2/11/2021

Ασκήσεις

12.1 $a>0$, $b>0$

$$a<b \overset{1}{\underset{2}{\Longleftrightarrow}} a^2<b^2$$

1 *

$\Longrightarrow$ Έστω $a<b$, Θ.δ.ό $a^2<b^2$

$$\left.\begin{array}{l} a<b \xRightarrow[a>0]{Π.13} a^2<ab \\ a<b \xRightarrow[b>0]{} ba<b^2 \end{array}\right\} \xRightarrow{Π.10} a^2<b^2$$

2

$\Longleftarrow$ Έστω $a^2<b^2$, $a,b>0$ Θ.δ.ό $a<b$

Με εις άτοπον απαγωγή

Έστω ότι $a^2<b^2$ και $\boxed{a \geq b} \Leftrightarrow$ $a=b$ ή $a>b$

Αν $a=b \Rightarrow a^2=b^2$ Άτοπο! διότι $a^2<b^2$

$a>b \underset{*}{\Rightarrow} a^2>b^2$ Άτοπο! διότι $a^2<b^2$

Επομένως $a<b$

~ . ~

Γενίκευση

$\alpha, b > 0$ και $n \in \mathbb{N}^*$

$$\alpha > b \iff \alpha^n > b^n$$

~ · ~

12.2 $\quad \alpha < b \Rightarrow \alpha < \dfrac{\alpha+b}{2} < b$

$\alpha < b \Rightarrow \alpha + \alpha < \alpha + b \Rightarrow 2a < \alpha + b \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha < \dfrac{\alpha+b}{2}$ ①

$\alpha < b \Rightarrow \alpha + b < 2b \Rightarrow \dfrac{\alpha+b}{2} < b$ ②

Από ① και ② έχουμε

$$\alpha < \frac{\alpha+b}{2} < b$$

~ · ~

12.3 (Απόδειξη Π.φ 72 διαφάνεια 11)

α) $|a| = |-a|$

Έχουμε ορσ.

$$|a| = \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \alpha < 0 \end{cases}$$

• Αν $\alpha \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$

$\Rightarrow |-a| = -(-a) = a =$

$= |a|$

• Αν $\alpha < 0 \Rightarrow -\alpha > 0 \Rightarrow |-a| = -a = |a|$

Επομένως, $\quad |a| = |-a|$

συνέχεια 12.3

b) $|ab| = |a|\,|b|$

- $\alpha \geq 0$, $b \geq 0$
- $\alpha < 0$, $b < 0$
- $\alpha \geq 0$, $b < 0$
- $\alpha < 0$, $b \geq 0$

$a \cdot b \geq 0 \Rightarrow |ab| = \alpha b = |a|\,|b|$

$-a \geq 0$ και $-b \geq 0$, $|a| \cdot |b| \overset{\text{ορσ}}{=} (-a)(-b) = ab \overset{\pi\varsigma.}{=} |ab|$

$\Downarrow$

$\left.\begin{matrix} -\alpha \geq 0 \\ -b \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-a)(-b) \geq 0 \Rightarrow \underline{\alpha b \geq 0}$

· Έστω $\alpha \geq 0$, $b < 0$ τότε

$|a| \cdot |b| = a(-b) = -ab$

όμως

$\left.\begin{matrix} \alpha \geq 0 \\ b < 0 \Rightarrow -b \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a(-b) = -ab \geq 0$

$\Rightarrow |a| \cdot |b| = |-ab| = |ab|$

λόγω της προηγούμενης απόδειξης

— · —

c) $|a+b| \leq |a| + |b|$

$|a+b| \geq 0$ και $|a| \geq 0$, $|b| \geq 0$

Από άσκηση 12.1 : $|a+b| \leq |a| + |b| \iff (|a+b|)^2 \leq (|a| + |b|)^2$.

$\iff (|a+b|)^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|ab|$.

$\iff (a+b)^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|ab|$

$\iff a^2 + b^2 + 2ab \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|ab|$

$\iff a^2 + b^2 + 2ab \leq |a \cdot a| + |b \cdot b| + 2|ab|$

$\iff a^2 + b^2 + 2ab \leq |a^2| + |b^2| + 2|ab|$

$\iff \alpha^2 + b^2 + 2ab \leq \alpha^2 + b^2 + 2|ab|$

$\iff 2\alpha b \leq 2|ab|$

$\iff \alpha b \leq |ab|$ ισχύει

* προκύπτει $|\alpha b| = |\alpha|\,|b|$

$a^2 \geq 0$

$b^2 \geq 0$

$\gamma \leq |\gamma|$

αν $\gamma \geq 0 \Rightarrow |\gamma| = \gamma$ ισχύει

αν $\gamma < 0 \Rightarrow |\gamma| = -\gamma \geq 0$ άρα $|\gamma| = -\gamma > \gamma$

Τερματιζόμενος δεκαδικός αριθμός

π.χ.

$$\underbrace{75000},\underbrace{453}$$

$$7\cdot10^4+5\cdot10^3+0\cdot10^2+0\cdot10^1+0\cdot10^0+4\cdot10^{-1}+5\cdot10^{-2}+3\cdot10^{-3}$$

$$\frac{75000}{1}+\frac{4}{10}+\frac{5}{100}+\frac{3}{1000}$$ άθροισμα κλασμάτων → ρητός

Περιοδικός δεκαδικός $\frac{1}{9}=0,\overline{1}$

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{9}=3\cdot0,\overline{1}=0,\overline{3}$$

$$\frac{1}{7}=0,\overline{142857}$$

Διαφάνεια 19.3

Δεν υπάρχει μικρότερος ρητός θετικός αριθμός;
διότι
αν $r>0$ και $r\in\mathbb{Q}$ τ.ω. (ισχυε όπου για)

$$\forall y \in \mathbb{Q},\ y>0 \quad y \geq r$$

τότε υπάρχουν δύο πραγματικοί αριθμοί ο 0 και ο r
$0, r \in \mathbb{R}$ τ.ω. $0<r$ και δεν υπάρχει
ρητός $q\in\mathbb{Q}$ $0<q<r$
άτοπο λόγω της πυκνότητας των ρητών στο $\mathbb{R}$.

19.2 $a\in\mathbb{R}, \varepsilon>0, \exists r\in\mathbb{Q}: |a-r|\leq\varepsilon$

$$|a-r|\leq\varepsilon \iff -\varepsilon\leq a-r\leq\varepsilon$$

$$\therefore -a-\varepsilon\leq -r\leq -a+\varepsilon \iff a+\varepsilon\geq r\geq a-\varepsilon$$

όμως από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$ ισχύει

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ $x<y \Rightarrow \exists q\in\mathbb{Q}: x<q<y$

άρα και για $x=a-\varepsilon$
$y=\varepsilon+a$