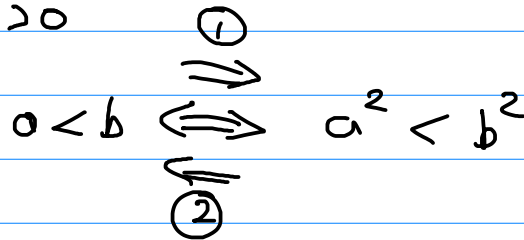


2/11/2021

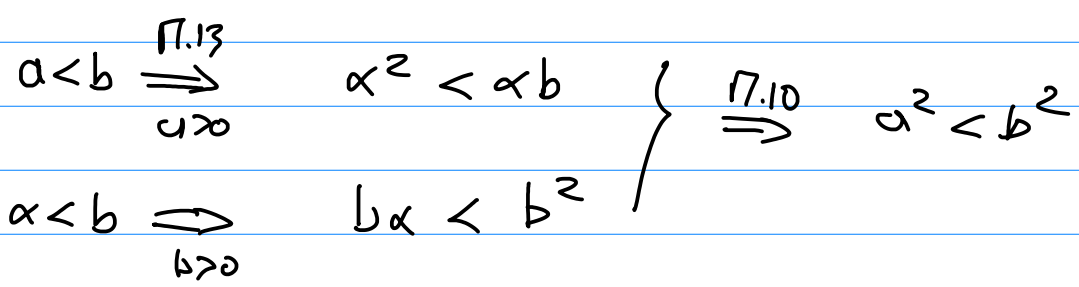
# Ακρίβεις

12.1  $a > 0, b > 0$



①\*

Εστω  $a < b$ , Θ.δ.ό  $a^2 < b^2$



②

Εστω  $a^2 < b^2$ ,  $a, b > 0$  Θ.δ.ό  $a < b$

Με εις άτονον αναγωγή

Εστω ότι  $a^2 < b^2$  και  $\boxed{a \geq b} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = b \\ \vee \\ a > b \end{matrix}$

Αν  $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$  Άτονο! Διότι  $a^2 < b^2$

$a > b \Rightarrow a^2 > b^2$  Άτονο! Διότι  $a^2 < b^2$

\*

Εμπειώς  $a < b$

~ . ~

## Έπιπέυση

$a, b > 0$  και  $n \in \mathbb{N}^*$

$$a > b \iff a^n > b^n$$

12.2  $a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$

$$a < b \Rightarrow a + a < a + b \Rightarrow 2a < a + b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} \quad (1)$$

$$a < b \Rightarrow a + b < 2b \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

12.3 (Απόδειξη Π. 9.12 διαφάνεια 11)

α)  $|a| = |-a|$

Έκ του ορισμ.

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

• Αν  $a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$   
 $\Rightarrow |-a| = -(-a) = a = |a|$

• Αν  $a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow |-a| = -a = |a|$

Επομένως,  $|a| = |-a|$

6UVixya 12.3

b)  $|ab| = |a| |b|$

• $a \geq 0, b \geq 0$	} $a \cdot b \geq 0 \Rightarrow  ab  = ab =  a   b $
• $a < 0, b < 0$	
• $a \geq 0, b < 0$	
• $a < 0, b \geq 0$	

$-a \geq 0$  και  $-b \geq 0$ ,  $|a| \cdot |b| \stackrel{\text{opp}}{=} (-a)(-b) = ab =$   
 $\Downarrow$   
 $\left. \begin{matrix} -a \geq 0 \\ -b \geq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (-a)(-b) \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0 \stackrel{\text{opp}}{=} |ab|$

• Έστω  $a \geq 0, b < 0$  τότε

όπως  $a \geq 0$   
 $b < 0 \Rightarrow -b > 0$

$|a| \cdot |b| = a(-b) = -ab$

$\Rightarrow |a| \cdot |b| = |-ab| = |ab|$

*αφού μας  
 προσημασμού  
 δίνει*

c)  $|a+b| \leq |a| + |b|$

$|a+b| \geq 0$  και  $|a| \geq 0, |b| \geq 0$

Από άμεση  
12.1

$|a+b| \leq |a| + |b| \Leftrightarrow (|a+b|)^2 \leq (|a| + |b|)^2$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|ab|$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|ab|$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \leq |a \cdot a| + |b \cdot b| + 2|ab|$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|ab|$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + 2|ab|$

$\Leftrightarrow 2ab \leq 2|ab|$

$\Leftrightarrow ab \leq |ab|$

16x02

$\delta \leq |\delta|$

αφ  $\delta \geq 0 \Rightarrow |\delta| = \delta$  ισχύει

αφ  $\delta < 0 \Rightarrow |\delta| = -\delta \geq 0$  άρα  $|\delta| = -\delta > \delta$

\* προκύπτει  
 $|ab| = |a| |b|$

$a^2 \geq 0$   
 $b^2 \geq 0$

## Τετραψήφιος δεκαδικός αριθμός

π.χ.

$$\underline{75000}, \underline{453} \overline{\hspace{2cm}}$$

$$7 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{75000}{1} + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{3}{1000} \quad \text{ισοδύναμα κλάσμάτων} \rightarrow \text{ακέραια}$$

Περιοδικός δεκαδικός

$$\frac{1}{9} = 0,1\overline{}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{9} = 3 \cdot 0,1\overline{1} = 0,3\overline{3}$$

$$\frac{1}{7} = 0,142857\overline{}$$

### Διαφορά 19.3

Δεν υπάρχει μικρότερος πρώτος θετικός αριθμός.

Δίνω

$$\alpha \vee \sqrt{\alpha} > 0 \text{ και } r \in \mathbb{Q} \text{ τ.ω.}$$

$$\forall y \in \mathbb{Q}, y > 0 \quad y \geq r$$

τότε υπάρχουν δύο πραγματικοί αριθμοί ο 0 και ο r

0, r ∈ ℝ τ.ω. 0 < r και δεν υπάρχει

$$\text{πρώτος } q \in \mathbb{Q} \quad 0 < q < r$$

άρα αόριστη πυκνότητα των ρητίων στο ℝ.

19.2

$$a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists r \in \mathbb{Q} : |a - r| \leq \varepsilon$$

$$|a - r| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq a - r \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -a - \varepsilon \leq -r \leq -a + \varepsilon \Leftrightarrow a + \varepsilon \geq r \geq a - \varepsilon$$

όπως από τη πυκνότητα των ρητίων στο ℝ ισχύει

$$\text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad x < y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$$

άρα

$$\text{και για } x = a - \varepsilon$$

$$y = a + \varepsilon$$