21/10/ Ασκήσεις στη Θεωρία Αριθμών

1) $a \in \mathbb{N}^*$ $\quad (a^2+2a-1) : (a+3)$ $\quad \pi = a-1$

$\upsilon = ?$

$x = \pi y + \upsilon$

x: Διαιρετέος

y: διαιρέτης

π: πηλίκο

υ: υπόλοιπο

$0 \leq \upsilon < y$

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο της διαίρεσης

$(a^2+2a-1) = \pi(a+3) + \upsilon$

όμως $\pi = a-1$

επομένως,

$a^2+2a-1 = (a-1)(a+3) + \upsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+2a-1 = a^2+3a-a-3+\upsilon$

$\Rightarrow a^2+2a-1-(a^2+2a-3) = \upsilon$

$\Rightarrow -1+3 = 2 = \upsilon$

$\Rightarrow \boxed{\upsilon = 2}$

Ελέγχουμε ότι το υπόλοιπο είναι μικρότερο από το διαιρέτη

$\upsilon < a+3 \Rightarrow 2-3 < a \Rightarrow \underline{a > -1}$ Πράγματι αυτό ισχύει.

~ · ~

2. Ν.δ.ό. ανάμεσα σε τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς ένας ακριβώς από αυτούς δίνει υπόλοιπο 1 διαιρούμενος με το 3.

Έστω τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί

$\nu \quad , \quad \nu+1 \quad , \quad (\nu+1)+1$ ή $\nu+2$

$\nu : 3 \quad \begin{cases} \upsilon = 0 \\ \upsilon = 1 \\ \upsilon = 2 \end{cases} \qquad \upsilon < 3$

1η περίπτωση Αν $\nu = 3\pi + 0 \Rightarrow \boxed{\nu = 3\pi}$

$\nearrow \nu+1 = 3\pi + \underline{1}$ ✓

$\searrow \nu+2 = 3\pi+2$.

• $2^{η}$ περίπτωση Αν $\boxed{ν = 3π+1}$ ✓ $\Rightarrow$ $ν+1 = 3π+2$

$ν+2 = 3π+3 \Rightarrow ν+3 = 3(π+1)$

• $3^{η}$ περίπτωση Αν $\boxed{ν = 3π+2} \Rightarrow$ $ν+1 = 3π+2+1 \Rightarrow ν+1 = 3(π+1)$

$ν+2 = 3π+\underbrace{2+2} \Rightarrow ν+2 = 3(π+1)+1$ ✓

∎

— · —

3. Το άθροισμα οποιουδήποτε πλήθους άρτιων αριθμών είναι άρτιος αριθμός.

Έστω $λ$ άρτιοι αριθμοί $ν_1, \dots, ν_λ$

τότε $ν_1 = 2μ_1$ για κάποιο $μ_1 \in \mathbb{N}^*$

$ν_2 = 2μ_2$ για κάποιο $μ_2 \in \mathbb{N}^*$

$\vdots$

$ν_λ = 2μ_λ$ για κάποιο $μ_λ \in \mathbb{N}^*$

Τότε,

$$ν_1 + ν_2 + \dots + ν_λ = 2μ_1 + 2μ_2 + \dots + 2μ_λ = 2(μ_1 + μ_2 + \dots + μ_λ)$$

Επομένως

ο αριθμός $ν_1 + \dots + ν_λ$ είναι πολλαπλάσιο του 2, άρα άρτιος, για κάθε $λ \in \mathbb{N}^*$

~ · ~

4) Έστω $α, β, γ \in \mathbb{N}^*$ ν.δ.ό. $(α+β)(β+γ)(γ+α)$ είναι άρτιος.

Λύση

Επειδή αν οι $α+β$, $β+γ$, $γ+α$ ήταν όλοι περιττοί τότε το γινόμενο τους θα ήταν περιττό.

Επομένως, κάποιος από αυτούς είναι άρτιος

Χωρίς βλάβη της γενικότητας,

έστω ότι $γ+α = 2μ$ (άρτιος)

$2κ+1$	$(2κ+1)(2λ+1)(2μ+1)$
$2λ+1$	$2(\dots)+1$
$2μ+1$	

ΑΥΤΗ Η ΛΥΣΗ ΕΙΝΑΙ 100%

ΔΙΟΤΙ ΚΑΝΕΙ ΛΗΨΗ ΤΟΥ ΖΗΤΟΥΜΕΝΟΥ

Συνεπώς

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)\cdot 2\mu = 2\underbrace{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)\cdot\mu} = \text{άρτιος.}$$

ΟΡΘΗ ΛΥΣΗ

Έστω ότι $(\alpha+\beta)$, $(\beta+\gamma)$, $(\gamma+\alpha)$ είναι όλοι περιττοί.

τότε,

$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha) =$ περιττός, Διότι,

$$\begin{array}{l} 2\nu+1 \\ 2\mu+1 \quad + \\ 2\lambda+1 \\ \hline \underbrace{2\mu+2\nu+2\lambda+2}+1 \\ \underbrace{2(\mu+\nu+\lambda+1)+1}_{\text{περιττός}} \end{array}$$

Όμως $\alpha+\beta+\beta+\gamma+\gamma+\alpha = 2\alpha+2\beta+2\gamma = \underbrace{2(\alpha+\beta+\gamma)}_{\text{άρτιος}}$.

Συνεπώς, δεν είναι δυνατόν οι $(\alpha+\beta)$, $(\beta+\gamma)$, $(\gamma+\alpha)$ να είναι όλοι περιττοί.

Θα υπάρχει του λάχιστον ένας οποίος θα είναι άρτιος.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $\gamma+\alpha =$ άρτιος

δηλαδή $\gamma+\alpha = 2\mu$

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)\cdot 2\mu = 2(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)\cdot\mu.$$

άρα πράγματι το γινόμενο είναι άρτιο.

5) Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{N}^*$ $(2\alpha+1, 9\alpha+4) = 1$

Έστω γ κοινός διαιρέτης των $2\alpha+1$, $9\alpha+4$

τότε

$$\begin{cases} \gamma \mid 2\alpha+1 \\ \gamma \mid 9\alpha+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma \mid 4(2\alpha+1) \\ \gamma \mid 9\alpha+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma \mid 8\alpha+4 \\ \gamma \mid 9\alpha+4 \end{cases} \Rightarrow \gamma \mid (9\alpha+4)-(8\alpha+4)$$

$\Rightarrow \gamma \mid \alpha \Rightarrow \gamma = 1$ (ο μοναδικός κοινός διαιρέτης όλων των φυσικών αριθμών).

~ • ~

6 —

7. Να βρεθούν οι πρώτοι αριθμοί της μορφής k^3+1, $k \neq 0$

Αν p πρώτος και $p = k^3+1 = (k+1)(k^2-k+1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (k+1) \mid p \\ (k^2-k+1) \mid p \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k+1>1 \text{ άρα } k+1=p \\ k^2-k+1=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} k+1=p \\ k(1-k)=0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} k+1=p \\ \left.\begin{matrix} k=0 \text{ ή } 1-k=0 \\ k \neq 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow k=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1+1=2=p \qquad \boxed{k=1} \quad \boxed{p=2}$$

Αν $p = k^3+1$, $k \neq 0$ και p πρώτος, τότε $\Rightarrow$ $p=2$, $k=1$

$1^3+1=2$

Αντίστροφα $\Leftarrow$

Αν $p=2$ και $k=1$ και $p=k^3+1$ τότε ο p είναι πρώτος

Προφανώς

Συνεπώς $p=k^3+1$, $k \neq 0$, p πρώτος $\Leftrightarrow$ αν, και μόνο αν $p=2$