

1

Άσκηση 1: Γράψτε όλα τα υποσύνολα του συνόλου  $\Omega = \{a, b, \gamma\}$

$\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{\gamma\}, \{a, b\}, \{a, \gamma\}, \{b, \gamma\}, \{a, b, \gamma\}$

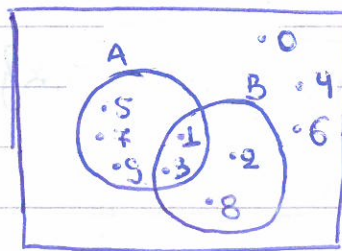
Άσκηση 2: Δίνεται το σύνολο  $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  και τα υποσύνολά του  $A = \{x \in \Omega : x \text{ περιττός}\}$  και  $B = \{x \in \Omega : x \text{ ψηφίο του αριθμού } 23821\}$

1) Να γράψετε τα σύνολα A και B με αναγραφή των στοιχείων τους και να τα παραστήσετε στο ίδιο διαγράμμα Venn

2) Να προσδιορίσετε τα σύνολα  $A \cup B, A \cap B, A - B, B'$

3) Επαληθεύεται ως ισότητα  $(A \cap B)' = A' \cup B'$  και  $(A \cup B)' = A' \cap B' = ((A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A))'$

1)  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  και  $B = \{2, 3, 8\}$



2)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ ,  $A \cap B = \{1, 3\}$ ,  $A - B = \{5, 7, 9\}$   
 $B' = \{0, 4, 5, 6, 7, 9\}$

3) αφού  $A \cap B = \{1, 3\}$  τότε  $(A \cap B)' = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

$A' = \{0, 2, 4, 6, 8\}$  και  $B' = \{0, 4, 5, 6, 7, 9\}$

άρα  $A' \cup B' = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  άρα  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

2

ii)  $(A \cup B)' = \{0, 4, 6\}$  και  $A' \cap B' = \{0, 4, 6\}$

$B - A = \{2, 8\}$  και  $A - B = \{5, 7, 9\}$  και  $A \cap B = \{1, 3\}$

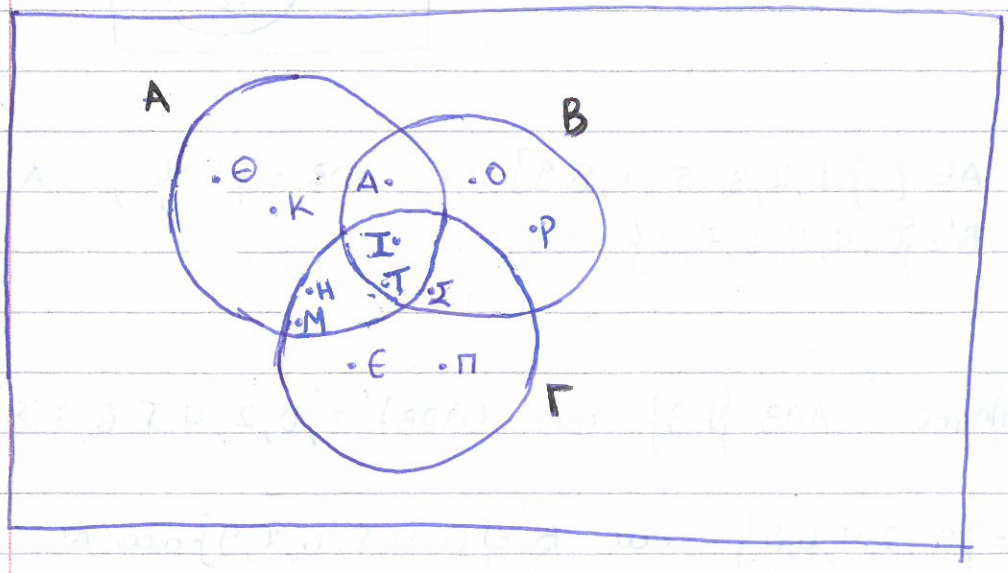
άρα:  $(A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$

και  $((A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A))' = \{0, 4, 6\}$

Άσκηση 3: Δίνονται τα σύνολα  $A = \{\text{χρώμματα της λέξης ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ}\}$ ,  $B = \{\text{χρώμματα της λέξης ΙΣΤΟΡΙΑ}\}$  και  $\Gamma = \{\text{χρώμματα της λέξης ΕΠΙΣΤΗΜΗ}\}$

- 1) Να γράψετε τα σύνολα A, B και Γ με αναγραφή των στοιχείων τους και να τα παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn
- 2) Να προσδιορίσετε τα σύνολα  $B \cap \Gamma$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cap \Gamma$ .
- 3) Να επαληθεύσετε την ισότητα:  $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

i)  $A = \{\mu, \alpha, \theta, \eta, \tau, \iota, \kappa\}$ ,  $B = \{\iota, \sigma, \tau, \omicron, \rho, \alpha\}$ ,  $\Gamma = \{\epsilon, \pi, \iota, \sigma, \tau, \eta, \mu\}$



3)

$$2) \text{ΒΥΓ} = \{ \Gamma, \Sigma, \text{T}, \text{O}, \text{P}, \text{A}, \text{E}, \text{Π}, \text{H}, \text{M} \}$$

$$\cdot \text{ΑΝΒ} = \{ \text{A}, \text{I}, \text{T} \}$$

$$\cdot \text{ΑΠΓ} = \{ \text{I}, \text{T}, \text{H}, \text{M} \}$$

$$3) \text{ Έχω ότι } (\text{ΑΝΒ}) \cup (\text{ΑΠΓ}) = \{ \text{A}, \text{I}, \text{T}, \text{H}, \text{M} \}$$

$$\text{ και } \text{ΑΠ}(\text{ΒΥΓ}) = \{ \text{M}, \text{A}, \text{H}, \text{T}, \text{I} \}$$

$$\text{ επομένως, } \text{ΑΠ}(\text{ΒΥΓ}) = (\text{ΑΝΒ}) \cup (\text{ΑΠΓ}).$$

Άσκηση 5: Να δείξετε ότι τα σύνολα  $A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ ρίζα της εξίσωσης } x^2 - 9x + 20 = 0\}$  και  $B = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq 3x - 10 \leq 5\}$  ισα.

Για να βρούμε το A λύνουμε την εξίσωση  $x^2 - 9x + 20 = 0$ .

$$\Delta = 81 - 80 = 1,$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\text{ άρα } A = \{4, 5\}$$

Για να βρούμε το B λύνουμε την ανίσωση:  $2 \leq 3x - 10 \leq 5 \Rightarrow$

$$12 \leq 3x \leq 15 \Rightarrow$$

$$4 \leq x \leq 5.$$

$$\text{ και } x \in \mathbb{N} \quad \text{επομένως } B = \{4, 5\}$$

Άρα τα A, B είναι ισα.

Άσκηση 6: Έστω A, B υποσύνολα ενός βασικού συνόλου  $\Omega$ . Ποιες

από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες λανθασ;

$$i) \text{ΑΝΒ} \subseteq A \quad \text{και} \quad \text{ΑΝΒ} \subseteq B \quad \rightarrow \text{Σωστό}$$

$$ii) \text{Α} \cup \text{B} \subseteq A \quad \text{και} \quad \text{Α} \cup \text{B} \subseteq B \quad \rightarrow \text{Λάθος}$$

$$iii) (\text{Α} \cup \text{B}') \cup \text{B} = \Omega \quad \rightarrow \text{Σωστό}$$

4

Άσκηση 9 : Να ελεγχθείτε αν είναι ίσα τα ατόμιστα ζεύγη συνόλων: α)  $A = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x+2 \leq 1\}$  και  $B = \{-3, -2, -1\}$ .

β)  $\Gamma = \{x \in \mathbb{N} : -1 \leq x+2 \leq 1\}$  και  $B = \{-3, -2, -1\}$ .

α) Λύνουμε την ανίσωση :  $-1 \leq x+2 \leq 1 \Rightarrow$

$$\boxed{-3 \leq x \leq -1}$$

αφού  $x \in \mathbb{Z}$ , τότε  $A = \{-3, -2, -1\}$

Επομένως τα  $A, B$  είναι ίσα.

β) Λύνουμε την ανίσωση  $-1 \leq x+2 \leq 1$   
 $-3 \leq x \leq -1$

όμως  $x \in \mathbb{N}$  όπου  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  άρα κανένας φυσικός δεν ανήκει στο διάστημα  $[-3, -1]$ ,

Επομένως  $\Gamma = \emptyset$ , (κενό σύνολο).

Τα  $B, \Gamma$  δεν είναι ίσα.

Άσκηση 10

Να λύσετε τη ρητή εξίσωση  $\frac{x+1}{2x+1} + \frac{2x-1}{x-1} = 2$ .

Λύση: Παιρνω τους περιορισμούς, πρέπει ο παρονομαστής  $\neq 0$ ,  
άρα  $x \neq -\frac{1}{2}$  και  $x \neq 1$ .

• Κόνω τα κλάσματα ομώνυμα:

$$\frac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)} + \frac{(2x-1)(2x+1)}{(x-1)(2x+1)} - \frac{2(x-1)(2x+1)}{(x-1)(2x+1)} = 0$$

$$\frac{x^2 - 1 + 4x^2 - 1 - 2(2x^2 + x - 2x - 1)}{(x-1)(2x+1)} = 0$$

5

12

$$5x^2 - 2 - 4x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Άσκηση 11: Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3x+1}{x^2+x} - \frac{x+3}{x} = \frac{x-3}{x+1} - 1$$

Λύση: Ποίρω τους παρονομαστές:  $x^2+x \neq 0 \Rightarrow$   
 $x(x+1) \neq 0 \Rightarrow$   
 $x \neq 0$  και  $x \neq -1$

Κάνω τα κλάσματα ομώνυμα:

$$\frac{3x+1}{x(x+1)} - \frac{x+3}{x} = \frac{x-3}{x+1} - 1$$

$$\frac{3x+1}{x(x+1)} - \frac{(x+3)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x(x-3)}{x(x+1)} - \frac{x(x+1)}{x(x+1)}$$

$$\frac{3x+1}{x(x+1)} - \frac{x^2+4x+3}{x(x+1)} = \frac{x^2-3x}{x(x+1)} - \frac{x^2+x}{x(x+1)}$$

$$\frac{3x+1 - x^2 - 4x - 3 + 4x}{x(x+1)} = 0$$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 8 = 1$$

$$\text{οίρα } x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow 1 \rightarrow 2$$