Τι είδους ακολουθία είναι η $a_\nu: \begin{cases} a_{\nu+1} = a_\nu + 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ (1)

Βρείτε τον τύπο που δίνει το a_ν συναρτήσει του ν.

<u>Λύση</u>

Παρατηρώ ότι η διαφορά των διαδοχικών όρων $a_{\nu+1}$ και a_ν παραμένει σταθερή:

$$a_{\nu+1} - a_\nu = 2$$

Άρα η ακολουθία είναι <u>αριθμητική πρόοδος</u> με <u>διαφορά</u> $\omega = 2$

Η γενική μορφή μιας αρ. προόδου είναι:

$$a_\nu = a_1 + (\nu-1)\omega$$

Για $a_1 = 1$ και $\omega = 2$ έχω:

$$a_\nu = 1 + (\nu-1)\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\boxed{a_\nu = 2\nu - 1}$$

Τι είδους ακολουθία είναι η $a_\nu: \begin{cases} a_{\nu+1} = 2a_\nu \\ a_1 = 1 \end{cases}$

Βρείτε τον τύπο που δίνει το a_ν συναρτήσει του ν.

<u>Λύση</u>

Παρατηρώ ότι ο λόγος των διαδοχικών όρων $a_{\nu+1}$ και a_ν παραμένει σταθερός

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 2$$

Άρα, <u>γεωμετρική πρόοδος</u> με $\overline{\text{λόγο}}$ $\lambda = 2$

Η γενική μορφή: $a_\nu = a_1 \lambda^{\nu-1}$

Για $a_1 = 1$ και $\lambda = 2$ έχω:

$$\boxed{a_\nu = 2^{\nu-1}}$$

Ο ν-οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $a_\nu = 3\nu + 2$

α) Να βρείτε τον επόμενο όρο $a_{\nu+1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος

γ) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 62

Λύση

α) Θέτω όπου $\nu \equiv \nu+1$:

$$a_{\nu+1} = 3(\nu+1)+2 = 3\nu+3+2 = 3\nu+5$$

$$\boxed{a_{\nu+1} = 3\nu+5}$$

β) Αρκεί να δείξω ότι η διαφορά δύο οποιονδήποτε διαδοχικών όρων είναι σταθερή:

$$a_{\nu+1} - a_\nu = 3\nu+5-(3\nu+2) = 3$$

Άρα Α.Π. με $\omega = 3$

γ) $a_\nu = 62 \Leftrightarrow 3\nu+2 = 62 \Leftrightarrow 3\nu = 60 \Leftrightarrow \boxed{\nu = 20}$ $\quad a_{20} = 62$

Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $a_\nu = 3 \cdot 2^\nu$

α) Να βρεθεί ο όρος $a_{\nu+1}$

β) Να δειχθεί ότι είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρεθεί ο λόγος λ και ο a_1.

γ) Ποιος όρος της είναι ίσος με 3072;

Λύση

α) $a_{\nu+1} = 3 \cdot 2^{\nu+1} = 3 \cdot 2^\nu \cdot 2 = 6 \cdot 2^\nu \qquad \boxed{a_{\nu+1} = 6 \cdot 2^\nu}$

β) $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{6 \cdot 2^\nu}{3 \cdot 2^\nu} = 2$ Άρα Γ.Π. με λόγο $\boxed{\lambda = 2}$

Η γενική μορφή της Γ.Π.: $a_\nu = a_1 \lambda^{\nu-1}$

$\Rightarrow a_1 = \frac{a_\nu}{\lambda^{\nu-1}}$

Για $a_\nu = 3 \cdot 2^\nu$ και $\lambda = 2 \Rightarrow$

$a_1 = \frac{3 \cdot 2^\nu}{2^{\nu-1}} = \frac{3 \cdot 2^\nu}{2^{-1} \cdot 2^\nu} = 3 \cdot 2 = 6$ $\boxed{a_1 = 6}$

γ) $a_\nu = 3 \cdot 2^\nu$

Για $a_\nu = 3072 \Rightarrow 3072 = 3 \cdot 2^\nu \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^\nu = 1024$

$\Rightarrow \log_2(2^\nu) = \log_2(1024)$

$\Rightarrow \boxed{\nu = 10}$

$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b}$

Να βρείτε την Α.Π. αν $a_3=11$ και $a_6=23$. Πόσοι όροι της δεν υπερβαίνουν το 40;

Λύση

- Ο γενικός τύπος της Α.Π. είναι:

$$a_\nu = a_1 + (\nu-1)\omega$$

Για $a_3=11 \Rightarrow a_1+(3-1)\omega=11 \Rightarrow \boxed{a_1+2\omega=11 \quad (1)}$

Για $a_6=23 \Rightarrow a_1+(6-1)\omega=23 \Rightarrow \boxed{a_1+5\omega=23 \quad (2)}$

Από (1) και (2): $\begin{array}{l} a_1=11-2\omega \\ a_1+5\omega=23 \end{array} \Big| \rightarrow 11-2\omega+5\omega=23 \Big| \rightarrow 3\omega=12 \Big| \rightarrow \omega=4$

Γυρνώντας στην (1): $a_1+2\cdot 4=11 \Rightarrow a_1=3$

Άρα, $a_\nu=3+(\nu-1)\cdot 4 \Rightarrow \boxed{a_\nu=4\nu-1}$

- Για να βρω πόσοι όροι δεν υπερβαίνουν το 40, λύνω την ανίσωση:

$$a_\nu \le 40 \Leftrightarrow$$

$$4\nu-1 \le 40 \Leftrightarrow$$

$$4\nu \le 41 \Leftrightarrow$$

$$\nu \le 10.25$$

Άρα οι 10 πρώτοι όροι δεν υπερβαίνουν το 40.

Αν σε μια Γ.Π. είναι $a_3=12$ και $a_8=384$, να βρεθεί το λ.

Λύση

Γενικός τύπος Γ.Π.: $a_\nu = a_1 \lambda^{\nu-1}$

α' τρόπος: Αντικαθιστώ τα a_3 και a_8 στον γενικό τύπο και λύνω το σύστημα που προκύπτει

β' τρόπος: Εκμεταλλεύομαι τη μορφή γινομένου και διαιρώ a_3 και a_8:

$$\frac{a_3}{a_8} = \frac{12}{384} \Rightarrow \frac{a_1 \lambda^{3-1}}{a_1 \lambda^{8-1}} = \frac{1}{32} \Rightarrow \frac{\lambda^2}{\lambda^7} = \frac{1}{32}$$

$$\Rightarrow \lambda^5 = 32 \quad \cancel{\Rightarrow \log \lambda^5 = \log 32}$$

$$\cancel{\Rightarrow 5 \log \lambda = \log 32 \Rightarrow \log \lambda = \frac{\log 32}{5}} \quad \text{~~(κομπιουτεράκι)~~}$$

$$\cancel{\Rightarrow \lambda = 2} \qquad \lambda = \sqrt[5]{32} = 2$$

Σ' έναν ουρανοξύστη 17 ορόφων, τα γραφεία του ίδιου ορόφου έχουν το ίδιο ενοίκιο. Κάθε γραφείο του πρώτου ορόφου ενοικιάζεται 300 € το μήνα. Κάθε γραφείο ενός ορόφου ενοικιάζεται 20 € το μήνα ακριβότερα από ένα γραφείο του προηγούμενου.

α) Ποιο το ενοίκιο ενός γραφείου του 5ου;

β) Πόσο ακριβότερο είναι ένα γραφείο του 15ου από ένα του 7ου;

γ) Σε ποιους ορόφους το ενοίκιο ξεπερνά τα 450 € το μήνα;

δ) Αν το πλήθος των γραφείων ~~του αμέσως προηγούμενου ορόφου~~ ενός ορόφου είναι μικρότερο κατά 2 από το πλήθος των γραφείων του αμέσως προηγούμενου ορόφου και ο 17ος έχει 12 γραφεία, πόσα γραφεία έχει ο 1ος;

Λύση

α) Είναι Α.Π. εφόσον η διαφορά μεταξύ των ενοικίων δύο διαδοχικών ορόφων παραμένει σταθερή και ίση με 20€:

άρα $a_\nu = a_1 + (\nu - 1)\omega$ με $\omega = 20$ και $a_1 = 300$

Άρα $a_\nu = 300 + 20\nu - 20 \Rightarrow \boxed{a_\nu = 280 + 20\nu}$

Άρα για $\nu = 5$: $a_5 = 280 + 20 \cdot 5 \Rightarrow \boxed{a_5 = 380}$

β) $a_{15} - a_7 = 280 + 20 \cdot 15 - 280 - 20 \cdot 7 = 20(15 - 7) = 160$

γ) $a_\nu > 450 \Rightarrow 280 + 20\nu > 450 \Rightarrow 20\nu > 170$

$\Rightarrow \nu > 8.5$

Άρα, στους ορόφους 9 έως 17

δ) Το πλήθος των γραφείων είναι Α.Π. με $\omega = -2$ και $N_{17} = 12$

Άρα: $N_\nu = N_1 + (\nu - 1)\omega$

$\Rightarrow N_{17} = N_1 + (17 - 1)(-2) \Rightarrow$

$12 = N_1 - 32 \Rightarrow \boxed{N_1 = 44}$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x+2$

i) Να κάνετε τη γραφική παράσταση

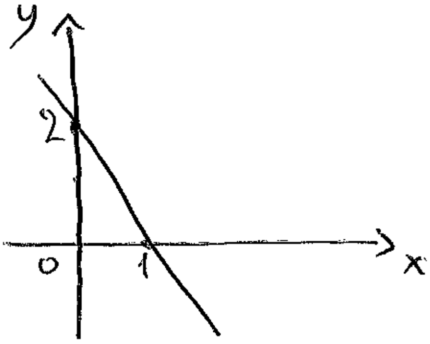
ii) Να λύσετε την ανίσωση $-2x+2<0$

Λύση

i) • Ευθεία (χρειαζόμαι δύο σημεία)

• Για $x=0 \Rightarrow f(0)=2$ Άρα $(0,2)$

• Για $f(x)=0 \Rightarrow -2x+2=0 \Rightarrow x=1$ Άρα $(1,0)$



ii) $-2x+2<0 \Rightarrow 2x>2 \Rightarrow x>1$ (φαίνεται και γραφικά)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-3}$

1) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

2) Να βρεθεί το $f(1)$

3) Να λυθεί η εξ. $f(x)=1$

4) Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η γραφ. παρ. της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

5) Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x+1)$

6) Να γίνει η γραφ. παρ. της $f(x)$

Λύση

1) Πρέπει $x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$ άρα $x \in \mathbb{R}-\{3\}$ ή

$x \in (-\infty,3) \cup (3,+\infty)$

2) $f(1) = \dfrac{1-4+3}{1-3} = 0$

3) $f(x)=1 \Rightarrow \dfrac{x^2-4x+3}{x-3} = 1 \Rightarrow x^2-4x+3 = x-3$

$\Rightarrow x^2-5x+6=0$

$\Delta = 25-4\cdot 6 = 1$

Άρα $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$ ⟨ 3, 2

$x=3$ απορρίπτεται

$x=2$

4) Τομή με τον $x'x$: $f(x)=0$

$\Rightarrow x^2-4x+3=0$

$\Delta = 16$

$x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$ ⟨ 3, 1

$x=3$ απορρίπτεται

$x=1$ Άρα $(1,0)$

Τομή με τον $y'y$: $x=0$

$f(0)=3$ Άρα $(0,3)$

5) Όπου x, βάζω $x+1$:

$$f(x+1) = \frac{(x+1)^2 - 4(x+1) + 3}{(x+1) - 3} = \frac{x^2+2x+1-4x-4+3}{x-2} =$$

$$= \frac{x^2-2x}{x-2} = \frac{x(x-2)}{x-2} = x \qquad x \neq 2$$

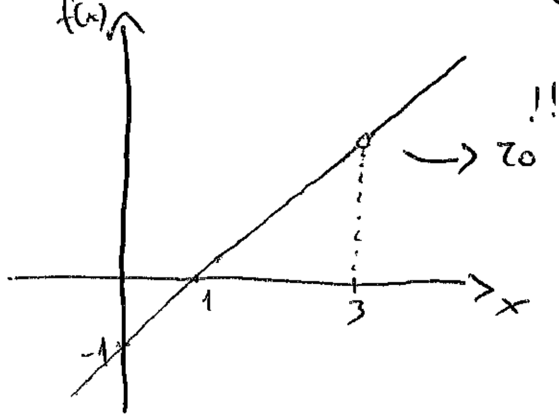
Άρα $f(x+1) = x$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

6) Από το ερώτημα 4, οι ρίζες της x^2-4x+3 είναι το 1 και το 3.

Άρα $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$

Άρα $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{x-3} = x-1$, $x \neq 3$

Άρα ευθεία. Έχουμε και τα δύο σημεία από ερ. 4 άρα;



Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

2) Να βρείτε την τιμή $f(-3)$

Λύση

1) Για να ορίζεται η ρίζα, πρέπει $x^2-4 \geq 0 \Rightarrow$

$x^2 \geq 4 \Rightarrow x \leq -2$ και $x \geq 2$.

Άρα $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

2) $f(-3)=\sqrt{(-3)^2-4} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

Δίνεται η f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-2x-11}{x^3-x^2-x+1}$

1) Να βρεθεί το Π.Ο. της

2) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και g όπου $g(x)=-1$

Λύση

1) πρέπει $x^3-x^2-x+1 \neq 0 \Rightarrow x^3-x-x^2+1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x^2-1)-(x^2-1) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2-1)(x-1) \neq 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+1) \neq 0$

Άρα $x \neq 1$ και $x \neq -1$

Άρα το Π.Ο.: $x \in R-\{-1,1\}$

ή $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$

2) $f(x) = g(x) \Rightarrow$

$$\frac{x^2-2x-11}{x^3-x^2-x+1} = -1 \Rightarrow x^2-2x-11 = -x^3+x^2+x-1$$

$$\Rightarrow x^3+x-10=0$$

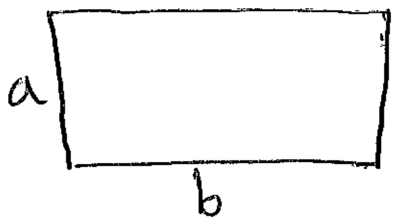
$\Rightarrow x=2$ (Δεν έχουμε κάνει και δεν θα κάνουμε το πώς λύνονται οι τριτοβάθμιες, σημασία έχει όταν θέλω να βρω κοινά σημεία συναρτήσεων θέτω $f(x)=g(x)$)

Με ένα σύρμα μήκους 80cm φτιάχνουμε ορθογώνιο.

1) Έχουν τα διάφορα ορθογώνια που μπορούμε να φτιάξουμε το ίδιο εμβαδόν;

2) Δώστε τη συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου συναρτήσει μιας πλευράς και κάντε τη γραφ. παρ.. Ποιο ορθογώνιο έχει το μέγιστο εμβαδόν

Λύση



$a>0, b>0$

Έστω a, b τα μήκη των δύο πλευρών του ορθογωνίου. Η περίμετρος S είναι: $S=2a+2b$

Αφού μήκος $=80$, τότε $2a+2b=80 \Rightarrow \boxed{a+b=40}$ (1)

Το εμβαδόν E είναι: $\boxed{E=a\cdot b}$ (2)

Θέτω στη (2), $b=40-a$ (1):

$$E = a\cdot(40-a) = 40a-a^2$$

$\boxed{E=40a-a^2}$, με $E>0 \Rightarrow 40a-a^2>0 \Rightarrow a<40$

Άρα $0<a<40$ (Τη συνέχεια θα τη δούμε σε επόμενα μαθήματα)