## Δυναμικό Yukawa.

Δίδεται Δυναμικό της μορφής: $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-r/\lambda}$ . α) Υπολογίστε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σαν συνάρτηση του r. β) Υπολογίστε την πυκνότητα του φορτίου σαν συνάρτηση του r. Δίδεται: $\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right)$.

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-r/\lambda}$$

$$k = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$E(r) = -\frac{dV}{dr} = -\left(\left(-\frac{k}{r^2}\right)e^{-r/\lambda} - \left(\frac{k}{r}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-r/\lambda}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda}\right)\frac{k}{r} e^{-r/\lambda}$$

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό της πυκνότητας φορτίου:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(-r^2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda}\right)\frac{k}{r} e^{-r/\lambda}\right) = \frac{k}{\lambda^2 r} e^{-r/\lambda}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\lambda^2} V(r)$$

$$\rho = -\varepsilon_0 \frac{1}{\lambda^2} V(r)$$

Η μορφή του δυναμικού, περιγράφει ένα φορτίο ( αρνητικό) μέσα σε ένα υλικό ή αέριο που περιέχει θετικά ιόντα. Τα θετικά φορτία έλκονται και θωρακίζουν το αρνητικό φορτίο. Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το φορτίο που περικλείεται σε μια σφαίρα ακτίνας r και διαπιστώνουμε ότι πολύ γρήγορα τείνει στο μηδέν.

Το φορτίο των ιόντων ελαττώνει το πεδίο που δημιουργεί το φορτίο μέχρι που το πεδίο μηδενίζεται.

Το μήκος λ ονομάζεται μήκος Debye. Το δυναμικό μηδενίζεται πολύ γρήγορα και η εμβέλεια του πεδίου είναι πολύ μικρή. Την ίδια μορφή δυναμικού χρησιμοποίησε και ο Yukawa για να περιγράψει την ασθενή αλληλεπίδραση.

## Δυναμικό V=100 e-50x sin(50y)

Δίνεται το πεδίο με δυναμικό V=100 e-50x sin(50y) σε κενό χώρο. (α) Δείξτε ότι $\vec{\nabla}\vec{E} = 0$ . (β) Αποδείξτε ότι το επίπεδο y=0 (δηλαδή το (X,Z)), είναι ισοδυναμική επιφάνεια. (γ) Δείξτε ότι το **E** είναι κάθετο στο επίπεδο y=0, (δ) Αν θεωρήσουμε ότι η ισοδυναμική επιφάνεια είναι η επιφάνεια ενός αγωγού που επεκτείνεται στην περιοχή y<0, βρείτε το ολικό φορτίο στο επίπεδο y=0, 0<x<∞, 0<z<1. Υποθέστε ότι η περιοχή y<0 είναι το εσωτερικό του αγωγού. (ε) Πόση ενέργεια είναι αποθηκευμένη στον κύβο 0<x,y,z< 1 ;

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial x}V(x,y)\hat{i} - \frac{\partial}{\partial y}V(x,y)\hat{j}$$

$$V(x,y) = 100e^{-50x}\sin(50y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}V(x,y) = -5000e^{-50x}\sin(50y) \qquad \frac{\partial}{\partial y}V(x,y) = 5000e^{-50x}\cos(50y)$$

$$\vec{E} = 5000e^{-50x}(\sin(50y)\hat{i} - \cos(50y)\hat{j})$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = -25\times10^4\sin(50y) + 25\times10^4\sin(50y) = 0$$

Στη συνάρτηση του δυναμικού αντικαθιστώντας y=0,

$$V(x,y) = 100e^{-50x}\sin(50y)$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad V(x,y) = 0$$

Ή από την μορφή του E για y=0, έχει μόνον y συνιστώσα δηλαδή κάθετη στο επίπεδο (x,z) άρα δεν παράγει έργο κατά την μετατόπιση φορτίου στο επίπεδο y=0.

Η επιφανειακή πυκνότητα συνδέεται με την συνιστώσα της έντασης που είναι κάθετη στην επιφάνεια. Για y=0 μηδενίζεται η x συνιστώσα.

Το ολικό φορτίο στη δοσμένη περιοχή θα υπολογιστεί :

$$q = \varepsilon_0 5000\int_0^1\int_0^\infty e^{-50x}dx\,dz$$

## Απαριθμητής Geiger – Muller

Ο απαριθμητής Geiger – Muller, αποτελείται από ένα μεταλλικό σωλήνα ακτίνας $r_c$ ( κάθοδος) και έναν ευθύγραμμο αγωγό κατά μήκος του άξονα του (άνοδος) με ακτίνα $r_\alpha$. Ανάμεσα στην άνοδο και στην κάθοδο, εφαρμόζουμε τάση V. Υπολογίστε το δυναμικό και την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος της ακτίνας. (Άνοδος είναι το θετικό ηλεκτρόδιο). Για V=500V $r_a$=100μm $r_c$=1 cm , υπολογίστε την ένταση του πεδίου στην επιφάνεια της ανόδου.

Ας υποθέσουμε ότι το μήκος του κυλίνδρου είναι πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα του. Αν η πυκνότητα φορτίου κατά μήκος της ανόδου είναι λ, εφαρμόζω τον νόμο του Gauss για μια κυλινδρική επιφάνεια με $r_A < r < r_C$ .

$$\oint_s \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \to E\,2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \to E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Το δυναμικό υπολογίζεται:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \to E = -\frac{dV}{dr}$$

$$V = V_a - V_c = -\int_{r_c}^{r_a} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_c}{r_a}$$

$$\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{r_c}{r_a}}V$$

$$E = \frac{V}{r\ln\frac{r_c}{r_a}}$$

## Μέγιστη τάση.

Δίνεται ένα ομοαξονικό καλώδιο με ακτίνα εξωτερικού αγωγού b και ακτίνα εσωτερικού αγωγού a. Υπολογίστε τον λόγο των ακτίνων για τον οποίο η τάση την οποία μπορεί να αντέξει το καλώδιο γίνεται μέγιστη.

Την αντοχή ενός διηλεκτρικού σε τάση, την ονομάζουμε διηλεκτρική αντοχή και την μετράμε σε V/m δηλαδή πρόκειται για την μέγιστη ένταση ηλεκτρικού πεδίου που μπορεί να αντέξει το διηλεκτρικό χωρίς να καταρρεύσει.

Υπολογίζουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου όπως στο προηγούμενο πρόβλημα.

$$E = \frac{V}{r \ln \frac{b}{a}}$$

το E μεγιστοποιείται για r=a

$$E_M = \frac{V}{a \ln \frac{b}{a}}$$

Παραγωγίζοντας το $E_M$ προς το a, βρίσκουμε ότι η παράγωγος μηδενίζεται για a=b/e , όπου e η βάση των φυσικών λογάριθμων.

Για την τιμή αυτή, η συνάρτηση έχει ακρότατο αλλά δεν είναι εμφανές αν είναι μέγιστο ή ελάχιστο. Υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο και βρίσκουμε το $E_M$ είναι ελάχιστο. Άρα χρειάζεται υψηλότερη τάση για να φτάσει στο όριο της διηλεκτρικής αντοχής!