1)

Άσκηση: Να αποδείξετε τις ανισοτικές σχέσεις με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής:

1) Εάν ν φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 5 να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $2^{\nu} > 5\nu$.

2) Εάν ν φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 3 να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $2^{\nu} > 2\nu+1$.

Λύση

1) Έστω $P(\nu)$, η πρόταση της εκφώνησης. Για να αποδείξω ότι η ανισότητα ισχύει για κάθε ν φυσικό με $\nu \geq 5$, (δηλαδή ότι η $P(\nu)$ είναι αληθής), ακολουθώ τα 3 βήματα της επαγωγής:

1. Βασικό Βήμα: Ελέγχω αν η ισότητα ισχύει για $\nu=5$.

δηλαδή $P(5)$: $2^5 > 5 \cdot 5$

$32 > 25$, που ισχύει.

2. Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτω ότι η πρόταση είναι αληθής για κάποιο $\nu=k$, δηλαδή ότι $P(k)$, δηλαδή:

$$\boxed{2^k > 5k} \quad (1)$$

3. Επαγωγικό βήμα: Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) της επαγωγικής υπόθεσης, προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι αν η πρόταση $P(k)$ ισχύει για $\nu=k$, τότε ισχύει και για $\nu=k+1$, $P(k+1)$.

δηλαδή πρέπει να δείξω ότι ισχύει $\boxed{2^{k+1} > 5(k+1)}$ (2)

Ξεκινώ από τη σχέση (1) και προσπαθώ να φτάσω στη (2):

$2^k > 5k$: Πολ/ζω με 2 και τα δύο μέλη:

$2 \cdot 2^k > 2 \cdot 5k$

$2^{k+1} > 2 \cdot 5k$

Γιατί: $5k+5k > 5k+5$;
Για $k=5$: $50 > 30$
$k=6$ $60 > 35$ κλπ

$2^{k+1} > 5k + 5k > 5k+5$ για κάθε k φυσικό ≥ 5

$2^{k+1} > 5k+5$

άρα $2^{k+1} > 5(k+1)$, άρα η $P(k+1)$ αληθής, άρα η ανισότητα ισχύει και για τον επόμενο του k+1 κ.ο.κ. Άρα η ανισότητα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ≥ 5.

2) Έστω $P(\nu)$ η πρόταση της εκφώνησης:

1. Βασικό Βήμα: Ελέγχω αν η $P(3)$ είναι αληθής:

$$2^3 > 2 \cdot 3 + 1$$

$8 > 7$, που ισχύει, άρα $P(3)$ αληθής.

2. Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτω ότι η ανισότητα ισχύει για κάποιο $\nu = k$, δηλαδή ότι $P(k)$:

$$\boxed{2^k > 2k + 1} \quad (1)$$

3. Επαγωγικό Βήμα: Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1), προσπαθώ να αποδείξω ότι ισχύει και η $P(k+1)$, δηλαδή ότι ισχύει $\boxed{2^{k+1} > 2(k+1) + 1}$ (2)

Ξεκινώ από τη σχέση (1) και προσπαθώ να φτάσω στη (2):

$2^k > 2k + 1$. Πολ/ζω με 2 και τα δύο μέλη:

$$2 \cdot 2^k > 2 \cdot (2k+1)$$

$$2^{k+1} > 4k + 2$$

$$2^{k+1} > 2k + 2k + 2$$

$2^{k+1} > 2k + 2 + 2k$. Κοινό παράγοντα το 2, από τους δύο πρώτους όρους:

$$2^{k+1} > 2 \cdot (k+1) + 2k > 2(k+1) + 1$$

Για την τελευταία ανίσωση: αφού k φυσικός, και $k \geq 3$ ισχύει ότι $2(k+1) + 2k > 2(k+1) + 1$. Για $k = 3$: $14 > 9$,
Για $k = 4$ $18 > 11$ κλπ.

Άρα $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$, άρα η $P(k+1)$ είναι αληθής, και αποδείχθηκε ότι η ανισότητα ισχύει για κάθε ν φυσικό, $\nu \geq 3$.

2) <u>Άσκηση 2</u>: Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο θετικό ν ισχύει, ότι $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+\nu(\nu+1)=\frac{\nu\cdot(\nu+1)(\nu+2)}{3}$.

<u>Λύση:</u>

<u>1. Βασικό βήμα</u>; για $\nu=1$, έχω $1\cdot 2=\frac{2\cdot 3}{3}$ που ισχύει.

πχ για $\nu=3$ έχω $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4=\frac{3\cdot(3+1)(3+2)}{3}$

$2+6+12=4\cdot 5$

$20=20$ που ισχύει.

άρα $P(1)$ αληθής.

<u>2. Επαγωγική Υπόθεση</u>: Έστω ότι η σχέση ισχύει για $\nu=k$, δηλαδή ότι $P(k)$ αληθής.

$$\boxed{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k\cdot(k+1)=\frac{k\cdot(k+1)(k+2)}{3}}\quad(1)$$

<u>3. Επαγωγικό Βήμα</u>: Προσπαθώ να αποδείξω ότι η σχέση ισχύει και για $\nu=k+1$, δηλαδή ότι η $P(k+1)$ αληθής.

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=$$

$$\left[1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k\cdot(k+1)\right]+(k+1)(k+2)=\text{(αντικαθιστώ 1)}:$$

$$\frac{k\cdot(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=$$

$$\frac{k\cdot(k+1)(k+2)+3(k+1)\cdot(k+2)}{3}=\left(\text{Βγάζω } (k+1)\cdot(k+2) \text{ κοινό παράγοντα}\right)$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}=\frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)\big((k+1)+2\big)}{3}$$

άρα απέδειξα ότι ισχύει και για $k+1$, άρα ότι $P(k+1)$ αληθής.

Άρα ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν.

<u>Άσκηση 3</u>: Αποδείξτε επαγωγικά ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, το 3 διαιρεί ακέραια (ακριβώς, χωρίς υπόλοιπο) τον n^3+5n+6.

<u>Λύση</u>.

<u>1. Βασικό Βήμα</u>: Για $n=0$, $n^3+5n+6=6$ που διαιρείται ακριβώς με το 3.

<u>2. Επαγωγική Υπόθεση</u>: Έστω ότι ισχύει για $n=k$, ότι δηλαδή η $P(k)$ αληθής: Ο αριθμός γράφεται:

$$\boxed{k^3+5k+6 = 3 \cdot m} \quad (1)$$ (m κάποιος φυσικός).

<u>3. Επαγωγικό Βήμα</u>: Προσπαθώ να αποδείξω ότι ισχύει και για $n=k+1$.

Υπενθύμιση: $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Για $n=k+1$:

$$(k+1)^3+5(k+1)+6 = k^3+3k^2+3k+1+5k$$
$$=(k^3+5k+6)+3k^2+3k+6.$$

Αντικαθιστώ από (1): άρα

$$(k+1)^3+(5k+1)+6 = 3m+3(k^2+k+2)$$ και οι δύο όροι του αθροίσματος διαιρούνται ακριβώς με το 3, άρα και το άθροισμα διαιρείται με το 3 ακριβώς.

άρα η $P(k+1)$ ισχύει,

δηλαδή αποδείξαμε επαγωγικά ότι ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 0$

<u>Άσκηση 4</u>. Αποδείξτε επαγωγικά ότι για κάθε $n \geq 2$, ισχύει ότι n^3-n διαιρείται ακριβώς με το 3.

<u>Λύση</u>:

<u>1. Βασικό Βήμα</u>: Για $n=2$, $n^3-n=8-2=6$, διαιρείται ακριβώς με το 3.

<u>2. Επαγωγική Υπόθεση</u>: Έστω ότι ισχύει για $n=k$, δηλαδή k^3-k διαιρείται με το 3, ή $\boxed{k^3-k=3m,}$ m φυσικό (1)

3)

3. Επαγωγικό Βήμα: Θα δείξω ότι, $(k+1)^3-(k+1) = 3z$, z ευατό

$$(k+1)^3-(k+1) = k^3+3k^2+3k+1-k-1 = 3k^2+3k+\boxed{k^3-k}$$

Αντικαθιστώ από (1) και γίνεται:

$$(k+1)^3-(k+1) = 3k^2+3k+3m = 3(k^2+k+m) = 3z$$

άρα διαιρείται με το 3.

Άρα αποδείξαμε επαγωγικά ότι ισχύει για κάθε $n \geq 1$.

Άσκηση 5: Αποδείξτε επαγωγικά ότι για κάθε $n \geq 1$, $(n \in \mathbb{N})$, ισχύει: $1+4+7+\ldots+(3n-2) = \frac{n\cdot(3n-1)}{2}$

Λύση: 1. Βασικό Βήμα: Ελέγχω αν ισχύει η $P(1)$, δηλαδή για $n=1$.

$$1 = \frac{1\cdot(3-1)}{2} \Leftrightarrow 1 = 1, \text{ άρα ισχύει}$$

2. Επαγωγική Υπόθεση: Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n=k$, δηλαδή η $P(k)$ αληθής:

άρα: $$\boxed{1+4+7+\ldots+(3k+2) = \frac{k\cdot(3k-1)}{2}} \quad (1)$$

3. Επαγωγικό Βήμα: Θα δείξω ότι ισχύει για $k+1$, δηλαδή ότι:

$$1+4+7+\ldots+(3k-2)+[3(k+1)-2] = \frac{(k+1)[3(k+1)-1]}{2}.$$

Πράγματι:

$$[1+4+7+\ldots+(3k-2)]+[3(k+1)-2] = \text{(αντικαθιστώ από (1))}$$

$$\frac{k\cdot(3k-1)}{2}+3(k+1)-2 = \frac{k\cdot(3k-1)+6(k+1)-4}{2}$$

$$= \frac{3k^2-k+6k+6-4}{2} = \frac{3k^2+5k+2}{2}$$

Άρα $1+4+7+\ldots+[3(k+1)-2] = \frac{3k^2+5k+2}{2}$ (2)

~~Επίσης~~ Επίσης $\frac{(k+1)[3(k+1)-1]}{2} = \frac{3(k+1)^2-k-1}{2}$

$= \frac{3k^2+6k+3-k-1}{2}$

$$\boxed{\frac{(k+1)[3(k+1)-1]}{2} = \frac{3k^2+5k+2}{2}} \quad (3)$$

Από σχέσεις (2) και (3):

$$1+4+7+\dots+[3(k-1)-2] = \frac{(k+1)[3(k+1)-1]}{2}.$$

άρα η $P(k+1)$ ισχύει, δηλ. αποδείχθηκε η $P(n)$, για κάθε $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 6: Να αποδείξετε χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, ο ακέραιος $2n^3+3n^2+n$ διαιρείται ακριβώς με το 6, δηλαδή ότι $2n^3+3n^2+n = 6m$, m φυσικός.

Λύση: 1. Βασικό βήμα: Ελέγχω $P(1)$:

Για $n=1$ $2n^3+3n^2+n = 2\cdot1+3\cdot1+1 = 6$. άρα διαιρείται με το 6.

2. Επαγωγική Υπόθεση: Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n=k$, δηλαδή

$$\boxed{2k^3+3k^2+k = 6z} \ (1), \text{ όπου } z \text{ φυσικός.}$$

3. Επαγωγικό Βήμα: Θα δείξω ότι ισχύει και για $k+1$, δηλαδή ότι $2(k+1)^3+3(k+1)^2+(k+1) = 6p$, όπου p φυσικός.

$2(k+1)^3+3(k+1)^2+(k+1) =$

$2(k^3+3k^2+3k+1)+3(k^2+2k+1)+k+1 =$

$= 2k^3+6k^2+6k+2+3k^2+6k+3+k+1 =$

$2k^3+9k^2+13k+6 =$

$(2k^3+3k^2+k)+(6k^2+12k+6) =$

4)

Αντικαθιστώ από (1):

$$6z + 6(k^2+2k+1)$$. Θέτω $k^2+2k+1 = b$, φυσ

άρα: $2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + (k+1) = 6z + 6b$

$$= 6(z+b)$$

$$= 6m$$

άρα διαιρείται ακριβώς με το 6.

Άρα αποδείχθηκε ότι ισχύει για κάθε ακέραιο $n \geq 1$.

Άσκηση 7: Αποδείξτε επαγωγικά ότι για κάθε $n>0$, ο 3^n-1 είναι άρτιος.

Λύση: 1. Βασικό Βήμα: Για $n=1$ έχω

$3^1-1=2$, άρτιος, άρα ισχύει

2. Επαγωγική Υπόθεση: Έστω ότι ισχύει για $n=k$.

δηλαδή $\boxed{3^k-1=2m}$ (1) για κάποιο $m \in N$.

3. Επαγωγικό Βήμα: Θα δείξω ότι ισχύει για $n=k+1$, δηλαδή ότι ο $3^{k+1}-1$ είναι άρτιος.

$$3^{k+1}-1 =$$

$$3 \cdot 3^k - 1 =$$

$$(2+1)3^k - 1 =$$

$2 \cdot 3^k + (3^k-1)$ Αντικαθιστώ (1):

$2 \cdot 3^k + 2m = 2 \cdot (3^k+m)$, άρα άρτιος.

Άρα αποδείχθηκε.