Τι είναι η Κβαντική Λογική;

ΧΡΥΣΟΒΑΛΑΝΤΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥ

(Βασισμένο σε σημειώσεις του D. Malament)

0.1. **Εισαγωγή.** Στην κβαντική λογική, οι προβολικοί τελεστές σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ ή οι κλειστοί υπόχωροι στους οποίους αυτοί προβάλλουν θεωρούνται ως οι μαθηματικές αναπαραστάσεις των προτάσεων που περιγράφουν τα γεγονότα του κβαντικού κόσμου:

"Αν μετρηθεί η τιμή του παρατηρήσιμου A, το αποτέλεσμα της μέτρησης βρίσκεται αναγκαία (ή με πιθανότητα ίση με 1) στο υποσύνολο Δ των πραγματικών αριθμών."

Οι ιδιοτιμές 0 και 1 ενός προβολικού τελεστή αναπαριστούν τις δυνατές αληθοτιμές της πρότασης που αυτός αναπαριστά. Αν ένα κβαντικό σύστημα βρίσκεται σε κάποια κατάσταση $\psi \in \mathcal{H}$ τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

όπου $\psi_1 \in F$ και $\psi_2 \in F^{\perp}$ με F οποιονδήποτε κλειστό υπόχωρο του $\mathcal{H}$ και $\mathcal{H} = F \oplus F^{\perp}$. Η πρόταση που αναπαρίσταται από τον προβολικό τελεστή που προβάλλει στον υπόχωρο F είναι αληθής όταν το σύστημα βρίσκεται σε κάποια κατάσταση $\psi \in F$. Αντίστοιχα, αν το σύστημα βρίσκεται σε κάποια κατάσταση $\psi \in F^{\perp}$ τότε η πρόταση είναι ψευδής. Σε κάθε άλλη περίπτωση η πρόταση δεν έχει αληθοτιμή. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη σύνταξη και τη σημασιολογία της **γλώσσας της προτασιακής κβαντικής λογικής.**

0.2. **Σύνταξη.** Έστω μία τυπική γλώσσα L η οποία περιλαμβάνει τα ακόλουθα σύμβολα:

(1) Άπειρο πλήθος προτασιακών συμβόλων: $A_1, A_2, ...$
(2) Τους προτασιακούς συνδέσμους: $\sim\ \wedge \vee$
(3) Αριστερή και δεξιά παρένθεση: ( )

Το σύνολο των προτάσεων της L, $Sent(L)$ ορίζεται επαγωγικά:

(1) Κάθε προτασιακό σύμβολο A_i είναι μια πρόταση της L
(2) Αν φ, ψ είναι προτάσεις της L, τότε οι ακόλουθες εκφράσεις είναι επίσης προτάσεις:

$$(\sim \varphi)$$

$$(\varphi \wedge \psi)$$

$$(\varphi \vee \psi)$$

0.3. **Σημασιολογία.** Η σημασιολογία της κβαντικής λογικής ορίζεται με βάση την **αποτίμηση-ΚΛ,** ένα ζεύγος $(\mathcal{H}, v)$ που αποτελείται από ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ και v μία απεικόνιση από το σύνολο των προτάσεων της L, $Sent(L)$, στο σύνολο των κλειστών υπόχωρων του $\mathcal{H}$, $L(\mathcal{H})$, τέτοια ώστε

(1) $v(\sim \varphi) = v(\varphi)^{\perp}$,
(2) $v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \cap v(\psi)$
(3) $v(\varphi \vee \psi) = \overline{v(\varphi) + v(\psi)}$, όπου $\overline{v(\varphi) + v(\psi)}$ είναι η κλειστότητα του συνόλου των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων των υποχώρων $v(\varphi)$ και $v(\psi)$.

για όλες τις προτάσεις $\varphi, \psi \in Sent(L)$.

Για ένα υποσύνολο Γ του $Sent(L)$ θα λέμε ότι το Γ **έπεται-ΚΛ** ψ, $\Gamma \models_{\text{ΚΛ}} \psi$, αν και μόνο αν, για όλες τις αποτιμήσεις-ΚΛ $(\mathcal{H}, v)$

$$\cap \{v(\varphi) : \varphi \in \Gamma\} \subseteq v(\psi).$$

Με βάση αυτόν τον ορισμό, $\models_{\text{ΚΛ}} \psi$ αν και μόνο αν για όλες τις αποτιμήσεις-ΚΛ $(\mathcal{H}, v)$, $v(\psi) = \mathcal{H}$.

0.4. **Έγκυρες μορφές συλλογισμού.**

(1) $\varphi \models_{\text{ΚΛ}} (\varphi \vee \psi)$ και $\psi \models_{\text{ΚΛ}} (\varphi \vee \psi)$
(2) Αν $\varphi \models_{\text{ΚΛ}} \theta$ και $\psi \models_{\text{ΚΛ}} \theta$ τότε $(\varphi \vee \psi) \models_{\text{ΚΛ}} \theta$
(3) $\{\varphi, \psi\} \models_{\text{ΚΛ}} \varphi \wedge \psi$
(4) $\varphi \wedge \psi \models_{\text{ΚΛ}} \varphi$ και $\varphi \wedge \psi \models_{\text{ΚΛ}} \psi$
(5) $\models_{\text{ΚΛ}} \sim (\varphi \wedge \sim \varphi)$
(6) $\models_{\text{ΚΛ}} (\varphi \vee \sim \varphi)$
(7) $\varphi \models_{\text{ΚΛ}} \sim (\sim \varphi)$ και $\sim (\sim \varphi) \models_{\text{ΚΛ}} \varphi$
(8) $((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)) \models_{\text{ΚΛ}} (\varphi \wedge (\psi \vee \theta))$ (μονόδρομος επιμεριστικός νόμος)
(9) $\sim (\varphi \wedge \psi) \models_{\text{ΚΛ}} (\sim \varphi \vee \sim \psi)$ και $(\sim \varphi \vee \sim \psi) \models_{\text{ΚΛ}} \sim (\varphi \wedge \psi)$
(10) $\sim (\varphi \vee \psi) \models_{\text{ΚΛ}} (\sim \varphi \wedge \sim \psi)$ και $(\sim \varphi \wedge \sim \psi) \models_{\text{ΚΛ}} \sim (\varphi \vee \psi)$

Άσκηση 1. Να δείξετε ότι

(1) Η άλλη κατεύθυνση του επιμεριστικού νόμου δεν είναι έγκυρος κανόνας: $(\varphi \wedge (\psi \vee \theta)) \not\models_{\mathrm{K\Lambda}} ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta))$

(2) Η εις άτοπον απαγωγή δεν αποτελεί έγκυρο κανόνα: Αν $\Gamma \cup \{\varphi\} \models_{\mathrm{K\Lambda}} (\psi \wedge \sim \psi)$, τότε δεν ισχύει $\Gamma \models_{\mathrm{K\Lambda}} \sim \varphi$.

Λύση. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του αντιπαραδείγματος. Έστω ο χώρος Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ και οι προτάσεις A_1, A_2, A_3 οι οποίοι αντιστοιχούν βάσει της αποτίμησης-ΚΛ στους υποχώρους $v(A_1)$, $v(A_2)$, $v(A_3)$ που παράγονται από τα διανύσματα,έχει

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

αντίστοιχα. Παρατηρείστε ότι τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα οι αντίστοιχοι υπόχωροι έχουν το μηδενικό διάνυσμα ως κοινό στοιχείο και δεν είναι ορθογώνια.

1. Θα δείξουμε ότι $(A_1 \wedge (A_2 \vee A_3)) \not\models_{\mathrm{K\Lambda}} ((A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge A_3))$. Ισχύει ότι,

$$v(A_1 \wedge (A_2 \vee A_3)) = v(A_1) \cap v(A_2 \vee A_3) = v(A_1) \cap \mathcal{H} = v(A_1)$$

$$v((A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge A_3)) = \overline{v(A_1 \wedge A_2) + v(A_1 \wedge A_3)} = 0.$$

Όμως $v(A_1)$ δεν είναι υποσύνολο του μηδενικού υπόχωρου, άρα $(A_1 \wedge (A_2 \vee A_3)) \not\models_{\mathrm{K\Lambda}} ((A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge A_3))$.

2. Καταρχάς παρατηρείστε ότι για κάθε πρόταση φ, ψ ισχύει το εξής: Αν $\varphi \models_{\mathrm{K\Lambda}} (\psi \wedge \sim \psi)$ τότε $\models_{\mathrm{K\Lambda}} \sim \varphi$. Ωστόσο, ενώ με βάση τους κανόνες (4) και (9) αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\{A_1, (\sim A_1 \vee \sim A_2), A_2\} \not\models_{\mathrm{K\Lambda}} ((A_1 \wedge A_2) \wedge \sim (A_1 \wedge A_2)),$$

δεν ισχύει ότι

$$\{A_1, (\sim A_1 \vee \sim A_2)\} \not\models_{\mathrm{K\Lambda}} \sim A_2.$$

Πράγματι,

$$v(\sim A_1 \vee \sim A_2) = \overline{v(A_1)^{\perp} + v(A_2)^{\perp}} = \mathcal{H},$$

άρα

$$v(A_1) \cap v(\sim A_1 \vee \sim A_2) = v(A_1).$$

Αλλά ο $v(A_1)$ δεν είναι υπόχωρος του $v(A_2)^{\perp}$, επειδή $v(A_2)$ δεν είναι ορθογώνιος στο $v(A_1)$. Επομένως,

$$v(A_1) \cap v(\sim A_1 \vee \sim A_2) \not\subseteq v(A_2).$$

.

0.5. **Η συνεπαγωγή.** Υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι να ορίσουμε τη συνεπαγωγή:

- Η συνεπαγωγή $\varphi \to_1 \psi$ είναι συντομογραφία του $(\sim \varphi \vee \psi)$

- Η συνεπαγωγή $\varphi \rightarrow_2 \psi$ είναι συντομογραφία του $\sim (\varphi \wedge \sim \psi)$
- Η συνεπαγωγή $\varphi \rightarrow_3 \psi$ είναι συντομογραφία του $(\sim \varphi \vee (\varphi \wedge \psi))$.

Οι προτάσεις της δεξιάς στήλης είναι ισοδύναμες στην κλασική λογική. Στην κβαντική λογική, οι δύο πρώτοι ορισμοί της συνεπαγωγής, " $\rightarrow_1$ " και " $\rightarrow_2$ ", είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους αλλά δεν είναι ισοδύναμοι με τον τρίτο ορισμό, " $\rightarrow_3$ ". Ωστόσο, ο τρίτος ορισμός αποτελεί την καλύτερη επιλογή για τη διατύπωση υποθετικών προτάσεων στην κβαντική λογική διότι προσομοιάζει με τις υλικές υποθετικές προτάσεις της κλασικής λογικής.

Για να γίνουν κατανοητοί αυτοί οι ισχυρισμοί, μπορείτε να εξετάσετε τους βασικούς συλλογιστικούς κανόνες που ικανοποιούνται από την υλική συνεπαγωγή στην κλασική λογική:

Modus-Ponens (MP): $\Gamma_1 \models_{\mathrm{K\Lambda}} \varphi$, $\Gamma_2 \models_{\mathrm{K\Lambda}} \varphi \rightarrow \psi$ / τότε / $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models_{\mathrm{K\Lambda}} \psi$
Modus-Tollens (MT): $\Gamma_1 \models_{\mathrm{K\Lambda}} \sim \psi$, $\Gamma_2 \models_{\mathrm{K\Lambda}} \varphi \rightarrow \psi$ / τότε / $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models_{\mathrm{K\Lambda}} \sim \varphi$
Υπό-Συνθήκη-Απόδειξη (ΣΑ): $\Gamma \cup \{\varphi\} \models_{\mathrm{K\Lambda}} \psi$ / τότε / $\Gamma \models_{\mathrm{K\Lambda}} (\varphi \rightarrow \psi)$.

Το καθεστώς των παραπάνω κανόνων συλλογισμού στην κβαντική λογική ανάλογα με το αν υιοθετούμε τη συνεπαγωγή $\rightarrow_1$, $\rightarrow_2$ και $\rightarrow_3$ περιγράφεται στον ακόλουθο πίνακα:

		MP	MT	ΣΑ
	$\rightarrow_1$	Όχι	Όχι	Όχι
Ισχύουν οι συλλογιστικοί κανόνες στην ΚΛ;	$\rightarrow_2$	Όχι	Όχι	Όχι
	$\rightarrow_3$	Ναι	Ναι	Όχι

έχει

Άσκηση 2. Δείξτε με τη χρήση αντιπαραδειγμάτων την ισχύ των αρνητικών εγγραφών του παραπάνω πίνακα.

Λύση. 1. $MP_{\rightarrow_1}$: το αντιπαράδειγμα προκύπτει αν δείξουμε ότι $\{(\sim A_1 \vee A_2), A_1\} \not\models_{\mathrm{K\Lambda}} A_2$ χρησιμοποιώντας τα διανύσματαA_1, A_2 της προηγούμενης άσκησης, όποτε $\{(\sim \varphi \vee \psi), \varphi\} \not\models_{\mathrm{K\Lambda}} \psi$. Ομοίως και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

0.6. **Η ερμηνεία της κβαντικής λογικής από τον Putnam.** Η γενική άποψη του Putnam (1969) είναι ότι η λογική είναι μια επιστήμη της φύσης και ότι ορισμένες «αναγκαίες αλήθειες» της ενδέχεται να απορριφθούν για εμπειρικούς λόγους. Μεταξύ άλλων υποστηρίζει ότι ζούμε σε έναν κόσμο που διέπεται από μη-κλασική λογική ενώ η κλασική λογική, με την οποία περιγράφουμε γεγονότα σε μεσοσκοπική κλίμακα, αποτελεί ειδική περίπτωση της μη-κλασικής λογικής – ισχύει όταν οι υπόχωροι του χώρου Hilbert συγκροτούν άλγεβρα Boole. Επιπλέον, οτιδήποτε θα χαρακτηρίζαμε άνωμαλία΄ της κβαντικής μηχανικής ανάγεται στον ασυνήθη χαρακτήρα της λογικής και γι αυτό κάθε άνωμαλία΄ εξαφανίζεται εφόσον υιοθετήσουμε μη-κλασική λογική. Για τον Putnam (1969) η ερμηνεία της ΚΛ έχει ως εξής:

(1) Όλες οι προτάσεις της ΚΛ έχουν αληθοτιμές σε κάθε χρονική στιγμή.
(2) Οι προτασιακοί σύνδεσμοι έχουν την ίδια σημασία όπως και στην κλασική λογική.
(3) Η σημασία της έκφρασης $\Gamma \models_{\text{ΚΛ}} \psi$ της μεταγλώσσας είναι η εξής: για κάθε κατάσταση του υπό εξέταση συστήματος, αν όλες οι προτάσεις $\varphi \in \Gamma$ είναι αληθείς, η ψ είναι αληθής.

Η σημασία της μη αμφίδρομης εγκυρότητας του επιμεριστικού νόμου: Έστω δύο παρατηρήσιμα A, B ενός φυσικού συστήματος με ιδιοτιμές $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, τα οποία δεν μετατίθενται, είναι ασύμβατα. Έστω οι προτάσεις,

$$A_i : \text{¨Το παρατηρήσιμο A έχει τιμή } a_i\text{'}$$

$$B_i : \text{¨Το παρατηρήσιμο B έχει τιμή } b_i\text{'}$$

με $i = 1, 2, 3$. Όλες οι προτάσεις έχουν αληθοτιμή ταυτοχρόνως. Υποθέστε ότι η B_1είναι αληθής. Τότε, λόγω της ασυμβατότητας των A, B ισχύει ότι οι A_i είναι όλες ψευδείς· άρα, και οι προτάσεις $B_1 \wedge A_i$ είναι ψευδείς, για $i = 1, 2, 3$. Κατά συνέπεια η πρόταση $(B_1 \wedge A_1) \vee (B_1 \wedge A_2) \vee (B_1 \wedge A_3))$ είναι επίσης ψευδής, δηλαδή,

$$B_1 \models_{\text{ΚΛ}} \sim ((B_1 \wedge A_1) \vee (B_1 \wedge A_2) \vee (B_1 \wedge A_3)))\,.$$

Όμως, επειδή οι δυνατές τιμές του παρατηρήσιμου A είναι οι a_1, a_2, a_3, η πρόταση $A_1 \vee A_2 \vee A_3$ αποτελεί λογική αλήθεια, $\models_{\text{ΚΛ}} A_1 \vee A_2 \vee A_3$. Καθώς $B_1 \models_{\text{ΚΛ}} B_1$, εξ υποθέσεως, συμπεραίνουμε ότι

$$B_1 \models_{\text{ΚΛ}} B_1 \wedge (A_1 \vee A_2 \vee A_3)$$

Αν ίσχυε η αμφίδρομη επιμεριστική ιδιότητα τότε θα συμπεραίναμε ότι

$$B_1 \models_{\text{ΚΛ}} \sim ((B_1 \wedge A_1) \vee (B_1 \wedge A_2) \vee (B_1 \wedge A_3))) \wedge ((B_1 \wedge A_1) \vee (B_1 \wedge A_2) \vee (B_1 \wedge A_3)))$$

άρα,

$$\models_{\text{ΚΛ}} \sim B_1$$

Επειδή όμως η επιμεριστική ιδιότητα δεν ισχύει αμφίδρομα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$B_1 \models_{\text{ΚΛ}} \sim ((B_1 \wedge A_1) \vee (B_1 \wedge A_2) \vee (B_1 \wedge A_3))) \wedge (B_1 \wedge (A_1 \vee A_2 \vee A_3))\,.$$

Δηλαδή, από το γεγονός ότι το παρατηρήσιμο B έχει ορισμένη τιμή έπεται ότι το παρατηρήσιμο A λαμβάνει συγκεκριμένες τιμές, ταυτόχρονα με το B , χωρίς να έχει οποιαδήποτε από τις τιμές αυτές.

Κριτική: Η κριτική που μπορεί να εγερθεί κατά του δεύτερου ισχυρισμού του Putnam είναι ότι η σχέση $\models_{\text{ΚΛ}}$ δεν σέβεται τους κλασικούς αληθοπίνακες για την άρνηση, τη σύζευξη και τη διάζευξη. Ωστόσο, ο Malament αποδεικνύει μια ισχυρότερη θέση: η σχέση $\models_{\text{ΚΛ}}$ δεν σέβεται οποιονδήποτε αληθοπίνακα γι αυτούς τους συνδέσμους.

0.7. **Μια δυνατή εναλλακτική ερμηνεία (Malament).**

(1) Οι προτάσεις που εξετάζουμε στην ΚΜ έχουν αληθοτιμές μόνο υπό ορισμένες συνθήκες *πραγμάτωσης* (οι οποίες ενδέχεται να είναι συνθήκες που αφορούν τη μέτρηση, χωρίς αυτό να είναι αναγκαίο). Γι αυτό και ο όρος 'πρόταση' δεν είναι ο κατάλληλος. Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στη θέση του ο όρος ένδεχομενικότητα'.

(2) Οι σύνδεσμΓια την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του αντιπαραδείγματος. Έστω ο χώρος Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ και οι προτάσεις A_1, A_2, A_3 οι οποίοι αντιστοιχούν βάσει της αποτίμησης-ΚΛ στους υποχώρους $v(A_1)$, $v(A_2)$, $v(A_3)$ που παράγονται από τα διανύσματα,έχει

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Λύση. αντίστοιχα. Παρατηρείστε ότι τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα οι αντίστοιχοι υπόχωροι έχουν το μηδενικό διάνυσμα ως κοινό στοιχείο και δεν είναι ορθογώνια.

1. Θα δείξουμε ότι $(A_1 \wedge (A_2 \vee A_3)) \nvDash_{\mathrm{K\Lambda}} ((A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge A_3))$. Ισχύει ότι,

$$v(A_1 \wedge (A_2 \vee A_3)) = v(A_1) \cap v(A_2 \vee A_3) = v(A_1) \cap \mathcal{H} = v(A_1)$$

$$v((A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge A_3)) = \overline{v(A_1 \wedge A_2) + v(A_1 \wedge A_3)} = 0.$$

Όμως $v(A_1)$ δεν είναι υποσύνολο του μηδενικού υπόχωρου, άρα $(A_1 \wedge (A_2 \vee A_3)) \nvDash_{\mathrm{K\Lambda}} ((A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge A_3))$.

2. Καταρχάς παρατηρείστε ότι για κάθε πρόταση φ, ψ ισχύει το εξής: Αν $\varphi \models_{\mathrm{K\Lambda}} (\psi \wedge \sim \psi)$ τότε $\models_{\mathrm{K\Lambda}} \sim \varphi$. Ωστόσο, ενώ με βάση τους κανόνες (4) και (9) αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\{A_1, (\sim A_1 \vee \sim A_2), A_2\} \nvDash_{\mathrm{K\Lambda}} ((A_1 \wedge A_2) \wedge \sim (A_1 \wedge A_2)),$$

δεν ισχύει ότι

$$\{A_1, (\sim A_1 \vee \sim A_2)\} \nvDash_{\mathrm{K\Lambda}} \sim A_2.$$

Πράγματι,

$$v(\sim A_1 \vee \sim A_2) = \overline{v(A_1)^{\perp} + v(A_2)^{\perp}} = \mathcal{H},$$

άρα

$$v(A_1) \cap v(\sim A_1 \vee \sim A_2) = v(A_1).$$

Αλλά ο $v(A_1)$ δεν είναι υπόχωρος του $v(A_2)^{\perp}$, επειδή $v(A_2)$ δεν είναι ορθογώνιος στο $v(A_1)$. Επομένως,

$$v(A_1) \cap v(\sim A_1 \vee \sim A_2) \nsubseteq v(A_2).$$

(1) οι στην ΚΛ δεν έχουν την ίδα συμασία όπως στην κλασική λογική. Η '$\varphi \wedge \psi$' δηλώνει ότι οι φ και ψ πραγματώνονται μαζί και είναι αληθείς ως προς κάποιες συνθήκες πραγμάτωσης.

(2) Η σημασία της έκφρασης $\Gamma \models_{\text{ΚΛ}} \psi$ της μεταγλώσσας είναι η εξής: κάθε πραγμάτωση όλων ενδεχομενικοτήτων στο Γ αποτελεί πραγμάτωση της ψ, και για κάθε κατάσταση του εξεταζόμενου συστήματος και για κάθε πραγμάτωση του Γ, αν κάθε $\gamma \in \Gamma$ είναι αληθής τότε είναι αληθής και η ψ.