①

Άσκηση 1: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 4-x^2, & x<1 \\ x-3, & x\geq 1 \end{cases}$

α) Να γίνει η γραφική της παράσταση.
β) Να εξεταστεί η συνέχεια στο σημείο $x_0=1$

Λύση

α) Για $x<1$: Η $f(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση $2^{ου}$ βαθμού, άρα η γραφική της παράσταση είναι παραβολή, της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (με $\alpha=-1, \beta=0, \gamma=4$)
Για να σχεδιάσω την παραβολή θα χρειαστώ 4 σημεία:
→ στο σημείο $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, η παραβολή παρουσιάζει είτε ελάχιστο είτε μέγιστο. Για $\alpha>0$, η παραβολή παρουσιάζει ελάχιστο, ενώ για $\alpha<0$ παρουσιάζει μέγιστο. Εδώ $\alpha=-1<0$, άρα παρουσιάζει μέγιστο στο:

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{0}{-2}=0. \quad \text{και} \quad f(0)=4.$$

άρα το $A(0,4)$ είναι το μέγιστο,
→ σημείο τομής με $x'x$: δηλαδή βρίσκω το σημείο x_0 για το οποίο ισχύει $f(x_0)=0$.

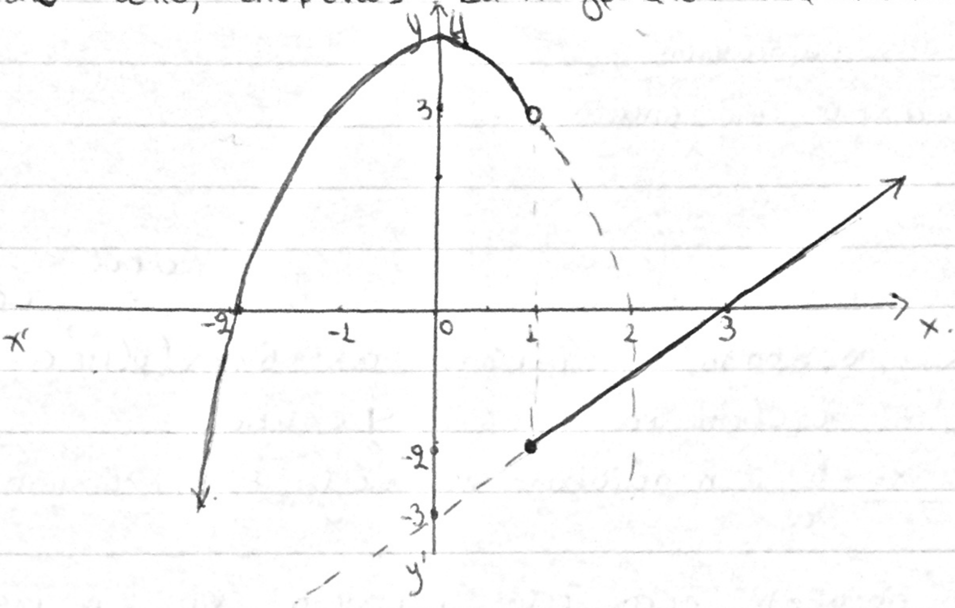
$$f(x)=0 \Rightarrow 4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4$$

$$x=-2 \qquad x=2$$

άρα η παραβολή τέμνει τους άξονες στα σημεία $B(-2,0)$ και $\Gamma(2,0)$
→ σημείο τομής με $y'y$: παίρνω $x=0$,
όπως υπολόγισα πριν $f(0)=4$. Άρα η παραβολή τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Delta(0,4)$

Για $x\geq 1$ $f(x)=x-3$, άρα η γραφική παράσταση είναι ευθεία της μορφής $y=\alpha x+\beta$. Για να τη σχεδιάσω βρίσκω σημεία τομής με τους άξονες:
- Σημείο τομής με $x'x$: $f(x)=0 \Rightarrow 0=x-3 \Rightarrow x=3$.
  άρα $E(3,0)$ το σημείο τομής με $x'x$.
- Σημείο τομής με $y'y$: $x=0$: $f(0)=-3$.
  άρα $Z(0,-3)$ το σημείο τομής με $y'y$.
- Για $x=1$, $f(1)=-2$ άρα $\Lambda(1,-2)$

☆Προσοχή στο σχεδιασμό, για $x<1$ και $x \geq 1$ η $f(x)$ δίνεται από διαφορετικό τύπο, επομένως και η γραφική παράσταση αλλάζει. ☆



β) Για να είναι η $f(x)$ συνεχής στο $x=1$, πρέπει το όριο στο $x=1$ να υπάρχει και να είναι ίσο με το $f(1)$, δηλ. $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

- Από προηγούμενους υπολογισμούς $f(1) = -2$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-}(4-x^2) = 4-(-1)^2 = 4-1 = 3$.
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}(x-3) = 1-3 = -2$.

Βλέπω ότι $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$, επομένως το όριο $\lim_{x \to 1} f(x)$ δεν υπάρχει, άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x=1$.

Άσκηση 2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (2\lambda-3)x^2 + \lambda x + 5$ διέρχεται από το σημείο $A(-2,5)$.

i) Να βρείτε το λ.

ii) Για την τιμή του λ που βρήκατε:

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)$

(2)

Λύση:

i) Αφού διέρχεται από το Α, τότε το Α(-2,5) επαληθεύει την εξίσωση της $f(x)=(2\lambda-3)x^2+\lambda x+5 \Rightarrow$

Άρα $5=(2\lambda-3)(-2)^2+\lambda(-2)+5 \Rightarrow$

$5=(2\lambda-3)\cdot 4-2\lambda+5 \Rightarrow$

$5=8\lambda-12-2\lambda+5 \Rightarrow$

$6\lambda=12 \Rightarrow \boxed{\lambda=2}$

άρα αντικαθιστώ στην f: $\boxed{f(x)=x^2+2x+5}$

ii) α) Με βάση τους κανόνες παραγώγισης έχω:

$f'(x)=(x^2)'+(2x)'+(5)'$

$=2x+2+0$

$\boxed{f'(x)=2x+2}$

β) • Για να εξετάσω τη μονοτονία, πρέπει πρώτα να εξετάσω το πρόσημο της παραγώγου: → για διαστήματα που $f'(x)>0$, η συνάρτηση είναι αύξουσα

→ για διαστήματα που $f'(x)<0$, η συνάρτηση είναι φθίνουσα

• $f'(x)>0 \Rightarrow 2x+2>0 \Rightarrow$

$2x>-2 \Rightarrow$

$\boxed{x>-1}$ Για $x>-1$ η συνάρτηση είναι αύξουσα και για $x<-1$, φθίνουσα.

• Η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατα, εκεί που η παράγωγος μηδενίζεται και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του σημείου

↳ $f'(x)=0$, $2x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$. Ισχύει ότι για $x<-1$ $f'(x)<0$, και για $x>-1$ $f'(x)>0$. Άρα στο $x=-1$ η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο.

και επειδή ισχύει ότι $f'(-1)=0$ και $f'(x)<0$ για $x<-1$, και $f'(x)>0$ για $x>-1$, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=-1$

γ) Η $f(x)$ είναι πολυωνυμική εξίσωση 2ου βαθμού, άρα η γραφική της παράσταση θα είναι παραβολή. Ξέρω ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=-1$, με $f(-1)=(-1)^2+2(-1)+5=1-2+5=4$.

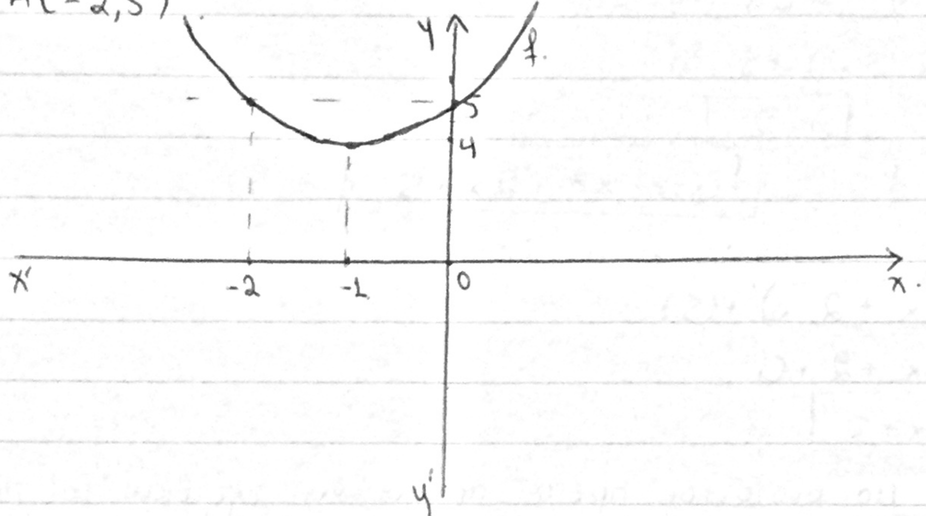
άρα $B(-1,4)$.

• Σημείο τομής με $x'x$: $f(x)=0$. $x^2+2x+5=0$. $\Delta=4-4\cdot 5=-16<0$

άρα η $f(x)$ δεν έχει σημεία τομής με τον $x'x$.

• Σημείο τομής με $y'y$. Για $x=0$. $f(0)=0+0+5=5$. άρα $\Gamma(0,5)$.

• Τυχαίο σημείο, Για $x=-2$, $f(-2)=5$ (Από εκφώνηση, αφού διέρχεται από το $A(-2,5)$)



Άσκηση 3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$.

i) Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε1 και ε2, της γραφικής παράστασης της f, στα σημεία που τέμνει τον $x'x$.

iii) Να βρείτε το σημείο στο οποίο τέμνονται οι εφαπτομένες ε1 και ε2.

Λύση:

i) • Για σημείο τομής με $x'x$: $f(x)=0$. $x^2-4x+3=0$, $\Delta=4^2-4\cdot3$

$=16-12$

$=4>0$

άρα έχει 2 πραγμ. ρίζες: $x_{1,2}=\frac{4\pm2}{2}$ → $\frac{6}{2}=3$, → $\frac{2}{2}=1$.

τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

• Για σημείο τομής με $y'y$: $x=0$: $f(0)=0+0+3=3$

άρα τέμνει τον $y'y$ στο $\Gamma(0,3)$.

ii). Εξισώσεις εφαπτομένων της f στα σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης σε ένα σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι:

$\boxed{y-f(x_0)=\lambda(x-x_0)}$ όπου $\lambda=f'(x_0)$.

③ Για το σημείο $A(1,0)$:

$\lambda_1 = f'(1)$, $f'(x)$ η παράγωγος της $f(x)$.

$f'(x) = (x^2)' - (4x)' + (3)' = 2x - 4$.

άρα $f'(1) = 2 - 4 = -2$. $f'(1) = -2$ άρα $\boxed{\lambda_1 = -2}$

άρα στο σημείο $A(1,0)$ η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται:

$$y - 0 = (-2)\cdot(x-1) \Rightarrow$$

$$\boxed{y = -2x + 2} \text{ η } (\varepsilon_1).$$

Για το σημείο $B(3,0)$:

$\lambda_2 = f'(3)$. όπου $f'(x) = 2x - 4$ όπως υπολογίστηκε παραπάνω.

$f'(3) = 2\cdot 3 - 4 = 6 - 4 = 2$. , $f'(3) = 2$ άρα $\boxed{\lambda_2 = 2.}$

άρα στο σημείο $B(3,0)$ η εξ. της εφαπτομένης γίνεται:

$$y - 0 = 2\cdot(x-3).$$

$$\boxed{\varepsilon_2: y = 2x - 6.}$$

ιιι) για να βρω το σημείο τομής των ευθειών εξισώνω:

$$-2x + 2 = 2x - 6 \Rightarrow$$

$$4x = 8.$$

$$x = 2. \quad \text{και} \quad y = 2\cdot 2 - 6 = 4 - 6 = -2.$$

άρα οι ευθείες τέμνονται στο σημείο $\Delta(2,-2)$.

Άσκηση 4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 25 - x^2$.

α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση

β) Να βρείτε την παράγωγο της $f(x)$

γ) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα

δ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της f και του $x'x$ από το -5 έως το 5.

Λύση:

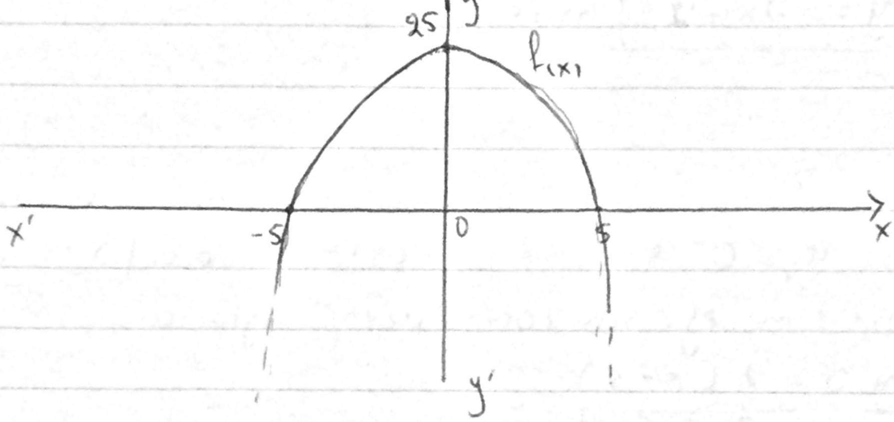
α) • Σημείο τομής με $x'x$; $f(x) = 0$ $\quad 25 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$.

άρα $A(-5,0)$ και $B(5,0)$ τα σημεία τομής με τον $x'x$.

• Σημείο τομής με $y'y$: $x = 0$ $\quad f(0) = 25$. άρα $\Gamma(0,25)$, το σημείο τομής με τον $y'y$.

• Η f είναι πολυων. εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού άρα η γρ. παράσταση είναι παραβολή. και ο της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma$. (Με $\alpha=-1$, $\beta=0$, $\gamma=25$). Παρουσιάζει μέγιστο (αφού $\alpha=-1<0$) στο σημείο $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=0$.

άρα το $\Gamma(0,25)$ είναι το μέγιστο της παραβολής.



β) $f'(x)=(25)'-(x^2)' \Rightarrow f'(x)=0-2x \Rightarrow f'(x)=-2x$.

γ) Ακρότατο της f για $f'(x_0)=0$ και αλλαγή προσήμου της παραγώγου για $x<x_0$ και $x>x_0$.

$f'(x)=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0.}$

Παρατηρώ ότι για $x<0$ $f'(x)>0$ και για $x>0$ $f'(x)<0$, άρα στο $x=0$ η $f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο, το $f(0)=25$

Άρα το $\Gamma(0,25)$ είναι το μέγιστο.

δ) Για $x<0$ $f'(x)>0$, άρα η f είναι αύξουσα σε αυτό το διάστημα.
Για $x>0$ $f'(x)<0$, " " φθίνουσα " "

ε) $E=\int_{-5}^{5} f(x)\,dx=\int_{-5}^{5}(-x^2+25)\,dx=-\int_{-5}^{5}x^2dx+\int_{-5}^{5}25\,dx=$

$=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-5}^{5}+25\cdot(5-(-5))=-\left[\frac{125}{3}-\frac{(-125)}{3}\right]+25\cdot 10$

$=-\frac{250}{3}+250=\frac{2\cdot 250}{3}=\frac{500}{3}$ τμ.

Άσκηση 5: Δίνεται ο ακέραιος αριθμός $\alpha = 12\kappa - 5$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.
i) Να αποδείξετε ότι ο α είναι περιττός.
ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α δια του 4.

Λύση: (i) $\alpha = 12\kappa - 5 = 12\kappa - 6 + 1 = 2(6\kappa - 3) + 1 = 2\nu + 1$ οπότε α περιττός

(ii)

(ii) $\alpha = 12\kappa - 5 = 12\kappa - 8 + 3 = 4\cdot(3\kappa - 2) + 3 = 4\pi + 3$. Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το 4 είναι 3.

Άσκηση 6: Δείξτε ότι $3 \mid \nu(\nu^2+5)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Λύση: Αρκεί να δείξω ότι $\nu(\nu^2+5) = \pi o\lambda 3$.

Ο ν μπορεί να γραφεί ως: $\nu = 3\kappa$ ή $\nu = 3\kappa+1$ ή $\nu = 3\kappa+2$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$

- Αν $\nu = 3\kappa$, τότε $\nu(\nu^2+5) = 3\kappa(9\kappa^2+5) = \pi o\lambda 3$.
- Αν $\nu = 3\kappa+1$, τότε
$$\nu(\nu^2+5) = (3\kappa+1)(9\kappa^2+6\kappa+5+1) = (3\kappa+1)(9\kappa^2+6\kappa+6) = 3\cdot(3\kappa+1)\cdot(3\kappa^2+2\kappa+2) = \pi o\lambda 3.$$
- Αν $\nu = 3\kappa+2$ τότε
$$\nu(\nu^2+5) = (3\kappa+2)(9\kappa^2+12\kappa+4+5) = (3\kappa+2)(9\kappa^2+12\kappa+9) = 3\cdot(3\kappa+2)\cdot(3\kappa^2+4\kappa+3) = \pi o\lambda 3.$$

Άρα αποδείχθηκε ότι σε κάθε περίπτωση $3 \mid \nu(\nu^2+5)$

Άσκηση 7: Να υπολογίσετε τον ΜΚΔ των 112, 46, με χρήση του Ευκλείδιου Αλγορίθμου.

Λύση:

$112 = 2\cdot 46 + 20$

$46 = 2\cdot 20 + 6$

$20 = 3\cdot 6 + 2$

$6 = 3\cdot 2 + 0$. Ο ΜΚΔ είναι το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο των διαιρέσεων δηλαδή το 2.

$$ΜΚΔ(112, 46) = 2.$$

Άσκηση 8: Υπολογίστε με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων το ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών: 480, 200, 256.

<u>Λύση:</u>

480	2
240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$.

200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$200 = 2^3 \cdot 5^2$

256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$256 = 2^8$

- για ΜΚΔ παίρνω μόνο τους κοινούς παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη, άρα $ΜΚΔ = 2^3 = 8$. $ΜΚΔ(480, 200, 256) = 8$.

- για ΕΚΠ παίρνω κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με το μεγαλύτερο εκθέτη. άρα $ΕΚΠ = 2^8 \cdot 3 \cdot 5^2$ $ΕΚΠ(480, 200, 256) = 19.200$.

<u>Άσκηση 9:</u> Με χρήση της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής να αποδείξετε ότι, αν ν φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 5, ισχύει η ανισότητα: $2^ν > 5ν$.

Λύση:

↳ Έστω $P(ν)$ η πρόταση. 3 βήματα της επαγωγής για να αποδείξω ότι η $P(ν)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι ισχύει η ανισότητα.

<u>1. Βασικό Βήμα.</u> Ελέγχω αν η ισότητα ισχύει για $ν=5$.

⑤

$P(5): 2^5 > 5 \cdot 5$

$32 > 25$ που ισχύει, δηλαδή η $P(5)$ είναι αληθής.

2. Επαγωγική Υπόθεση Υποθέτω ότι η πρόταση είναι αληθής για κάποιο $\nu = k$. Δηλαδή η $P(k)$ αληθής.

$$\boxed{2^k > 5k} \quad (1)$$

3. Επαγωγικό Βήμα: Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) που προέκυψε από την επαγωγική υπόθεση. θα δείξω ότι:

↳ Αν η $P(k)$ είναι αληθής, δηλ. η πρόταση ισχύει για $\nu = k$,

↳ και η $P(k+1)$ είναι αληθής. δηλαδή ότι ισχύει για $\nu = k+1$.

Συγκεκριμένα πρέπει να αποδείξω ότι: $\boxed{2^{k+1} > 5(k+1)}$ (2)

Ξεκινάω από τη σχέση (1) και θα φτάσω στη (2):

$2^k > 5k$: Πολ/ζω με 2 και τα δύο μέλη

$2 \cdot 2^k > 2 \cdot 5k$

$2^{k+1} > 2 \cdot 5k$

$2^{k+1} > 5k + 5k > 5k + 5$ για κάθε κ φυσικό ≥ 5.

$2^{k+1} > 5k + 5 \Rightarrow$

$2^{k+1} > 5(k+1)$. άρα η $P(k+1)$ είναι αληθής, άρα η ανισότητα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ≥ 5.

Άσκηση 10: a) Δίνεται το διάνυσμα $\vec{u} = (4, -2)$ με αρχικό σημείο το $A(2, 2)$. Να βρείτε το τελικό του σημείο, το μέτρο του και το συντελεστή διεύθυνσης.

Λύση: • Ένα διάνυσμα $\vec{u}$ με αρχή το $A(x_1, y_1)$ και πέρας το $B(x_2, y_2)$ έχει συντεταγμένες $\vec{u} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

άρα : αντικαθιστώ: $(4, -2) = (x_2 - 2, y_2 - 2) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 4 = x_2 - 2 \\ -2 = y_2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_2 = 6 \\ y_2 = 0 \end{matrix}$$

άρα το τελικό σημείο του διανύσματος (πέρας) είναι το $B(6, 0)$

→ ~~Κάθε~~ Το μέτρο ενός ~~του~~ διανύσματος $\vec{u}=(x,y)$ δίνεται από τον τύπο:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

άρα εδώ $|\vec{u}| = \sqrt{4^2+(-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$.

→ Ο συντελεστής διεύθυνσης λ, ενός διανύσματος $\vec{u}=(x,y)$ δίνεται από τον τύπο $\lambda = \frac{y}{x}$.

Άρα εδώ $\lambda = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Ερώτηση: • Τι συντελεστή διεύθυνσης έχει μια ευθεία ε_1 που είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}$?

• Τι συντ. διεύθυνσης έχει μια ευθεία ε_2 που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u}$?

Άσκηση 11: Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο (1,2) και διέρχεται από το σημείο (5,2)

Λύση: ① Η γενική εξίσωση του κύκλου με κέντρο (α,β) και ακτίνα R είναι:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2.$$

Έχω: $(x-1)^2+(y-2)^2=R^2$. Όμως ξέρω ότι το σημείο (5,2) επαληθεύει την εξίσωση άρα αντικαθιστώ: $(5-1)^2+(2-2)^2=R^2 \Rightarrow$

$$4^2+0=R^2 \Rightarrow \boxed{R=4}$$

Επομένως η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2=4^2} \quad (1)$$

② τρόπος: Υπολογίζω την απόσταση του σημείου (5,2) που ανήκει στον κύκλο, από το κέντρο του κύκλου. Η απόσταση που θα βρω, είναι η ακτίνα του κύκλου.

Η απόσταση δύο σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δίνεται από τον τύπο
$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

άρα $R=(AB)=\sqrt{(5-1)^2+(2-2)^2} = \sqrt{4^2+0} = 4$

άρα $R=4$, και προκύπτει η εξίσωση 1, ως εξίσωση του κύκλου.