



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΥΜΠΥΚΝΩΜΕΝΗΣ ΥΛΗΣ

Εξετάσεις Κβαντικής Οπτικής και Laser

Διδάσκων: Κωνσταντίνος Σιμσερίδης

ΑΘΗΝΑ 2024

Τομέας Φυσικής Συμπυκνωμένης Ύλης. Τμήμα Φυσικής. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
Κβαντική Οπτική και Lasers. Διδάσκων: Κωνσταντίνος Σιμσερίδης

Εξέταση, 2 Ιουλίου 2024

Θέμα 1.

Δισταθμικό Σύστημα σε Ημικλασική Προσέγγιση και Προσέγγιση Διπόλου. Δίνεται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων πριν από την Προσέγγιση Περιστρεφόμενου Κύματος, δηλαδή,

$$\dot{C}_1(t) = C_2(t) \frac{i\Omega_R}{2} [e^{i\Delta t} + e^{-i\Sigma t}], \quad (1)$$

$$\dot{C}_2(t) = C_1(t) \frac{i\Omega_R}{2} [e^{-i\Delta t} + e^{i\Sigma t}]. \quad (2)$$

(α') Εξηγήστε και ορίστε τα σύμβολα Ω_R , Δ , Σ , $C_1(t)$, $C_2(t)$. Πότε είναι ανώδυνο για την ακρίβειά μας να κάνουμε Προσέγγιση Περιστρεφόμενου Κύματος και σε τι συνίσταται αυτή; Ποια είναι η μορφή των εξισώσεων μετά την Προσέγγιση Περιστρεφόμενου Κύματος;

(β') Ας υποθέσουμε, όμως, περαιτέρω, πως η ισχύς της διαταραχής είναι τόσο μεγάλη ώστε τα Δ και Σ να είναι μηδαμινά συγκρινόμενα με το Ω_R . Πώς θα απλοποιηθούν τότε οι Εξ. (1)-(2);

Για τις απλοποιημένες εξισώσεις:

(γ') Βρείτε τα $C_1(t)$, $C_2(t)$ με αρχικές συνθήκες $C_1(0) = 1$, $C_2(0) = 0$.

(δ') Υπολογίστε τις πιθανότητες παρουσίας του ηλεκτρονίου στις στάθμες, $P_1(t)$ και $P_2(t)$, την περίοδο, T , και το μέγιστο ποσοστό μεταβιβάσεως, \mathcal{A} , των ταλαντώσεων Rabi.

(ε') Υπολογίστε το μέσο ρυθμό μεταβιβάσεως από τη στάθμη 1 στην στάθμη 2, $k = \frac{\langle P_2(t) \rangle}{t_{2,μέση}}$. Έχουμε αρχικά τοποθετήσει το ηλεκτρόνιο στη στάθμη 1. $\langle P_2(t) \rangle$ είναι η μέση τιμή της πιθανότητας παρουσίας του ηλεκτρονίου στη στάθμη 2 και $t_{2,μέση}$ είναι ο απαιτούμενος χρόνος ώστε να φτάσει η $P_2(t)$, πρώτη φορά, στην μέση τιμή $\langle P_2(t) \rangle$.

Θέμα 2.

(α') Ημικλασικά, σε Δισταθμικό Σύστημα, το μέγιστο ποσοστό μεταβιβάσεως και η περίοδος είναι,

$$\mathcal{A} = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \Delta^2}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}, \quad (3)$$

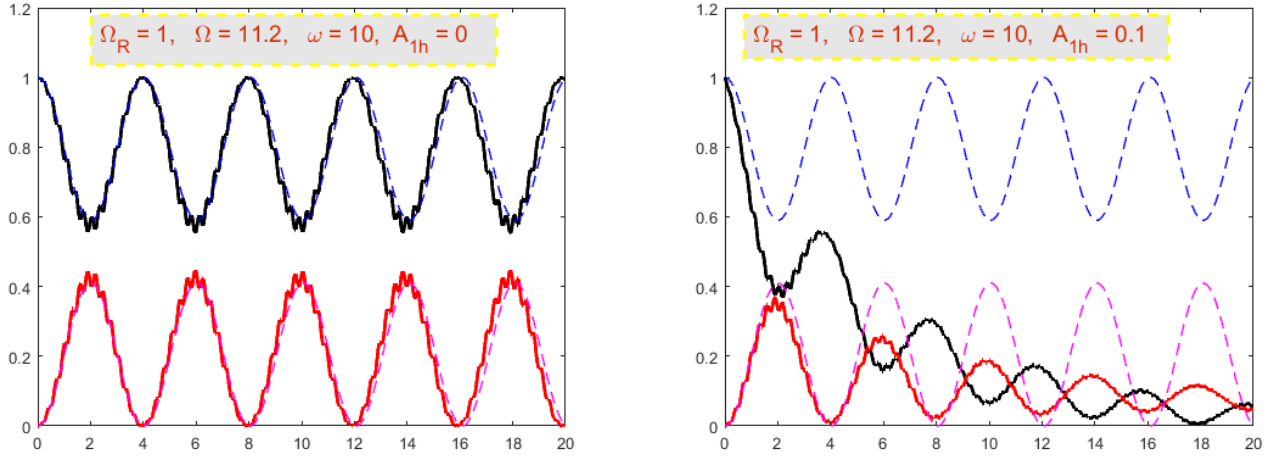
ενώ, κβαντικά, είναι,

$$\mathcal{A} = \frac{4g^2n}{4g^2n + \Delta^2}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{4g^2n + \Delta^2}}, \quad (4)$$

όπου

$$\hbar|g| = |\mathcal{P}| \left| \left(\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L} \right) \right|. \quad (5)$$

$V = SL$ είναι ο όγκος της κοιλότητας, L το μήκος της και S η εγκάρσια διατομή της. Έγινε απλοποίηση συμβολισμού, $g_m = g$, $n_m = n$, $\omega_m = \omega$. Εξηγήστε ποια είναι η Ω_R και το πλάτος του ηλεκτρικού



Σχήμα 1 Παράδειγμα. Επίδραση της Προσεγγίσεως Περιστρεφόμενου Κύματος απουσία ή παρουσία Αυθόρμητης Εκπομπής από την κάτω στάθμη 1 προς μία βοηθητική h . $\Omega_R = 1$, $\Omega = 11.2$, $\omega = 10$, αριστερά $A_{1h} = 0$, δεξιά $A_{1h} = 0.1$, στις ίδιες μονάδες.

πεδίου στη κβαντική περίπτωση. Εξετάστε αν είναι σωστές οι μονάδες του πλάτους.

(β') Εξηγήστε πώς διαμορφώνεται το πλάτος χωρικά. Υπολογίστε την πυκνότητα ενέργειας της κοιλότητας και δείξτε πως εξαρτάται καθαρά από τον αριθμό των φωτονίων και την ενέργεια κάθε φωτονίου.

(γ') Να υπολογιστούν τα $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$, $\langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle$, $\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle$, $\langle \hat{S}_- \hat{S}_+ \rangle$, $\langle \hat{S}_+ \hat{a} \rangle$, $\langle \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger \rangle$, $\langle \hat{S}_- \hat{a}^\dagger \rangle$, $\langle \hat{S}_- \hat{a} \rangle$, για την κατάσταση

$$|\psi\rangle = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} |\downarrow, 2\rangle + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} |\uparrow, 1\rangle, \quad (6)$$

όπου οι ϕ και θ είναι αυθαίρετες γωνίες.

(δ') Δίνονται τα $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. Αποδείξτε πως ο $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ έχει ιδιοκαταστάσεις τις $\hat{a}|n\rangle$, $\hat{a}^\dagger|n\rangle$, με ιδιοτιμές $n-1$, $n+1$, αντιστοίχως. Υπολογίστε τον μεταθέτη του τελεστή του αριθμού των φωτονίων \hat{N} με τον τελεστή καταστροφής φωτονίου \hat{a} και τον μεταθέτη του τελεστή του αριθμού των φωτονίων \hat{N} με τον τελεστή δημιουργίας φωτονίου \hat{a}^\dagger .

(ε') Εξηγήστε συνοπτικά τι αντιπροσωπεύουν οι καμπύλες στο Σχήμα 1.

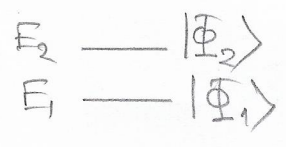


Να απαντηθούν τα 10 υποερωτήματα.

ΘΕΜΑ 1

$$\textcircled{a} \quad \dot{C}_1(t) = C_2(t) \frac{i\Omega_R}{2} \left(e^{i\Delta t} + e^{-i\Delta t} \right)$$

$$\dot{C}_2(t) = C_1(t) \frac{i\Omega_R}{2} \left(e^{-i\Delta t} + e^{i\Delta t} \right)$$



$\Omega_R = \frac{\mathcal{F}\mathcal{E}}{\hbar}$ συχνότητα Rabi
 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{212} = -eZ_{12} = -eZ_{21} = \mathcal{F}_{221}$ στοιχείο πίνακα διασπίνης ροπή (z συνιστώσα)
 \mathcal{E} προσέγγιση διτάλου πλάνου πεδίου \leftarrow (z συνιστώσα) μεταβλητών $|\Phi_1\rangle$ & $|\Phi_2\rangle$
 $\vec{\Sigma} \approx \vec{\Sigma}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)) e^{-i\omega t}$

$\Delta = \omega - \Omega$ απόσυntonισμός
 \downarrow
 του ΗΜ πεδίου

$\Sigma = \omega + \Omega$ έχουμε υποθέσει $\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^2 C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r})$
 \downarrow
 αδαστοκρατες

$|C_k(t)|^2 =$ πιθανότητα εύρεσης του ηλεκτρονίου στην k στάση

Αν $\omega \sim \Omega \Rightarrow \Delta = \omega - \Omega$ μικρό & $\Sigma = \omega + \Omega$ μεγάλο \Rightarrow
 οι όροι $e^{\pm i\Sigma t}$ αντιπροσωπεύουν γρήγορες ταλαντώσεις,
 οι οποίες τείνουν να μηδένισουν σε χαρακτηριστικούς τους συσχετισμούς χρόνου \rightarrow
 θα έχουν διαταρακτική επίδραση σε σχέση με τους όρους $e^{\pm i\Delta t}$
 Η άγνωση αυτών των γρήγορων όρων $e^{\pm i\Sigma t}$ καλείται RWA
 (Rotating Wave Approximation, Προσέγγιση Περιορισμένου Κύματος)

Μετά την RWA, έχουμε

$$\dot{C}_1(t) = C_2(t) \frac{i\Omega_R}{2} e^{i\Delta t}$$

$$\dot{C}_2(t) = C_1(t) \frac{i\Omega_R}{2} e^{-i\Delta t}$$

$\textcircled{\Phi}$ Αν $\Omega_R \gg \Delta$ & $\Omega_R \gg \Sigma \Rightarrow$ οι εξισώσεις γίνονται $\dot{C}_1(t) = C_2(t) i\Omega_R$
 $e^{\pm i\Delta t} \approx 1, e^{\pm i\Sigma t} \approx 1$ $\dot{C}_2(t) = C_1(t) i\Omega_R$

$\textcircled{\gamma}$ Υπάρχει στις σημειώσεις 2024-29 με δύο τρόπους. Μετά από πράξεις, προκύπτει
 $\textcircled{\delta}$ $C_1(t) = \cos(\Omega_R t) \Rightarrow P_1(t) = \cos^2(\Omega_R t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\Omega_R t)$
 $C_2(t) = i \sin(\Omega_R t) \Rightarrow P_2(t) = \sin^2(\Omega_R t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\Omega_R t)$
 $T = \frac{2\pi}{2\Omega_R} = \frac{\pi}{\Omega_R} \quad d = 1$

$$\textcircled{\epsilon} \langle P_1(t) \rangle = \frac{1}{2} = \langle P_2(t) \rangle$$

$$k_{12} = \frac{\langle P_2(t) \rangle}{t_{\text{mean}}}$$

⇓

$$k_{12} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{4\Omega_R}} = \frac{4\Omega_R}{2\pi} = \frac{2\Omega_R}{\pi}$$

$t_{\text{mean}} = \delta$ άπειρο μικρό χρόνο ώστε σ.2

$P_2(t) = \langle P_2(t) \rangle$ για τη φάση

(δεδωμένου ότι συν αρχί $P_1(0) = 1$
 $P_2(0) = 0$)

$$P_2(t) = \langle P_2(t) \rangle \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\Omega_R t) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(2\Omega_R t) = 0 \Rightarrow (\text{τη φάση})$$

$$2\Omega_R t_{\text{mean}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_{\text{mean}} = \frac{\pi}{4\Omega_R}$$

ΘΕΜΑ 2

α) β) υπάρχουν στις σημειώσεις 2024_25. Συνοπτικά:

$$\Omega_R = 2\sqrt{\eta} g \quad E_{0m} = \left| \left(\frac{4\hbar\omega_m\eta m}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \right|$$

$$U = \frac{\hbar\omega_m\eta m}{V} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{2m\pi z}{L}\right) \right\} \quad [\Omega_R] = s^{-1} \quad [E_{0m}] = \frac{V}{m} \quad [U] = \frac{J}{m^3}$$

πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου κοιλότητας

$$\int_0^L U \epsilon dz = \frac{\hbar\omega_m\eta m}{V} \epsilon \int_0^L \left(1 - \cos\left(\frac{2m\pi z}{L}\right) \right) dz \quad \begin{array}{l} \text{ενέργεια ηλεκτρικού} \\ \text{πεδίου κοιλότητας} \end{array}$$

$$= \hbar\omega_m\eta m$$

Συνολικά, όμως $U = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{E_{0m}}{\sqrt{2}} \right)^2 \Rightarrow \dots$

\hookrightarrow ενέργεια τιμή, όχι ηλίθια...

$$\Rightarrow U = \frac{\hbar\omega_m\eta m}{V} \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{2m\pi z}{L}\right) \right\} \quad \begin{array}{l} \text{πυκνότητα ενέργειας} \\ \text{ηλεκτρικού πεδίου κοιλότητας} \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου κοιλότητας} = \frac{\hbar\omega_m\eta m}{2}$$

άπομένει $\frac{\hbar\omega_m\eta m}{2}$ για την ενέργεια τῶν μηχανικών πεδίων τῆς κοιλότητας

$$\textcircled{8} |\psi\rangle = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} |\downarrow, 2\rangle + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} |\uparrow, 1\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle &= \langle \psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi \rangle = \left(\frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow, 2 | + \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow, 1 | \right) \hat{a}^\dagger \hat{a} \left(\frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} |\downarrow, 2\rangle + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} |\uparrow, 1\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \langle \downarrow, 2 | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \downarrow, 2 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \langle \downarrow, 2 | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \uparrow, 1 \rangle \\ &\quad + \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \langle \uparrow, 1 | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \downarrow, 2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \uparrow, 1 | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \uparrow, 1 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \langle \downarrow, 2 | \downarrow, 2 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \cdot 1 \langle \downarrow, 2 | \uparrow, 1 \rangle \\ &\quad + \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \cdot 2 \langle \uparrow, 1 | \downarrow, 2 \rangle + \frac{1}{2} \cdot 1 \langle \uparrow, 1 | \uparrow, 1 \rangle = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$\langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle$ σύμφωνα ή επειδή $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \Rightarrow \hat{a} \hat{a}^\dagger = 1 + \hat{a}^\dagger \hat{a}$

$$\langle \psi | \hat{a} \hat{a}^\dagger | \psi \rangle = \langle \psi | 1 + \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi \rangle = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle &= \langle \psi | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \psi \rangle = \left(\frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow, 2 | + \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow, 1 | \right) \hat{S}_+ \hat{S}_- \left(\frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} |\downarrow, 2\rangle + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} |\uparrow, 1\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \langle \downarrow, 2 | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \downarrow, 2 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \langle \downarrow, 2 | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \uparrow, 1 \rangle + \\ &\quad \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \langle \uparrow, 1 | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \downarrow, 2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \uparrow, 1 | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \uparrow, 1 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0 \langle \downarrow, 2 | \downarrow, 2 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \cdot 1 \langle \downarrow, 2 | \uparrow, 1 \rangle + \\ &\quad \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \cdot 0 \langle \uparrow, 1 | \downarrow, 2 \rangle + \frac{1}{2} \cdot 1 \langle \uparrow, 1 | \uparrow, 1 \rangle = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\langle \hat{S}_- \hat{S}_+ \rangle$ σύμφωνα ή επειδή $\{\hat{S}_+, \hat{S}_-\} = \hat{I} \Rightarrow \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+ = \hat{I}$

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{S}_- \hat{S}_+ | \psi \rangle &= \langle \psi | \hat{I} - \hat{S}_+ \hat{S}_- | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{I} | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{S}_+ \hat{S}_- | \psi \rangle \\ &= (\langle \psi | \psi \rangle \text{ είναι κανονικοποιημένη}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger \rangle &= \langle \psi | \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger | \psi \rangle = \left(\frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow, 2 | + \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow, 1 | \right) \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger \left(\frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} |\downarrow, 2\rangle + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} |\uparrow, 1\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \langle \downarrow, 2 | \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger | \downarrow, 2 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \langle \downarrow, 2 | \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger | \uparrow, 1 \rangle \\ &\quad + \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \langle \uparrow, 1 | \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger | \downarrow, 2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \uparrow, 1 | \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger | \uparrow, 1 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \langle \downarrow, 2 | \uparrow, 3 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \sqrt{2} \langle \uparrow, 2 | \emptyset, 2 \rangle \\ &\quad + \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \sqrt{3} \langle \uparrow, 1 | \uparrow, 3 \rangle + \frac{1}{2} \sqrt{2} \langle \uparrow, 1 | \emptyset, 2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_- \hat{a} \rangle &= \langle \psi | \hat{S}_- \hat{a} | \psi \rangle = \left(\frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \langle \downarrow 2 | + \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}} \langle \uparrow 1 | \right) \hat{S}_- \hat{a} \left(\frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} | \downarrow 2 \rangle + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} | \uparrow 1 \rangle \right) \\
&= \frac{1}{2} \langle \downarrow 2 | \hat{S}_- \hat{a} | \downarrow 2 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \langle \downarrow 2 | \hat{S}_- \hat{a} | \uparrow 1 \rangle \\
&\quad + \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \langle \uparrow 1 | \hat{S}_- \hat{a} | \downarrow 2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \uparrow 1 | \hat{S}_- \hat{a} | \uparrow 1 \rangle = \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{2} \langle \downarrow 2 | 0 1 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \sqrt{1} \langle \downarrow 2 | \downarrow 0 \rangle \\
&\quad + \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \sqrt{2} \langle \uparrow 1 | 0 1 \rangle + \frac{1}{2} \sqrt{1} \langle \uparrow 1 | \downarrow 0 \rangle = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_+ \hat{a} \rangle &= \langle \psi | \hat{S}_+ \hat{a} | \psi \rangle = \dots \\
&= \frac{1}{2} \langle \downarrow 2 | \hat{S}_+ \hat{a} | \downarrow 2 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \langle \downarrow 2 | \hat{S}_+ \hat{a} | \uparrow 1 \rangle \\
&\quad + \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \langle \uparrow 1 | \hat{S}_+ \hat{a} | \downarrow 2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \uparrow 1 | \hat{S}_+ \hat{a} | \uparrow 1 \rangle = \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{2} \langle \downarrow 2 | \uparrow 1 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \sqrt{1} \langle \downarrow 2 | \downarrow 0 \rangle \\
&\quad + \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \sqrt{2} \langle \uparrow 1 | \uparrow 1 \rangle + \frac{1}{2} \sqrt{1} \langle \uparrow 1 | 0 0 \rangle = \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_- \hat{a}^\dagger \rangle &= \langle \psi | \hat{S}_- \hat{a}^\dagger | \psi \rangle = \dots \\
&= \frac{1}{2} \langle \downarrow 2 | \hat{S}_- \hat{a}^\dagger | \downarrow 2 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \langle \downarrow 2 | \hat{S}_- \hat{a}^\dagger | \uparrow 1 \rangle \\
&\quad + \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \langle \uparrow 1 | \hat{S}_- \hat{a}^\dagger | \downarrow 2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \uparrow 1 | \hat{S}_- \hat{a}^\dagger | \uparrow 1 \rangle = \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{3} \langle \downarrow 2 | 0 3 \rangle + \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{2} \sqrt{2} \langle \downarrow 2 | \downarrow 2 \rangle \\
&\quad + \frac{e^{i(\phi-\theta)}}{2} \sqrt{3} \langle \uparrow 1 | 0 3 \rangle + \frac{1}{2} \sqrt{2} \langle \uparrow 1 | \downarrow 2 \rangle = \frac{e^{i(\theta-\phi)}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$\textcircled{8} \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad \hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad \text{σ.5}$$

$$\hat{N} \hat{a}|n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}|n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a} \sqrt{n}|n-1\rangle = \hat{a}^\dagger \sqrt{n} \sqrt{n-1}|n-2\rangle = \sqrt{n} \sqrt{n-1} \sqrt{n-1}|n-1\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{N} \hat{a}|n\rangle = (n-1) \sqrt{n}|n-1\rangle = (n-1) \hat{a}|n\rangle \Rightarrow \hat{N} \hat{a}|n\rangle = (n-1) \hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{N} \hat{a}^\dagger|n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger|n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a} \sqrt{n+1}|n+1\rangle = \sqrt{n+1} \hat{a}^\dagger \sqrt{n+1}|n\rangle = (n+1) \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{N} \hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1) \hat{a}^\dagger|n\rangle$$

$$[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a} = -\hat{a}$$

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] \hat{a} = \hat{a}^\dagger$$

⊗ --- RWA
 --- no RWA

τρέφοιλο (περιέχει σφισυκτα) & dephasing

ή περίοδος μετακινείται
 συχνά συχνά

Επειδή $\Delta \neq 0, \lambda < 1$

ΔΕΞΙΑ

≠ αβδόνη εκπομπή από την 1 προτ άκωγα
 καλύτερη σχέση ⇒ οι τελευταίες σφίσιων...