Τι είναι οι Χώροι Hilbert;

Τα Μαθηματικά Εργαλεία της Κβαντικής Μηχανικής

ΧΡΥΣΟΒΑΛΑΝΤΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥ[1]

0.1. **Μιγαδικός γραμμικός διανυσματικός χώρος.** Ένα σύνολο E ονομάζεται **μιγαδικός γραμμικός διανυσματικός χώρος** τότε και μόνο τότε αν ορίζονται σε αυτόν δύο απεικονίσεις " $+$ " : $E \times E \to E$ και " $\cdot$ " : $\mathbb{C} \times E \to E$ τέτοιες ώστε για κάθε $x, y, z \in E$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ να ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

(1) $x + y = y + x$
(2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
(3) Υπάρχει στοιχείο $0 \in E$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in E$, $x + 0 = x$
(4) Για κάθε $x \in E$, υπάρχει στοιχείο $x' \in E$ τέτοιο ώστε, $x + x' = 0$.
(5) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
(6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
(7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
(8) $1x = x$

Παράδειγμα 1. Μιγαδικό διανυσματικό χώρο αποτελεί το σύνολο των μιγαδικών συναρτήσεων $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} :(x, t) \mapsto \psi(x, t)$ με εσωτερική πράξη την πρόσθεση " $+$ "

$$(\psi + \varphi)(x, t) := \psi(x, t) + \phi(x, t)$$

και εξωτερική πράξη τον πολλαπλασιασμό με μιγαδικό αριθμό $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(\lambda\psi)(x, t) := \lambda(\psi(x, t))$$

Γενικότερα, μιγαδικό διανυσματικό χώρο αποτελείτο σύνολο των μιγαδικών συναρτήσεων $\psi : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \to \mathbb{C}$ με τις αντίστοιχες πράξεις.

Παράδειγμα 2. Μιγαδικό διανυσματικό χώρο αποτελεί το σύνολο $\mathbb{C}^N$ των μιγαδικών πινάκων-στήλη $(N \times 1)$ ως προς τις εξής πράξεις:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ \vdots \\ c_N + d_N \end{pmatrix}$$

και

$$\lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda c_1 \\ \vdots \\ \lambda c_N \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

[1]Ευχαριστώ θερμά το Γιάννη Ντάγκα για την επιμέλεια των σημειώσεων

Παράδειγμα 3. Μιγαδικό διανυσματικό χώρο αποτελεί το σύνολο $M(N,\mathbb{C})$ των μιγαδικών πινάκων $(N\times N)$ ως προς τις εξής πράξεις:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & ... & c_{NN} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1N} \\ d_{21} & d_{22} & ... & d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N1} & d_{N2} & ... & d_{NN} \end{pmatrix} :=$$

$$\begin{pmatrix} c_{11}+d_{11} & c_{12}+d_{12} & \cdots & c_{1N}+d_{1N} \\ c_{21}+d_{21} & c_{22}+d_{22} & ... & c_{2N}+d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}+d_{N1} & c_{N2}+d_{N2} & ... & c_{NN}+d_{NN} \end{pmatrix}$$

και

$$\lambda \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & ... & c_{NN} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda c_{11} & \lambda c_{12} & \cdots & \lambda c_{1N} \\ \lambda c_{21} & \lambda c_{22} & ... & \lambda c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda c_{N1} & \lambda c_{N2} & ... & \lambda c_{NN} \end{pmatrix}, \qquad \lambda\in\mathbb{C}.$$

0.2. **Γραμμικός Υπόχωρος διανυσματικού χώρου.** Ένα υποσύνολο G ενός διανυσματικού χώρου E ονομάζεται **γραμμικός υπόχωρος** του E αν και μόνο αν για κάθε $x,y\in G$ ισχύει ότι $x+y\in G$ και $\lambda x\in G$, για $\lambda\in\mathbb{C}$.

Αν G_1, G_2 γραμμικοί υπόχωροι του E τότε το $G_1\cap G_2$ είναι και αυτό γραμμικός υπόχωρος, ενώ το $G_1\cup G_2$ **δεν** αποτελεί εν γένει γραμμικό υπόχωρο. Ο μικρότερος υπόχωρος που περιλαμβάνει και τους δύο υποχώρους G_1, G_2 ονομάζεται **γραμμική θήκη του** $G_1\cup G_2$ και ορίζεται ως το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων των G_1 και G_2,

$$G_1+G_2 := \{z : z=\lambda_1x_1+...+\lambda_nx_n,\ x_1...x_n\in G_1\cup G_2 \ \textit{και}\ \lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N}\}$$

0.3. **Γραμμική Εξάρτηση, Βάση και Διάσταση διανυσματικού χώρου.** Τα στοιχεία $x_1, x_2, ..., x_n$ ενός διανυσματικού χώρου E ονομάζονται **γραμμικώς ανεξάρτητα** αν και μόνο αν για κάθε $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{C}$,

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_nx_n=0 \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=...\lambda_n=0$$

Τα στοιχεία $x_1, x_2, ..., x_n$ ενός διανυσματικού χώρου E ονομάζονται **γραμμικώς εξαρτημένα** αν και μόνο αν δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχει $x_k\in\{x_1,x_2,...,x_n\}$ τέτοιο ώστε,

$$x_k = x_1+x_2+...+x_{k-1}+x_{k+1}...+x_n$$

Απείρου πλήθους στοιχεία x_n, $n \in \mathbb{N}$ του E ονομάζονται **γραμμικώς ανεξάρτητα** αν τα στοιχεία παντός πεπερασμένου υποσυνόλου των x_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, υπό την παραπάνω έννοια.

Ένας διανυσματικός χώρος θα είναι **N διαστάσεων (όπου $N < \infty$)** αν περιέχει ένα υποσύνολο N γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων και δεν περιέχει κανένα υποσύνολο $N+1$ γραμμικώς ανεξαρτήτως διανυσμάτων.

Ένας διανυσματικός χώρος ονομάζεται **απειροδιάστατος** αν περιέχει N γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, για κάθε $N \in \mathbb{N}$.

Ένα πεπερασμένο σύνολο N γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων σε ένα γραμμικό διανυσματικό χώρο E, N διαστάσεων, ονομάζεται **βάση** του χώρου. (Για τον ορισμό της βάσης σε χώρους με άπειρη διάσταση θα χρειαστεί να περιμένουμε λίγο)

0.4. **Ανάπτυγμα σε βάση σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.** Η γραμμική θήκη μιας βάσης $S = \{e_1, e_2, ..., e_N\}$ ενός διανυσματικού χώρου N διαστάσεων E είναι ίση με τον χώρο E. Δηλαδή, για κάθε $x \in E$,

$$x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i,$$

όπου οι μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί $x_i \in \mathbb{C}$ονομάζονται **συντελεστές αναπτύγματος του x ως προς την βάση S.**

0.5. **Ισομορφισμοί διανυσματικών χώρων.** Έστω δύο μιγαδικοί διανυσματικοί χώροι E_1, E_2. Οι χώροι αυτοί θα καλούνται **ισόμορφοι,** αν και μόνο αν υπάρχει μία απεικόνιση $i : E_1 \to E_2$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Για κάθε $x_1, x_2 \in E_1$, αν $i(x_1) = i(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.
(2) $i(E_1) = E_2$
(3) Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ και $x, y \in E$, $i(\lambda x + \mu y) = \lambda i(x) + \mu i(y)$.

Οι (1) και (2) μας λένε ότι η απεικόνιση i είναι **αμφιμονοσήμαντη** και η (3) ότι είναι **γραμμική.**

Όλοι οι διανυσματικοί χώροι N διαστάσεων είναι ισόμορφοι. Επομένως, όποια ιδιότητα αποδείξουμε για έναν εξ αυτών, π.χ. για τον $\mathbb{C}^N$, αυτή θα ισχύει για οποιονδήποτε χώρο N διαστάσεων.

0.6. **Εσωτερικό (Βαθμωτό) Γινόμενο.** Έστω ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος E, ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** (προ-Hilbert) μια απεικόνιση $(\cdot,\cdot) : E \times E \to \mathbb{C}$ που απεικονίζει σε κάθε ζεύγος διανυσμάτων x, y έναν μοναδικό μιγαδικό αριθμό (x, y), η οποία ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες, για $x, y_1, y_2 \in E$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

(1) $(x, (\lambda y_1 + \mu y_2)) = \lambda(x, y_1) + \mu(x, y_2)$
(2) $(x, y)^* = (y, x)$
(3) $(x, x) \geq 0$ και $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Από τις ιδιότητες (1) και (2) συνάγουμε ότι

$$((\lambda x_1 + \mu x_2), y) = \lambda^*(x_1, y) + \mu^*(x_2, y)$$

0.7. **Ο συμβολισμός Dirac.** Έστω E ένας μιγαδικός γραμμικός διανυσματικός χώρος. Ο Dirac συμβόλισε το διάνυμα x του διανυσματικού χώρου, $|x>$,και το ονόμασε **«ket»**, ενώ το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων x, y , $< x|y >$, και το ονόμασε **«bracket»**, ορίζοντας το **«bra»** , $< x|$ ως το **γραμμικό συναρτησοειδές,**

$$< x| := L_{|x>} : E \to \mathbb{C}$$

το οποίο απεικονίζει κάθε διάνυσμα του διανυσματικού χώρου στο εσωτερικό γινόμενο με το $|x>$,

$$|y> \longmapsto < x|y>$$

Μία απεικόνιση $\omega : E \to \mathbb{C}$ ονομάζεται **γραμμικό συναρτησοειδές επί του E,** αν για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ να ισχύει:

$$\omega(\lambda x + \mu y) = \lambda\omega(x) + \mu\omega(y).$$

Το σύνολο των γραμμικών συναρτησοειδών E^* εφοδιασμένο με τις πράξεις: " + " : $E^* \times E^* \to E^*$ και " $\cdot$ " : $\mathbb{C} \times E^* \to E^*$:

$$(\omega + \phi)(x) = \omega(x) + \phi(x)$$

$$(\lambda\omega)(x) = \lambda\omega(x)$$

είναι μιγαδικός γραμμικός διανυσματικός χώρος και ονομάζεται **δυϊκός χώρος του** E.

- Για ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης κάθε στοιχείο του δυϊκού χώρου έχει τη μορφή $< x|$, δηλαδή αντιστοιχεί σε κάποιο διάνυσμα του χώρου.
- Σε απειροδιάστατους διανυσματικούς χώρους με γινόμενο υπάρχουν πολλά στοιχεία του δυϊκού χώρου E^*που δεν έχουν τη μορφή $< x|$. (δείτε το θεώρημα Riesz για την περίπτωση των χώρων Hilbert όπου αυτό δεν ισχύει).

0.8. **Νορμαρισμένοι διανυσματικοί χώροι.** Ένας μιγαδικός γραμμικός διανυσματικός χώρος E ονομάζεται **νορμαρισμένος,** όταν είναι δυνατόν σε κάθε στοιχείο $x \in E$ να αντιστοιχήσουμε έναν πραγματικό αριθμό $\|x\|$ τη **νόρμα** του x ($\|\bullet\| : E \to \mathbb{R}$), έτσι ώστε για κάθε $x, y, \in E$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ να ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(1) $\|x\| \geq 0$ και αν $\|x\| = 0$ τότε $x = 0$.
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο, η επαγόμενη (από το εσωτερικό γινόμενο) νόρμα ενός διανύσματος ορίζεται από τη σχέση,

$$\|x\| = (x,x)^{1/2}$$

0.9. **Ορθογωνιότητα**για κάθε $\varphi \in M$**.** Έστω E ένας μιγαδικός γραμμικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Δύο διανύσματα $x, y \in E$ ονομάζονται **ορθογώνια** αν και μόνο αν $(x,y) = 0$. Ένα υποσύνολο M του E ονομάζεται **ορθογώνιο σύνολο** αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in E$ ισχύει $(x,y) = 0$ ενώ αν επιπλέον για κάθε $x \in E$ ισχύει $\|x\| = 1$ το σύνολο M θα ονομάζεται **ορθοκανονικό.**

Θεώρημα. *Κάθε ορθοκανονικό σύνολο σε ένα διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο είναι ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων.*

Πόρισμα. *Κάθε διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης N έχει μία ορθοκανονική βάση, δηλαδή μία βάση που αποτελείται από N ορθοκανονικά διανύσματα.*

0.10. **Ισχυρή σύγκλιση διανυσμάτων και ακολουθίες Cauchy.** Έστω E ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος με νόρμα. Λέμε ότι μια ακολουθία $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \subseteq E$, **συγκλίνει ισχυρά** σε ένα διάνυσμα $x \in E$, $x_n \to x$, αν και μόνο αν $\underset{n\to\infty}{lim} \|x_n - x\| = 0$.

Για μια ακολουθία $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \subseteq E$, σε ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο E, ορίζουμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Αν $s_n \to \psi$, τότε λέμε ότι **η σειρά** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ **συγκλίνει στο διάνυσμα** ψ και γράφουμε $\psi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$.

Μία ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων ενός νορμαρισμένου χώρου E ονομάζεται **ακολουθία Cauchy** αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, αν $n, m > n_0$ τότε $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

0.11. **Χώροι Hilbert.** Ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο λέγεται **πλήρης** αν και μόνο αν κάθε ακολουθία Cauchy στο χώρο αυτό συγκλίνει ισχυρά σε κάποιο διάνυσμα του χώρου. Ένας πλήρης μιγαδικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται **μιγαδικός χώρος Hilbert.**

Θεώρημα. *Κάθε πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι πλήρης.*

0.12. **Βάση διανυσματικού χώρου άπειρης διάστασης.** Αν S είναι ένα ορθοκανονικό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ και δεν υπάρχει άλλο ορθοκανονικό υποσύνολο του $\mathcal{H}$ που να είναι γνήσιο υπερσύνολο του S, τότε το S αποτελεί μια **ορθοκανονική βάση.**

Θεώρημα. *Κάθε χώρος Hilbert $\mathcal{H}$έχει μια ορθοκανονική βάση.*

Θεώρημα. *Έστω* $S = \{e_j\}_{j\in J}$ *μια ορθοκανονική βάση ενός μιγαδικού χώρου Hilbert* $\mathcal{H}$. *Για κάθε* $x \in \mathcal{H}$ *υπάρχει μοναδική οικογένεια μιγαδικών αριθμών* $\{x_j = (e_j, x)\}_{j\in J}$ *τέτοιων ώστε*

$$\begin{aligned} x =& \sum_{j\in J} (e_j, x) e_k \\ (x, y) =& \sum_{j\in J} (x, e_j)(e_j, y), \quad y \in \mathcal{H} \\ \|x\|^2 = (x, x) = \|x\| =& \sum_{j\in J} |(e_j, x)|^2 \end{aligned}$$

0.13. **Διαχωρίσιμοι χώροι Hilbert.** Ένας χώρος Hilbert $\mathcal{H}$ που επιδέχεται μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση λέγεται **διαχωρίσιμος.**

Θεώρημα. *Όλοι οι απειροδιάστατοι διαχωρίσιμοι χώροι Hilbert είναι ισόμορφοι.*

0.14. **Γραμμικοί τελεστές σε χώρους Hilbert.** Ένας **γραμμικός τελεστής** $\hat{A}$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ απεικονίζει κάθε διάνυσμα $\psi \in \mathcal{H}$ σε κάποιο άλλο διάνυσμα $\hat{A}\psi \in \mathcal{H}$ κατά τρόπον ώστε

$$\hat{A}(\lambda\psi + \mu\phi) = \lambda\hat{A}\psi + \mu\hat{A}\phi$$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ και $\psi, \phi \in \mathcal{H}$.

Το **άθροισμα** και **το γινόμενο** δύο γραμμικών τελεστών και το **γινόμενο επί μιγαδικό αριθμό** ενός τελεστή ορίζονται, αντίστοιχα, από τις εξής σχέσεις:

$$(\hat{A} + \hat{B})\psi = \hat{A}\psi + \hat{B}\psi$$

$$\begin{aligned} (\hat{A}\hat{B})\psi &= \hat{A}(\hat{B}\psi) \\ (\lambda\hat{A})\psi &= \lambda(\hat{A}\psi) \end{aligned}$$

για κάθε $\psi \in \mathcal{H}$.

0.15. **Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα.** Έστω $\hat{A}$ ένας τελεστής πάνω σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Ένα διάνυσμα $0 \neq \psi \in \mathcal{H}$ ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα του** $\hat{A}$ με **ιδιοτιμή** a αν και μόνο αν $\hat{A}\psi = a\psi$, ή σε συμβολισμό Dirac $\hat{A}|a >= a|a >$.

Παρατήρηση. Είναι δυνατό ένας τελεστής να μην έχει ιδιοδιανύσματα. Επίσης είναι δυνατό ένας τελεστής να έχει περισσότερα από ένα γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα με την ίδια ιδιοτιμή. Λέμε ότι μια ιδιοτιμή a_n ενός τελεστή $\hat{A}$ παρουσιάζει **πολλαπλότητα εκφυλισμού** $d(n)$ αν και μόνο αν αντιστοιχούν $d(n)$ το πλήθος ανεξάρτητα διανύσματα $\psi_{n_1}, \psi_{n_2}, ..., \psi_{n_{d(n)}}$ στην a_n. Τα γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα ενός τελεστή $\hat{A}$ που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή a_n παράγουν έναν υπόχωρο του $\mathcal{H}$ με διάσταση ίση με την πολλαπλότητα εκφυλισμού $d(n)$ ο οποίος ονομάζεται **ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη ιδιοτιμή.** Ένας τελεστής ονομάζεται **μη-εκφυλισμένος ή μεγιστικός** αν και μόνο αν κάθε ιδιοτιμή του έχει πολλαπλότητα ίση με τη μονάδα.

0.16. **Στοιχεία πίνακα τελεστή.** Τα **στοιχεία πίνακα** ενός τελεστή $\hat{A}$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ είναι οι αριθμοί $(\psi, \hat{A}\varphi)$ για $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$. Σε συμβολισμό Dirac γράφουμε, $< \psi|\hat{A}|\varphi >$.

Παρατήρηση. Έστω $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια ορθοκανονική βάση ενός n-διάστατου χώρου Hilbert $\mathcal{H}$. Επειδή $\psi = \sum\limits_{j=1}^{n} (e_j, \psi)e_j$ ορίζουμε την απεικόνιση από το $\mathcal{H}$ στο $\mathbb{C}^n$

$$\psi \longmapsto \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e_1, \psi) \\ (e_2, \psi) \\ \vdots \\ (e_n, \psi) \end{pmatrix}$$

που αντιστοιχεί στο διάνυσμα ψ ένα $n \times 1$ διάνυσμα στήλη. Αντίστοιχα, στον τελεστή $\hat{A}$ αντιστοιχεί ο $n \times n$ πίνακας,

$$\hat{A} \longmapsto \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e_1, \hat{A}e_1) & (e_1, \hat{A}e_2) & ... & (e_1, \hat{A}e_n) \\ (e_2, \hat{A}e_1) & (e_2, \hat{A}e_2) & ... & (e_2, \hat{A}e_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (e_n, \hat{A}e_1) & (e_n, \hat{A}e_2) & ... & (e_n, \hat{A}e_n) \end{pmatrix}$$

Ως προς αυτή την αναπαράσταση διανυσμάτων και τελεστών αποδεικνύεται ότι \.

Θεώρημα. *Κάθε πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι πλήρης.*

Παρατήρηση.

$$(\psi, \hat{A}\varphi) = (\psi_1^* \psi_2^* \cdots \psi_n^*) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$$

0.17. **Συζυγείς και Αυτοσυζυγείς (Ερμιτιανοί) τελεστές.** Ο **συζυγής τελεστής** $\hat{A^+}$ ενός τελεστή $\hat{A}$ επί ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ ορίζεται από την ακόλουθη συνθήκη για τα στοιχεία πίνακα:

$$(\psi, \hat{A^+}\varphi) = (\hat{A}\psi, \varphi), \quad \forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}.$$

Σε συμβολισμό Dirac , $< \psi|\hat{A^+}|\varphi > = < \psi|\hat{A}|\varphi >^*$.

Θεώρημα. *Η απεικόνιση $\hat{A} \mapsto \hat{A^+}$ ορίζει μια μονομελή πράξη στο σύνολο των τελεστών επί ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ που συνδυάζεται με τις υπόλοιπες πράξεις ως εξής:*

$$\left(\hat{A} + \hat{B}\right)^+ = \hat{A^+} + \hat{B^+}$$

$$\left(\lambda\hat{A}\right)^{+} = \lambda^{*}\hat{A}^{+}$$
$$\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{+} = \hat{B}\hat{A}^{+}$$
$$\left(\hat{A}^{+}\right)^{+} = \hat{A}$$

Ένας τελεστής $\hat{A}$ επί ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ ονομάζεται **αυτοσυζυγής ή Ερμιτιανός** αν και μόνο αν $\hat{A}^{+} = \hat{A}$.

0.18. **Ανάλυση της ταυτότητας.** Κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\varphi, \chi \in \mathcal{H}$ ορίζει ένα γραμμικό τελεστή πάνω στον $\mathcal{H}$ σύμφωνα με τον κανόνα:

$$\hat{T}_{\varphi,\chi} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} : \psi \mapsto \hat{T}_{\varphi,\chi}(\psi) = \langle \chi, \psi \rangle \, \varphi$$

Από γεωμετρική σκοπιά ο τελεστής στρέφει ένα διάνυσμα ψ στην κατεύθυνση του φ και του αποδίδει μήκος ίσο με εκείνο του φ πολλαπλασιασμένο επί το μέτρο της προβολής του ψ επί του χ.

Σε **συμβολισμό Dirac** ο τελεστής $\hat{T}_{\varphi,\chi}$ ορίζεται ως εξής:

$$\psi \mapsto \hat{T}_{\varphi,\chi}(\psi) = \langle \chi, \psi \rangle \, \varphi : |\psi > \mapsto \hat{T}_{\varphi,\chi}(|\psi >) = |\varphi >< \chi|\psi >$$

Αν $\{|e_1 >, |e_2 >,_1, ..., |e_n >\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$ γράφουμε

$$|\psi > = \sum_{j=1}^{n} |e_j >< e_j|\psi > = \left(\sum_{j=1}^{n} |e_j >< e_j|\right) |\psi >$$

οπότε θα λέμε ότι ο τελεστής $\sum_{j=1}^{n} |e_j >< e_j|$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής $\hat{1}$

$$\sum_{j=1}^{n} |e_j >< e_j| = \hat{1} : |\psi > \mapsto |\psi > = \left(\sum_{j=1}^{n} |e_j >< e_j|\right) |\psi >$$

και η εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{n} |e_j >< e_j| = \hat{1}$$

καλείται **ανάλυση της ταυτότητας**.

0.19. **Κλειστός υπόχωρος.** Ένας γραμμικός υπόχωρος M ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ ονομάζεται τοπολογικά **κλειστός** αν και μόνο αν το όριο κάθε ισχυρώς (ως προς τη νόρμα) συγκλίνουσας ακολουθίας διανυσμάτων του M ανήκει στο M.

Θεώρημα. *Ένας γραμμικός υπόχωρος M ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ είναι κλειστός αν και μόνο αν ο M είναι πλήρης ως διανυσματικός χώρος με εσωτερικός γινόμενο, δηλαδή είναι χώρος Hilbert . Ο M είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert αν ο $\mathcal{H}$ είναι διαχωρίσιμος.*

Θεώρημα. *Κάθε γραμμικός υπόχωρος ενός πεπερασμένης διάστασης χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ είναι κλειστός.*

0.20. **Ορθογωνιότητα-Ευθύ άθροισμα υποχώρων.** Δυο υπόχωροι M_1 και M_2 ενός χώρου Hilbert λέγονται **ορθογώνιοι** αν και μόνο αν κάθε $\psi_1 \in M_1$ είναι ορθογώνιο σε κάθε $\psi_2 \in M_2$.

Το **ορθογώνιο συμπλήρωμα** $M^{\perp}$ ενός γραμμικού υπόχωρου M ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ είναι το σύνολο

$$M^{\perp} = \{\psi \in \mathcal{H} : (\varphi, \psi) = 0 \text{ για κάθε } \varphi \in M\} \text{ για κάθε } \varphi \in M$$

Θεώρημα. *Το ορθογώνιο συμπλήρωμα κάθε γραμμικού υπόχωρου $\mathcal{H}$ αποτελεί ένα κλειστό γραμμικό υπόχωρο του $\mathcal{H}$.*

Ένας διανυσματικός χώρος M είναι το **ευθύ άθροισμα** δυο γραμμικών υποχώρων του M_1 και M_2,

$$M = M_1 \oplus M_2$$

αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα $\psi \in M$ μπορεί να γραφεί μονοσήμαντα στη μορφή,

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

όπου $\psi_1 \in M_1$ και $\psi_2 \in M_2$.

Θεώρημα. *Αν M είναι ένας κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$, τότε $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$.* Δηλαδή, κάθε $\psi \in \mathcal{H}$ μπορεί να αναλυθεί μονοσήμαντα ως άθροισμα,

$$\psi = \psi_M + \psi_{M^{\perp}},$$

δύο διανυσμάτων $\psi_M \in M$ και $\psi_{M^{\perp}} \in M^{\perp}$, αντίστοιχα.

0.21. **Προβολικοί τελεστές 1**για κάθε $\varphi \in M$**.** Η απεικόνιση

$$\hat{P}_M : \mathcal{H} \longrightarrow M : \psi \mapsto \hat{P}_M \psi = \psi_M$$

είναι γραμμική και ορίζει έναν γραμμικό τελεστή στον $\mathcal{H}$. Ο τελεστής $\hat{P}_M$ λέγεται **τελεστής προβολής** πάνω στον υπόχωρο M του $\mathcal{H}$. Ο τελεστής προβολής πάνω στο ορθογώνιο συμπλήρωμα $M^{\perp}$ του M είναι $\hat{P}_{M^{\perp}} = \hat{1} - \hat{P}_M$.

Ο τελεστής $|\varphi >< \varphi|$ για $< \varphi|\varphi >= 1$, είναι ο τελεστής προβολής πάνω στον μοναδιάστατο υπόχωρο που αποτελείται από διανύσματα της μορφής $a|\varphi >$, $a \in \mathbb{C}$.

Θεώρημα. *Αν $\hat{P}_M$* είναι ο τελεστής προβολής πάνω σε ένα κλειστό υπόχωρο $M \neq \{0\}$ *ενός* χώρου *Hilbert $\mathcal{H}$, τότε για κάθε $\psi \in \mathcal{H}$,*

$$\hat{P}_M \psi = \psi \Longleftrightarrow \psi \in M$$

$$\hat{P}_M \psi = 0 \Longleftrightarrow \psi \in M^{\perp}$$

Ο τελεστής προβολής πάνω σε οποιοδήποτε κλειστό υπόχωρο $M \neq \{0\}$ ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$έχει δυο ιδιοτιμές, 1 και 0. Οι πολλαπλότητες εκφυλισμού των ιδιοτιμών αυτών είναι ίσες με τις διαστάσεις των M και $M^{\perp}$, αντίστοιχα.

0.22. **Φραγμένοι τελεστές.** Ένας γραμμικός τελεστής $\hat{A}$ σε έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ καλείται **φραγμένος** αν και μόνο αν υπάρχει θετικός αριθμός $b > 0$ τέτοιος ώστε $\left\|\hat{A}\psi\right\| \leq b\,\|\psi\|$.

Θεώρημα. *Ένας γραμμικός τελεστής είναι φραγμένος αν και μόνο αν είναι συνεχής, δηλαδή, $\hat{A}\psi_n \to \hat{A}\psi$ για κάθε οικογένεια $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\psi_n \to \psi$.*

0.23. **Προβολικοί Τελεστές.**

Θεώρημα. *Ένας φραγμένος τελεστής $\hat{P}$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ είναι τελεστής προβολής αν και μόνο αν $\hat{P}^2 = \hat{P} = \hat{P}^{+}$. Ο κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ πάνω στον οποίο προβάλλει ο $\hat{P}$ είναι ο $\mathcal{H}_p = \left\{\psi \in \mathcal{H} : \hat{P}\psi = \psi\right\}$.*

Δύο τελεστές προβολής $\hat{P}_1$ και $\hat{P}_2$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ λέγονται **ορθογώνιοι** αν και μόνο αν $\hat{P}_1\hat{P}_2 = 0 = \hat{P}_2\hat{P}_1$.

Θεώρημα. *Δυο τελεστές προβολής σε ένα χώρο Hilbert είναι ορθογώνιοι αν και μόνο αν οι υπόχωροι στους οποίους προβάλλουν είναι ορθογώνιοι.*

Η ανάλυση ενός χώρου Hilbert σε ευθύ άθροισμα αμοιβαίων ορθογώνιων κλειστών υποχώρων μπορεί να γενικευθεί ως εξής:

Έστω $\{M_1, M_2, ..., M_n\}$ μια συλλογή κλειστών υποχώρων ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ τέτοια ώστε δύο οποιοιδήποτε, διαφορετικοί μεταξύ τους, υπόχωροι να είναι ορθογώνιοι και για κάθε $\psi \in \mathcal{H}$ να έχουμε

$$\psi = \hat{P}_{M_1}\psi + \hat{P}_{M_2}\psi + ... + \hat{P}_{M_n}\psi$$

Τότε $\mathcal{H} = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} M_j$ και $\hat{P}_{M_j}\hat{P}_{M_k} = \delta_{jk}\hat{P}_{M_j}$. Επομένως, η **ανάλυση της ταυτότητας** μπορεί να λάβει την ακόλουθη μορφή:

$$\hat{P}_{M_1} + \hat{P}_{M_2} + ... + \hat{P}_{M_n} = \hat{1}$$

0.24. **Μοναδιακοί τελεστές.** Ένας γραμμικός τελεστής $\hat{U}$σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ καλείται **μοναδιακός** αν και μόνο αν $\hat{U}^{+}\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^{+} = \hat{1}$.

Θεώρημα. *Κάθε μοναδιακός τελεστής $\hat{U}$σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ είναι αντιστρέψιμος $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^{+}$* και αφήνει αναλλοίωτο το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων, $\left(\hat{U}\varphi, \hat{U}\psi\right) = (\varphi, \psi)$, για κάθε $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ καθώς και τα μήκη διανυσμάτων, $\left\|\hat{U}\psi\right\| = \|\psi\|$, $\psi \in \mathcal{H}$.

0.25. **Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα αυτοσυζυγών και μοναδιακών τελεστών.** Οι ιδιοτιμές ενός **αυτοσυζυγούς τελεστή** είναι πραγματικοί αριθμοί. Τα ιδιοδιανύσματα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.

Οι ιδιοτιμές ενός **μοναδιακού τελεστή** είναι μιγαδικοί αριθμοί μέτρου ίσου με τη μονάδα. Τα ιδιοδιανύσματα ενός μοναδιακού τελεστή που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.

Η κλειστότητα του συνόλου των γραμμικών συνδυασμών (η γραμμική θήκη) των ιδιοδιανυσμάτων ενός αυτοσυζυγή, καθώς και ενός μοναδιακού τελεστή, σε ένα μιγαδικό χώρο Hilbert, $\mathcal{H}$ **πεπερασμένης διάστασης,** είναι ο ίδιος ο χώρος $\mathcal{H}$.

0.26. **Φασματική αναπαράσταση ή ανάλυση αυτοσυζυγούς τελεστή – Φασματικό θεώρημα σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.** Έστω $\hat{A}$ ένας αυτοσυζυγής τελεστής σε ένα N-διάστατο ($N < \infty$) μιγαδικό χώρο Hilbert, $\mathcal{H}$ του οποίου οι ιδιοτιμές $a_1, a_2, ..., a_M$ ($M \leq N$) παρουσιάζουν πολλαπλότητες εκφυλισμού $d(1), d(2), ..., d(M)$, αντίστοιχα. Για κάθε $n \in \{1, 2, .., M\}$ επιλέγουμε μια ορθοκανονική βάση $\{u_{n_1}, u_{n_2}, ..., u_{n_{d(n)}}\}$ του ιδιόχωρου του $\hat{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή a_n. Τότε το σύνολο των u_{n_j} με $n = 1, 2, .., M$ και $j = 1, 2, ..., d(n)$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$. Συγκεκριμένα,

$$\left(u_{m_i}, u_{n_j}\right) = \delta_{mn}\delta_{ij},$$

ενώ **κάθε** $\psi \in \mathcal{H}$ γράφεται

$$\psi = \sum_{n=1}^{M}\sum_{j=1}^{d(n)} \left(u_{n_j}, \psi\right) u_{n_j}.$$

Σε **συμβολισμό Dirac,** το ιδιοδιάνυσμα u_{n_j} γράφεται $|a_n, j>$, οπότε έχουμε

$$< a_m, i|a_n, j >= \delta_{mn}\delta_{ij}$$

και

$$|\psi >= \sum_{n=1}^{M}\sum_{j=1}^{d(n)} |a_n, j >< a_n, j|\psi > .$$

Η **ανάλυση τη ταυτότητας** ως προς τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή $\hat{A}$ λαμβάνει τη μορφή

$$\sum_{n=1}^{M}\sum_{j=1}^{d(n)} |a_n, j >< a_n, j| = \hat{1}$$

και η **φασματική αναπαράσταση ή ανάλυση** του $\hat{A}$ τη μορφή,

$$\hat{A} = \sum_{n=1}^{M}\sum_{j=1}^{d(n)} a_n|a_n, j >< a_n, j|$$

Ο τελεστής προβολής πάνω στον ιδιόχωρο του $\hat{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή a_n είναι

$$\hat{P}_n = \sum_{j=1}^{d(n)} |a_n, j >< a_n, j|$$

και ονομάζεται **φασματικός τελεστή προβολής.** Συνεπώς

$$\hat{A} = \sum_{n=1}^{M} a_n \hat{P}_n.$$

Ως προς την ορθοκανονική βάση που αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματά του, ένας αυτοσυζυγής τελεστής αντιστοιχεί σε ένα διαγώνιο πίνακα – **διαγωνιοποίηση τελεστή.**

0.27. **Φασματική αναπαράσταση ή ανάλυση μοναδιακού τελεστή σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.** Έστω $\hat{U}$ ένας μοναδιακός τελεστής σε ένα N-διάστατο ($N < \infty$) μιγαδικό χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ του οποίου οι ιδιοτιμές $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, ..., e^{i\theta_M}$ ($M \leq N$) παρουσιάζουν πολλαπλότητες εκφυλισμού $d(1), d(2), ..., d(M)$, αντίστοιχα. Για κάθε $n \in \{1, 2, .., M\}$ επιλέγουμε μια ορθοκανονική βάση $\left\{|e^{i\theta_n}, j >\right\}_{j=1}^{d(n)}$ του ιδιόχωρου του $\hat{U}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $e^{i\theta_n}$. Τότε το σύνολο $\left\{|e^{i\theta_n}, j > : n = 1, ..., M \text{ και } j = 1, ..., d(n)\right\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$. Συγκεκριμένα,

$$< e^{i\theta_m}, k|e^{i\theta_n}, j >= \delta_{mn}\delta_{kj}$$

και **κάθε διάνυσμα** $|\psi>$ γράφεται

$$|\psi >= \sum_{n=1}^{M}\sum_{j=1}^{d(n)} |e^{i\theta_n}, j >< e^{i\theta_n}, j|\psi >,$$

με **ανάλυση της ταυτότητας,**

$$\sum_{n=1}^{M}\sum_{j=1}^{d(n)} |e^{i\theta_n}, j >< e^{i\theta_n}, j| = \hat{1}$$

και **φασματική αναπαράσταση του** $\hat{U}$

$$\hat{U} = \sum_{n=1}^{M}\sum_{j=1}^{d(n)} e^{i\theta_n}|e^{i\theta_n}, j >< e^{i\theta_n}, j| = \sum_{n=1}^{M} e^{i\theta_n}\hat{P}_n,$$

όπου ο $\hat{P}_n = \sum_{j=1}^{d(n)} |e^{i\theta_n}, j >< e^{i\theta_n}, j|$ είναι ο φασματικός τελεστής προβολής πάνω στον ιδιόχωρο του $\hat{U}$ με ιδιοτιμή $e^{i\theta_n}$.

Ως προς την ορθοκανονική βάση που αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματά του, ένας μοναδιακός τελεστής αντιστοιχεί σε ένα διαγώνιο πίνακα – **διαγωνιοποίηση τελεστή.**