Παράγωγοι Ασκήσεις

4.1 $f(x) = x^2+1$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2+1-x^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x+0 =$$

$= 2x.$

—.—

4.2 $f(x) = x^3-2x+3$

(με ορσ) • $$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-2(x+h)+3-x^3+2x-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3-\cancel{2x}-2h+\cancel{3}-\cancel{x^3}+\cancel{2x}-\cancel{3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-2h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3x^2+3xh+h^2-2)}{\cancel{h}} = 3x^2-2$$

• Με κανόνες παραγώγισης: $f'(x) = (x^3-2x+3)' = (x^3)'-(2x)'+(3)' = 3x^2-2$

~.~

4.3 $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x}$

1ος τρόπος (με ορσ).

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(x+h)^3+2}{x+h}-\frac{x^3+2}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x(x+h)^3+2x-(x+h)(x^3+2)}{x(x+h)\cdot h} = \lim_{h\to 0}\frac{x(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)+2x-x^4-2x-hx^3-2h}{h\cdot x\cdot(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^4}+3x^3h+3x^2h^2+xh^3+\cancel{2x}-\cancel{x^4}-\cancel{2x}-hx^3-2h}{h\,x(x+h)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2x^3h+3x^2h^2+xh^3-2h}{h\cdot x\cdot(x+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{2x^3+3x^2h+xh^2-2}{x\cdot(x+h)} = \frac{2x^3-2}{x^2}$$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

Με κανόνες παραγώγισης: $f'(x) = \left(\dfrac{x^3+2}{x}\right)' = \dfrac{(x^3+2)'\cdot x-(x^3+2)\cdot(x)'}{x^2} =$

$$= \frac{3x^2\cdot x-x^3-2}{x^2} = \frac{2x^3-2}{x^2}$$

21.57 $\quad f(x) = 4x^2 - \frac{2x}{5x+1} \qquad x \in \mathbb{R} - \{-1/5\}$

$$f'(x) = \left(4x^2 - \frac{2x}{5x+1}\right)' = (4x^2)' - \left(\frac{2x}{5x+1}\right)' = 8x - \frac{(2x)'(5x+1) - 2x(5x+1)'}{(5x+1)^2} =$$

$$= 8x - \frac{10x+2-10x}{(5x+1)^2} = 8x - \frac{2}{(5x+1)^2}$$

21.58 $\quad f(z) = z^2(z^2+4) - \frac{2z}{z^2+1}, \qquad \Pi.o f = \mathbb{R}$

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \left(z^2(z^2+4)\right)' - \left(\frac{2z}{z^2+1}\right)' = (z^2)'(z^2+4) + z^2(z^2+4)' -$$

$$- \frac{(2z)'(z^2+1) - 2z(z^2+1)'}{(z^2+1)^2} = 2z(z^2+4) + z^2 \cdot 2z - \frac{2(z^2+1) - 4z^2}{(z^2+1)^2}$$

$$= 4z^3 + 8z^2 - \frac{-2z^2+2}{(z^2+1)^2} = 4z^3 + 8z^2 + \frac{2\cancel{(z^2+1)}}{(z^2+1)^{\cancel{2}}} = 4z^3 + 8z^2 + \frac{2}{z^2+1}$$

Θεωρία

Τι μας πληροφορεί η παράγωγος?

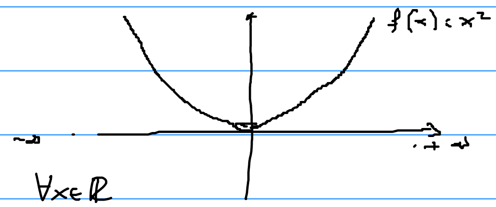
Ορισμοί Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in A$

- Θα λέμε ότι η f έχει ολικό μέγιστο στο $x=\alpha$ ανν $f(\alpha) \geq f(x)$ για κάθε $x \in A$
- Θα λέμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο $x=\alpha$ ανν $f(\alpha) \leq f(x)$ για κάθε $x \in A$
- Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο ονομάζονται ολικά ακρότατα.

Ερώτηση

Έστω $f(x) = x^2$. Να βρείτε το ολικό μέγιστο ή/και το ολικό ελάχιστο εφόσον υπάρχουν

1) για $A = \mathbb{R}$



Έστω ότι για $x=\alpha$, $f(\alpha) = m > 0$

Για να έχει η συνάρτηση στο $x=\alpha$ ολικό μέγιστο, $f(x) = x^2 \leq m$ $\forall x \in \mathbb{R}$

άτοπο διότι για $x > \sqrt{m} \Rightarrow x^2 > m$

Υπάρχει ολικό ελάχιστο;

Ναι, διότι για $x=0 \Rightarrow f(0)=0$ και $f(x) = x^2 \geq 0 = f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2) για $A = (0,2]$

Υπάρχει ολικό μέγιστο;

Ναι, για $x=2$ διότι $f(2)=4$ και

$$0 < x \leq 2 \Rightarrow 0 < x^2 \leq 4$$

Υπάρχει ολικό ελάχιστο;

Όχι, διότι αν η f είχε ολικό ελάχιστο για $x = m \in (0,2]$

τότε $f(m) = m^2 > 0$. $f(x) > m^2$ για κάθε $x \in (0,2]$

όμως $x^2 > m^2$ για κάθε $x \in (0,2]$

ή $x > m$ για κάθε $x \in (0,2]$

Αλλά όποιο κι αν είναι το $m > 0$ θα υπάρχει πάντα κάποιο $x \in (0,2]$ και να είναι μικρότερο του m, π.χ. $x = \frac{m}{2}$