

ΣΥΝΟΛΑ

# Τι είναι σύνολο;

- Με τον όρο σύνολο εννοούμε μια καλώς ορισμένη συλλογή από διακεκριμένα αντικείμενα, τα οποία καλούνται στοιχεία ή μέλη του συνόλου.
- Παραδείγματα συνόλων στην καθημερινότητά μας:
  - το σύνολο των πρωτοετών φοιτητών του ΙΦΕ
  - το σύνολο των κατοίκων του δήμου Αθήνας
  - Το σύνολο των γραμμάτων της ελληνικής αλφαβήτου
  - Το σύνολο των λέξεων στην παρούσα διαφάνεια
- Παραδείγματα συνόλων στα μαθηματικά
  - το σύνολο  $Z$  των ακέραιων αριθμών  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ,
  - το σύνολο  $Q$  των ρητών αριθμών,
  - το σύνολο  $R$  των πραγματικών αριθμών,
  - το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών  $x$  οι οποίοι ικανοποιούν  $0 \leq x \leq 1$
  - Το σύνολο των λύσεων μιας εξίσωσης
  - Το κενό σύνολο π.χ. οι λύσεις της εξίσωσης  $x^2 + 1 = 0$  στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ή  $x \in R$  ( $x$  ανήκει στο  $R$ )

- Όταν λέμε ότι είναι **καλώς ορισμένη συλλογή**, εννοούμε ότι θα πρέπει να γνωρίζουμε με ακρίβεια αν ένα αντικείμενο ανήκει στο σύνολο ή όχι.
- Τα στοιχεία ενός συνόλου πρέπει να είναι **διακεκριμένα αντικείμενα**.
  - π.χ. ποιο είναι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης "Ελλάδα";
    - το σύνολο περιέχει 4 διακεκριμένα γράμματα
      - α, λ, δ, Ε. (Το λ και το α τα θεωρούμε μια φορά)
    - Ποιο είναι το σύνολο που αποτελείται από τα πρώτα γράμματα όλων των ημερών της εβδομάδας;
      - Κ, Δ, Τ, Π, Σ (Τα γράμματα Τ και Π τ θεωρούμε μια φορά)
  - Μη παραδείγματα συνόλων
    - Οι ψηλοί φοιτητές του ΙΦΕ
    - Οι ζεστές μέρες του Σεπτεμβρίου

# Τρόποι αναπαράστασης συνόλων (1/2)

- Α) με αναγραφή των στοιχείων τους

- Παραδείγματα

- το σύνολο των περιττών θετικών ακέραιων αριθμών που είναι μικρότεροι του 8

$$\text{Απ. } A = \{1, 3, 5, 7\}$$

- Το σύνολο των κλασμάτων της μορφής  $1/n$  όπου  $n$  να ανήκει στους θετικούς ακέραιους αριθμούς διαφορετικούς του μηδενός

$$\text{Απ. } A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$$

- το σύνολο των γραμμάτων της λέξης «βιβλίο»

$$\text{Απ. } A = \{\beta, \iota, \lambda, \omicron\}$$

Η απάντηση  $B = \{\beta, \iota, \beta, \lambda, \iota, \omicron\}$  δεν είναι σωστή γιατί το  $B$  δεν είναι σύνολο (τα στοιχεία του δεν είναι διακεκριμένα)

*Σημ. η αναγραφή των στοιχείων ενός συνόλου μπορεί να γίνει με όποια σειρά θέλουμε.*

- Β) Με περιγραφή μιας χαρακτηριστικής ιδιότητας των στοιχείων τους

- Παραδείγματα

Το σύνολο των αρνητικών πραγματικών αριθμών

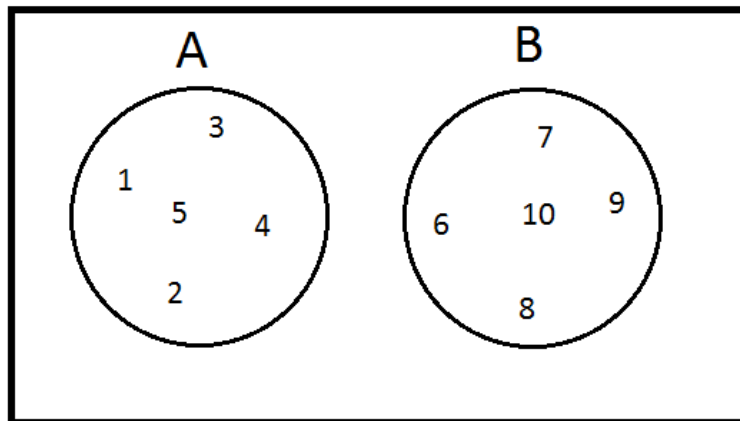
$$\text{Απ. } A = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$$

Το σύνολο των ριζών της εξίσωσης  $x^2 - 1 = 0$

$$\text{Απ. } A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 = 0\}$$

# Τρόποι παράστασης συνόλων (2/2)

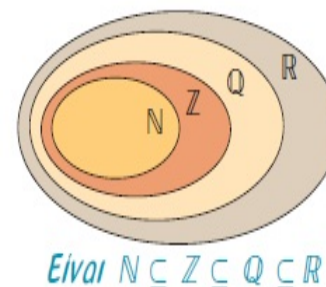
- Με διάγραμμα Venn Το σύνολο A αποτελείται από τους φυσικούς αριθμούς από το 1 έως το 5 και το B από τους φυσικούς αριθμούς από το 6 έως το 10



- Ποια είναι κατά τη γνώμη σας η σημασία αυτής της απεικόνισης συνόλων;

Απ. αναπαριστούν σύνολα, σχέσεις μεταξύ συνόλων (π.χ. υποσύνολα) αλλά και πράξεις μεταξύ (π.χ. τομή συνόλων)

Οι γνωστοί μας αριθμοί και τα αντίστοιχα σύνολά τους συμβολίζονται ως εξής:



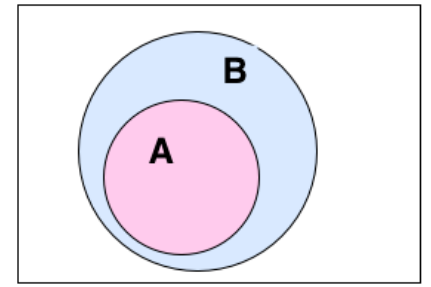
Φυσικοί αριθμοί  $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Ακέραιοι αριθμοί  $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Ρητοί αριθμοί  $Q = \{ \frac{a}{b}, \text{ όπου } a, b \text{ ακέραιοι, με } b \neq 0 \}$

Πραγματικοί αριθμοί  $R = \{\text{ρητοί ή άρρητοι αριθμοί}\}$

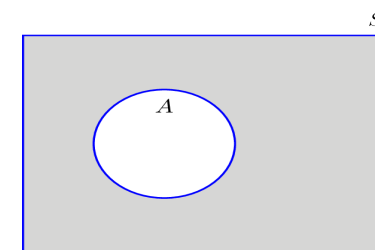
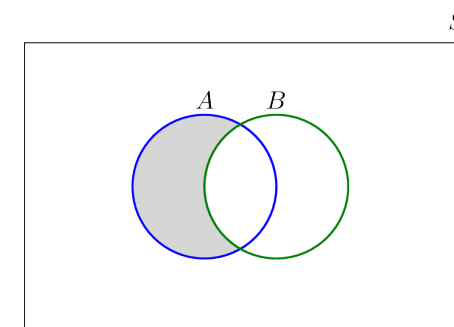
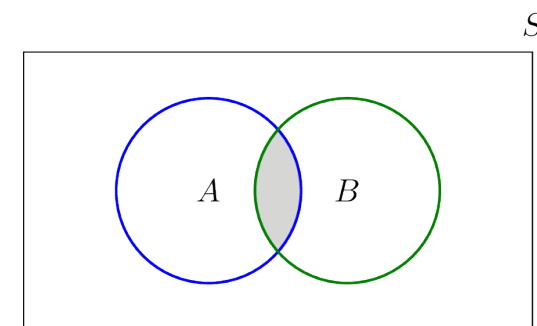
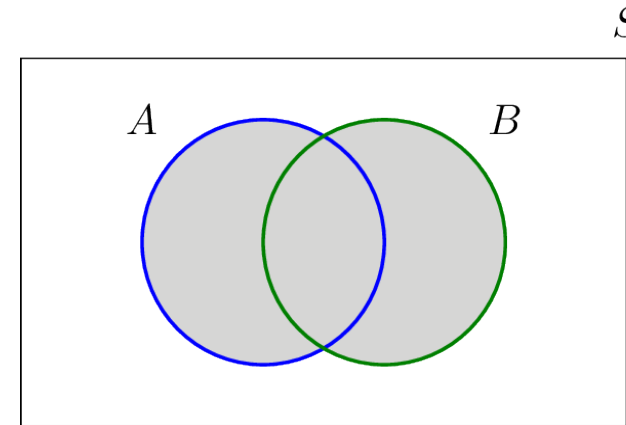
# Τι είναι υποσύνολο;



- Ένα σύνολο  $A$  ονομάζεται **υποσύνολο** ενός συνόλου  $B$  και συμβολίζουμε με  $A \subseteq B$ , εάν κάθε στοιχείο του  $A$  είναι και στοιχείο του  $B$ .
  - Παραδείγματα
    - Το σύνολο όλων των φοιτητών του ΙΦΕ είναι υποσύνολο του συνόλου όλων των φοιτητών του ΕΚΠΑ
    - $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$
  - Το κενό σύνολο (συμβ.  $\emptyset$ )
    - Π.χ. το σύνολο των ημερών της εβδομάδας που ξεκινούν από το γράμμα  $\Lambda$
- Το κενό σύνολο  $\emptyset$  είναι υποσύνολο κάθε συνόλου

# Πράξεις μεταξύ συνόλων

- **Ένωση των συνόλων A και B** (συμβ.  $A \cup B$ ) είναι το σύνολο που τα στοιχεία του ανήκουν ή στο A ή στο B ή και στα δύο.
- **Τομή συνόλων A και B** (συμβ.  $A \cap B$ ) είναι το σύνολο τα στοιχεία ανήκουν στο A και στο B.
- **Διαφορά συνόλου A από σύνολο B** (συμβ.  $A \setminus B$ ) είναι το σύνολο που τα στοιχεία του ανήκουν στο A και δεν ανήκουν στο B.
- **Συμπλήρωμα (complement) συνόλου A** (συμβ.  $A^c$ ) ως προς ένα βασικό σύνολο S είναι το σύνολο με στοιχεία που δεν ανήκουν στο A αλλά ανήκουν στο βασικό σύνολο S. Δηλαδή  $A^c = S \setminus A$



Πληθικός αριθμός (πληθάριθμος)  
συνόλου



# Πληθάριθμος ή πληθικός αριθμός συνόλου

- Πληθάριθμος (cardinality) ενός συνόλου ονομάζεται το πλήθος των στοιχείων του.
  - Ο πληθάριθμος του A συμβολίζεται με  $\text{card}(A)$  ή  $|A|$  ή  $n(A)$

ΣΥΝΟΛΑ	ΠΛΗΘΑΡΙΘΜΟΣ
$A = \{5\}$	$ A  = 1$
$B = \{7,2\}$	$ B  = 2$
$C = \{1,3,4\}$	$ C  = 3$
$D = \{9,1,5,8\}$	$ D  = 4$

**Ερώτηση:** Ποιος είναι ο πληθάριθμος του συνόλου  $A = \{1,2,3, \dots, 1000\}$ ;

**Απάντηση:**  $n(A) = 1000$  ή  $|A| = 1000$

# Παραδείγματα

- Θεωρείστε παραδείγματα συνόλων  $A, B$ .
- Προσπαθήστε να απαντήσετε στις παρακάτω σχέσεις

$$|A \cup A| = ?$$

$$|A \cap A| = ?$$

$$|A \cap \emptyset| = ?$$

$$|A \cup \emptyset| = ?$$

$$|A \cup B| = ?$$

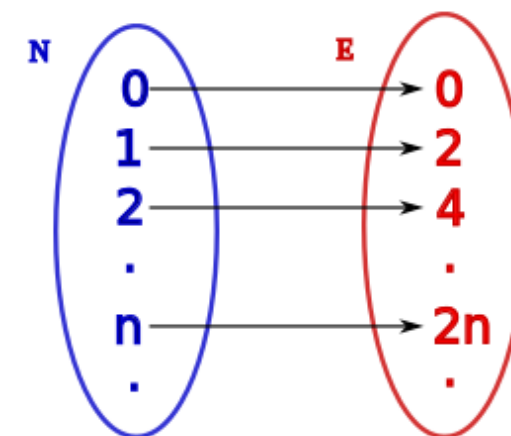
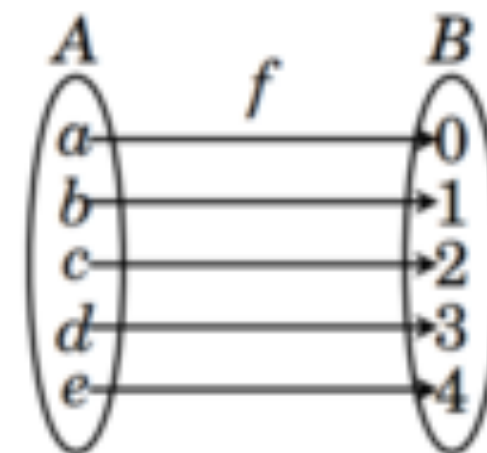
# Ισοπληθικά σύνολα

Δύο σύνολα  $A$  και  $B$  έχουν τον **ίδιο πληθάριθμο (είναι ισοπληθικά)** αν και μόνο αν υπάρχει **αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ  $A$  και  $B$ .**

Δηλαδή, υπάρχει μια αντιστοιχία η οποία αντιστοιχεί κάθε στοιχείο του  $A$  σε ένα στοιχείο του  $B$  (δηλ. συνάρτηση), διαφορετικά στοιχεία του  $A$  αντιστοιχούν σε διαφορετικά στοιχεία του  $B$  (δηλ. 1-1) και κάθε στοιχείο του  $B$  είναι εικόνα ενός στοιχείου του  $A$  (επί).

- Π.χ. τα σύνολα  $Z^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  και  $Z = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$

Είναι ισοπληθικά



# Είδη συνόλων σε σχέση με τον πληθάρισμό ΤΟΥΣ

α) Ένα σύνολο λέγεται **πεπερασμένο** αν είναι το κενό σύνολο ή είναι ισοπληθικό με κάποιο αρχικό τμήμα των φυσικών αριθμών.

*(απλά μιλώντας ξεκινάς να απαριθμείς τα στοιχεία του και κάποια στιγμή θα τα τελειώσεις)*

$$\{1, 2, 3, 4, \dots, k\}$$

$$A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$$

β) Ένα σύνολο λέγεται **άπειρο** αν δεν είναι πεπερασμένο.

γ) Ένα σύνολο λέγεται **αριθμήσιμο** (countable) αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το σύνολο των φυσικών αριθμών

δ) Ένα σύνολο λέγεται **υπεραριθμήσιμο** (uncountable) **αν είναι άπειρο** και δεν είναι ισοπληθικό με το σύνολο των φυσικών αριθμών .

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  είναι όλα **άπειρα σύνολα**

το σύνολο  **$\mathbb{Q}$  των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο**

το σύνολο  **$\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο**

# Πληθικότητα υποσυνόλων των πραγματικών αριθμών

**Θεώρημα:** Οι φυσικοί, οι ακέραιοι και οι ρητοί αριθμοί **είναι άπειρα αριθμήσιμα** σύνολα.

**Θεώρημα:** Οι άρρητοι και οι πραγματικοί αριθμοί είναι **υπεραριθμήσιμα** σύνολα

Ο πίνακας δείχνει μια 1-1 και επί (αμφιμονοσήμαντη) αντιστοιχία ανάμεσα στα σύνολο των φυσικών και των ακεραίων αριθμών. Άρα το σύνολο των φυσικών αριθμών  $\mathbb{N}$  και το σύνολο των ακεραίων αριθμών  $\mathbb{Z}$  είναι ισοπληθικά.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
$f(n)$	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	6	-6	7	-7	...