat S_-|\psi\rangle = \left(\frac{e^{-i\phi}}{\sqrt2}\langle\downarrow2| + \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt2}\langle\uparrow1|\right)\hat S_+\hat S_-\left(\frac{e^{i\phi}}{\sqrt2}|\downarrow2\rangle + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt2}|\uparrow1\rangle\right)$$

$$= \frac12\langle\downarrow2|\hat S_+\hat S_-|\downarrow2\rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2}\langle\downarrow2|\hat S_+\hat S_-|\uparrow1\rangle + \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2}\langle\uparrow1|\hat S_+\hat S_-|\downarrow2\rangle + \frac12\langle\uparrow1|\hat S_+\hat S_-|\uparrow1\rangle$$

$$= \frac12\cdot 0\langle\downarrow2|\downarrow2\rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2}1\langle\downarrow2|\uparrow1\rangle + \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2}0\langle\uparrow1|\downarrow2\rangle + \frac12 1\langle\uparrow1|\uparrow1\rangle = \frac12$$

$\langle\hat S_-\hat S_+\rangle$ όμοιως ή επειδή $\{\hat S_+,\hat S_-\}=\hat I \Rightarrow \hat S_+\hat S_- + \hat S_-\hat S_+ = \hat I$

$$\langle\psi|\hat S_-\hat S_+|\psi\rangle = \langle\psi|\hat I - \hat S_+\hat S_-|\psi\rangle = \langle\psi|\hat I|\psi\rangle - \langle\psi|\hat S_+\hat S_-|\psi\rangle$$

$=$ (η $|\psi\rangle$ είναι κανονικοποιημένη) $= 1-\frac12 = \frac12$

$$\langle\hat S_+\hat a^+\rangle = \langle\psi|\hat S_+\hat a^+|\psi\rangle = \left(\frac{e^{-i\phi}}{\sqrt2}\langle\downarrow2| + \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt2}\langle\uparrow1|\right)\hat S_+\hat a^+\left(\frac{e^{i\phi}}{\sqrt2}|\downarrow2\rangle + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt2}|\uparrow1\rangle\right) =$$

$$= \frac12\langle\downarrow2|\hat S_+\hat a^+|\downarrow2\rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2}\langle\uparrow2|\hat S_+\hat a^+|\uparrow1\rangle + \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2}\langle\uparrow1|\hat S_+\hat a^+|\downarrow2\rangle + \frac12\langle\uparrow1|\hat S_+\hat a^+|\uparrow1\rangle =$$

$$= \frac12\sqrt3\langle\downarrow2|\uparrow3\rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2}\sqrt2\langle\uparrow2|0\,2\rangle + \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2}\sqrt3\langle\uparrow1|\uparrow3\rangle + \frac12\sqrt2\langle\uparrow1|0\,2\rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_- \hat{a} \rangle = \langle \psi | \hat{S}_- \hat{a} | \psi \rangle = \left(\frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 2 | + \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 1 | \right) \hat{S}_- \hat{a} \left(\frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} | \downarrow 2 \rangle + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} | \uparrow 1 \rangle \right)$$

$$= \frac{1}{2} \langle \downarrow 2 | \hat{S}_- \hat{a} | \downarrow 2 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \langle \downarrow 2 | \hat{S}_- \hat{a} | \uparrow 1 \rangle$$

$$+ \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \langle \uparrow 1 | \hat{S}_- \hat{a} | \downarrow 2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \uparrow 1 | \hat{S}_- \hat{a} | \uparrow 1 \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2} \langle \downarrow 2 | \emptyset 1 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \sqrt{1} \langle \downarrow 2 | \downarrow 0 \rangle$$

$$+ \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \sqrt{2} \langle \uparrow 1 | \emptyset 1 \rangle + \frac{1}{2} \sqrt{1} \langle \uparrow 1 | \downarrow 0 \rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_+ \hat{a} \rangle = \langle \psi | \hat{S}_+ \hat{a} | \psi \rangle = \ldots$$

$$= \frac{1}{2} \langle \downarrow 2 | \hat{S}_+ \hat{a} | \downarrow 2 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \langle \downarrow 2 | \hat{S}_+ \hat{a} | \uparrow 1 \rangle$$

$$+ \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \langle \uparrow 1 | \hat{S}_+ \hat{a} | \downarrow 2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \uparrow 1 | \hat{S}_+ \hat{a} | \uparrow 1 \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2} \langle \downarrow 2 | \uparrow 1 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \sqrt{1} \langle \downarrow 2 | \downarrow 0 \rangle$$

$$+ \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \sqrt{2} \langle \uparrow 1 | \uparrow 1 \rangle + \frac{1}{2} \sqrt{1} \langle \uparrow 1 | \emptyset 0 \rangle = \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \hat{S}_- \hat{a}^\dagger \rangle = \langle \psi | \hat{S}_- \hat{a}^\dagger | \psi \rangle = \ldots$$

$$= \frac{1}{2} \langle \downarrow 2 | \hat{S}_- \hat{a}^\dagger | \downarrow 2 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \langle \downarrow 2 | \hat{S}_- \hat{a}^\dagger | \uparrow 1 \rangle$$

$$+ \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \langle \uparrow 1 | \hat{S}_- \hat{a}^\dagger | \downarrow 2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \uparrow 1 | \hat{S}_- \hat{a}^\dagger | \uparrow 1 \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{3} \langle \downarrow 2 | \emptyset 3 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \sqrt{2} \langle \downarrow 2 | \downarrow 2 \rangle$$

$$+ \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \sqrt{3} \langle \uparrow 1 | \emptyset 3 \rangle + \frac{1}{2} \sqrt{2} \langle \uparrow 1 | \downarrow 2 \rangle = \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{\sqrt{2}}$$

(δ) $\hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle$ $\quad \hat{a}^{\dagger}|n\rangle=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ $\quad \hat{N}=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ $\quad [\hat{a},\hat{a}^{\dagger}]=1$ 0.5

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{a}|n\rangle=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\sqrt{n}|n-1\rangle=\hat{a}^{\dagger}\sqrt{n}\sqrt{n-1}|n-2\rangle=\sqrt{n}\sqrt{n-1}\sqrt{n-1}|n-1\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{N}\hat{a}|n\rangle=(n-1)\sqrt{n}|n-1\rangle=(n-1)\hat{a}|n\rangle \Rightarrow \hat{N}\hat{a}|n\rangle=(n-1)\hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{N}\hat{a}^{\dagger}|n\rangle=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{a}^{\dagger}|n\rangle=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\sqrt{n+1}|n+1\rangle=\sqrt{n+1}\,\hat{a}^{\dagger}\sqrt{n+1}|n\rangle=(n+1)\sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{N}\hat{a}^{\dagger}|n\rangle=(n+1)\hat{a}^{\dagger}|n\rangle$$

$$[\hat{N},\hat{a}]=[\hat{a}^{\dagger}\hat{a},\hat{a}]=\hat{a}^{\dagger}[\hat{a},\hat{a}]+[\hat{a}^{\dagger},\hat{a}]\hat{a}=-\hat{a}$$

$$[\hat{N},\hat{a}^{\dagger}]=[\hat{a}^{\dagger}\hat{a},\hat{a}^{\dagger}]=\hat{a}^{\dagger}[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}]+[\hat{a}^{\dagger},\hat{a}^{\dagger}]\hat{a}=\hat{a}^{\dagger}$$

(ε) – – – RWA

——— noRWA τρέμουλο (περιέχει δφίσυχνα) ϗ dephasing

ή περίοδος μετακινείται σιγά σιγά

Επειδή $\Delta\neq 0$, $\alpha<1$

ΔΕΞΙΑ

∄ αυθόρμητη έκπομπή από την 1 προς ακόμα κατώτερη στάθμη ⇒ οι ταλαντώσεις σβήνουν...