Νόμος Maxwell, ρεύμα μετατόπισης

Πυκνωτής με κυκλικούς οπλισμούς

Πυκνωτής με κυκλικούς οπλισμούς ακτίνας R σε απόσταση d, φορτίζεται με ρυθμό dE/dt. Να υπολογίσετε το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο.

Εφαρμογή: r=5 cm , dE/dt=10^{12} V/m s

$$J_D = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

$$I_D = \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

$$\oint \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \rightarrow B 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

$$\rightarrow B = \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 r \frac{dE}{dt}$$

B=0,5 x12,56x10^{-7} H/mx8,9x10^{-12} F/m x0,05 m x 10^{12} V/m s =27,5 10^{-7} T

I_D=0,07 A

Βλέπουμε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι πολύ ασθενές! Δεν μπορεί να παρατηρηθεί σε χαμηλές συχνότητες, όμως είναι σημαντικό για συχνότητες πολλών MHz.

Πυκνωτής, ρεύμα μετατόπισης

Ένας πυκνωτής έχει ακτίνα 1 mm και απόσταση μεταξύ των οπλισμών 0,1 mm Το διάκενο καλύπτεται από διηλεκτρικό με σχετική διηλεκτρική σταθερά $\varepsilon_r = 2$. Στο πυκνωτή εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση, πλάτους V_0 =10 V και συχνότητας f=1 GHz. Να υπολογίσετε το ρεύμα μετατόπισης και το μαγνητικό πεδίο στην περιφέρεια του πυκνωτή.

$$J_D = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

$$I_D = \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

$$E = \frac{V}{d} \quad \rightarrow E = \frac{V_0}{d}\sin(\omega t)$$

$$\frac{d\mathrm{E}}{dt} = \omega \frac{V_0}{d}\cos(\omega t) \quad \rightarrow J_D = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

$$I_D = \varepsilon_r \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \pi r^2 \omega \frac{V_0}{d}\cos(\omega t)$$

$$I_{D0} = 0,035\ A$$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I_D \rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I_D$$

$$\rightarrow B_0 = \frac{4\pi 10^{-7}}{2\pi \times 0,001} I_D \rightarrow B_0 = 7 \times 10^{-6}\ T$$

Στροβιλισμός Μαγνητικού Πεδίου.

Σύγκριση κυκλωματικής και διαφορικής μορφής του Ν. Faraday.

Εφαρμογή της διανυσματικής μορφής της εξίσωσης Maxwell από τον νόμο του Ampere.

Ρευματοφόρος αγωγός έχει ακτίνα R και διαρρέεται από ρεύμα I. Θεωρούμε ότι το ρεύμα κατανέμεται ομοιόμορφα στην διατομή του αγωγού. α)Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό και εξωτερικό του αγωγού. β)Υπολογίστε τον στροβιλισμό του πεδίου στο εσωτερικό και εξωτερικό του αγωγού. Χρησιμοποιείστε τον τύπο του στροβιλισμού για κυλινδρικές συντεταγμένες. γ)Από το αποτέλεσμα του β), υπολογίστε ξανά το μαγν. πεδίο και συγκρίνατε με το α).

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\begin{pmatrix} \frac{\hat{\mathrm{r}}}{r} & \hat{\varphi} & \frac{\hat{\mathrm{k}}}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_r & rB_\varphi & B_z \end{pmatrix}$$

Νόμος Ampere: $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$

$$B_r=0,\quad B_\varphi=0,\quad \frac{\partial B_z}{\partial\varphi}=0 \qquad \text{Όμως:}$$

$$\rightarrow\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_\varphi\right)\hat{k}=\mu_0 J_z\hat{k}$$

Ολοκληρώνοντας τη τελευταία σχέση,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_\varphi\right)=\mu_0 J_z\rightarrow\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_\varphi\right)=\mu_0 J_z r\rightarrow$$

$$B_\varphi=\frac{1}{2}r\mu_0 J_z$$

Βρήκαμε το ίδιο αποτέλεσμα με εκείνο που είχαμε βρει χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ampere σε μία κλειστή διαδρομή.

Κύλινδρος ακτίνας b, διαρρέεται από μαγνητικό πεδίο της μορφής: $\vec{B} = B_0 e^{kt} \hat{k}$.Για r<b να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που επάγεται. Υπολογίστε χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική και την διαφορική μορφή της εξίσωσης Maxwell.

ΗΕΔ: $$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\, d\vec{s}$$

Για διαδρομή διαλέγουμε ομόκεντρο κύκλο ακτίνας r<b. Το ολοκλήρωμα απλοποιείται:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 2\pi r E$$

Το Ε είναι εφαπτομενικό στον κύκλο. Επίσης:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\, d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t}(B\pi r^2) = \frac{\partial}{\partial t}(B_0 e^{kt}\pi r^2) = k B_0 \pi r^2 e^{kt}$$

$$2\pi r E = kB_0 \pi r^2 e^{kt} \quad \rightarrow \quad E = -\frac{1}{2} kB_0 r e^{kt}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{2} kB_0 r e^{kt} \hat{\theta}$$

Χρησιμοποιώντας τη διαφορική μορφή της εξίσωσης Maxwell :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Η μοναδική συνιστώσα του Β είναι κατά τον άξονα Ζ.

$$\vec{B} = B_z \hat{k}$$

Υπολογίζουμε την z συνιστώσα του στροβιλισμού.

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta}\right)\hat{k}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο δεν εξαρτάται από την γωνία θ.

$$\frac{\partial E_r}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rE_\theta)}{\partial r} = -kB_0 e^{kt} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial (rE_\theta)}{\partial r} = -krB_0 e^{kt}$$

$$rE_\theta = -kB_0 e^{kt}\int_0^r r\,dr \quad \rightarrow \quad E_\theta = -\frac{1}{2} kr^2 B_0 e^{kt}$$

Τελικά : $$\vec{E} = -\frac{1}{2}\hat{\theta} kr^2 B_0 e^{kt}$$

Συμπέρασμα : Γενικά ο υπολογισμός με τη διαφορική μορφή των εξισώσεων Maxwell είναι πιο δύσκολος γιατί οδηγεί σε ολοκλήρωμα.

Να αποδειχθεί ότι δοσμένο μαγνητικό πεδίο δεν πληρεί την εξίσωση στροβιλισμού.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{2}(\varepsilon_0 \mu_0) k^2 r B_0 e^{kt}$$

$$\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}: \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial r}(B_0 e^{kt}) = 0$$

Η αιτία είναι ότι η μεταβολή του μαγνητικού πεδίου διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός! Παρατηρούμε το όρο ($\varepsilon_0 \mu_0$) που είναι ίσος με 1/ c και το λόγο r/c !

Μπορούμε να δοκιμάσουμε με αριθμητικές τιμές κ=10^6 B_0 = 1 T t=0 στην εξίσωση του μαγνητικού πεδίου και ρ=0 στην εξίσωση του στροβιλισμού.

Το μαγνητικό πεδίο ανάμεσα στους πόλους ενός ηλεκτρομαγνήτη με διάμετρο R, μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση: $B=B_0\,[1-0{,}5(br)^2]\sin(\omega t)$. Αν R<< λ όπου λ το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στο ω , α) Να υπολογιστεί η τιμή του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου στο διάκενο του μαγνήτη, και έξω από αυτό σαν συνάρτηση του r. β) Υπολογίστε την πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης για r<R.

Θεωρούμε ότι ο αέρας στο διάκενο έχει ειδική αγωγιμότητα σ=0 και διηλεκτρική σταθερά $\varepsilon=\varepsilon_0$.

Σύμφωνα με τον νόμο του Faraday για μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο, η επαγομένη ΗΕΔ ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής. Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας του προβλήματος, αν διαλέξω μια κυκλική διαδρομή κάθετη στο μαγνητικό πεδίο, με κέντρο στον άξονα συμμετρίας του πόλου, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι εφαπτόμενη στον κύκλο.

$$V_F=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}dS \rightarrow \int_C \vec{E}d\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}dS$$

$$E_\phi \cdot 2\pi r=-\omega B_0\cos(\omega t)\int_0^r\left(1-\frac{1}{2}(br)^2\right)2\pi r\,dr$$

$$E_\phi=-\frac{1}{2}\omega B_0\cos(\omega t)\cdot r\left(1-\frac{1}{4}(br)^2\right)$$

$$E_\phi \cdot 2\pi r=-\omega B_0\cos(\omega t)\left(1-0{,}5(br)^2\right)2\pi r dr$$

Για r>R η σχέση γίνεται: $$E_\phi 2\pi r=-\omega B_0\cos\omega t\int_0^R\left(1-0{,}5(br)^2\right)2\pi r dr$$

$$E_\phi=-\frac{1}{r}\omega B_0\cos\omega t\,R(1-\frac{1}{4}b^2R^2)$$

$$J_d=\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$J_d=\frac{1}{2}\varepsilon_0\omega^2 B_0\sin\omega t\; r\left(1-\frac{1}{4}(br)^2\right)$$

Το ρεύμα μετατόπισης αντιστοιχεί στον ρυθμό μεταβολής του Ηλεκτρικού Πεδίου

Θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε από την αντίστοιχη εξίσωση Maxwell:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\;\Rightarrow\;\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\phi\right)\hat{k}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}\hat{k}$$