①

Επανάληψη Θεωρίας Διαιρετότητας

1) <u>Θεώρημα Ευκλείδειας Διαίρεσης</u>: Αν α, β ακέραιοι με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι κ και υ, έτσι ώστε:

$$\alpha = \kappa \cdot \beta + \upsilon, \quad \text{με} \quad 0 \leq \upsilon < |\beta|$$

2) <u>Τέλεια Διαίρεση</u>: Αν το υπόλοιπο της Ευκλείδειας Διαίρεσης είναι ίσο με το 0, τότε η διαίρεση λέγεται τέλεια.

3) <u>Άρτιος - Περιττός</u>: Η διαίρεση ακεραίου α με το 2 δίνει υπόλοιπο $\upsilon = 0$ ή $\upsilon = 1$:

- Όταν $\upsilon = 0$, τότε $\alpha = 2\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, και α άρτιος.
- Όταν $\upsilon = 1$, τότε $\alpha = 2\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, και α περιττός.

4) <u>Δυνατές τιμές υπολοίπου</u>:

$\upsilon = 0, 1, 2, \ldots, |\beta| - 1$, όπου β ο διαιρέτης.

5) <u>Ορισμός</u>: Θα λέμε ότι ο ακέραιος $\beta \neq 0$ διαιρεί τον ακέραιο α, και θα γράφουμε $\beta | \alpha$, όταν η διαίρεση του α με τον β είναι τέλεια δηλαδή όταν $\alpha = \kappa \cdot \beta$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

6) <u>Ισοδύναμες εκφράσεις</u>:

$\beta | \alpha \iff \beta$ διαιρεί α

ο β είναι διαιρέτης ή παράγοντας του α

ο α διαιρείται με τον β

ο α είναι πολλαπλάσιο του β.

$\alpha = \pi o \lambda \beta$.

$\alpha = \beta \cdot \lambda$, όπου λ ακέραιος.

7) Δείτε ιδιότητες διαιρετότητας + αποδείξεις από Θεωρία.

8) <u>Παράδειγμα Ευκλείδειας Διαίρεσης στο σύνολο των ακεραίων:</u>

Έστω ότι θέλω να διαιρέσω το -92 με το 5. ($\alpha=-92$ και $\beta=5$) και να βρω πηλίκο (κ) και υπόλοιπο (υ). ($\alpha=\kappa\cdot\beta+\upsilon \Rightarrow \underline{-92=5\kappa+\upsilon}$, θα πρέπει να φτιάχω σε αυτή τη μορφή για να βρω τα κ,υ)

<u>ΒΗΜΑΤΑ:</u> α) Γράφω ταυτότητα ευκλ. διαιρ. $92:5$ (θετικοί όροι)

$$92=5\cdot 18+2.$$

β) Πολ/ζω και τα 2 μέλη με -1:

$$-92=-5\cdot 18-2.$$

γ) Το υπόλοιπο <u>δεν</u> μπορεί να είναι αρνητικό, άρα αφαιρώ και προσθέτω το <u>διαιρέτη</u> ($\beta=5$) από την ταυτότητα:

$$-92=-5\cdot 18-5+5-2$$

δ) Βγάζω κοινό παράγοντα το -5, για να φέρω την ισότητα στη μορφή $\alpha=\kappa\cdot\beta+\upsilon$:

$$-92=-5(18+1)+5-2$$

$$-92=-5\cdot 19+3$$

$$-92=5\cdot(-19)+3$$

Άρα το πηλίκο $\kappa=-19$ και το υπόλοιπο $\upsilon=3$.

<u>Άσκηση 1</u>: Να αποδείξετε ότι:

α) το άθροισμα δύο άρτιων είναι άρτιος

β) το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος

γ) το άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού είναι περιττός

δ) το τετράγωνο ενός άρτιου είναι άρτιος

ε) το τετράγωνο ενός περιττού είναι περιττός.

<u>Λύση</u>:

α) Έστω $\alpha=2\kappa$ και $\beta=2\lambda$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{Z}$.

$\alpha+\beta=2\kappa+2\lambda=2\cdot(\kappa+\lambda)=2\mu$, άρα άρτιος.

($\mu=\kappa+\lambda$ ακέραιος, $\mu\in\mathbb{Z}$)

②

β) έστω $\gamma = 2\mu + 1$ και $\delta = 2\rho + 1$, με $\mu, \rho \in Z$.

$\gamma + \delta = 2\mu + 1 + 2\rho + 1 = 2\mu + 2\rho + 2 = 2(\mu + \rho + 1)$. Θέτω $\mu + \rho + 1 = \kappa \in Z$

άρα $\gamma + \delta = 2\kappa$, άρτιος.

γ) Έστω $\alpha = 2\kappa$ και $\gamma = 2\mu + 1$.

$\alpha + \gamma = 2\kappa + 2\mu + 1 = 2(\kappa + \mu) + 1$. Θέτω $\kappa + \mu = \lambda \in Z$

άρα $\alpha + \gamma = 2\lambda + 1$, περιττός.

δ) έστω $\alpha = 2\kappa$.

$\alpha^2 = (2\kappa)^2 = 4\kappa^2 = 2\cdot(2\kappa^2)$. Θέτω $\lambda = 2\kappa^2, \in Z$.

άρα $\alpha^2 = 2\lambda$ άρτιος.

ε) Έστω $\gamma = 2\mu + 1$.

$\gamma^2 = (2\mu + 1)^2 = 4\mu^2 + 4\mu + 1 = 2\cdot(2\mu^2 + 2\mu) + 1$.

Θέτω $2\mu^2 + 2\mu = \lambda \in Z$.

Άρα $\gamma^2 = 2\lambda + 1$, περιττός.

Άσκηση 2

Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο αριθμό α, ο αριθμός $A = \alpha^2 + \alpha + 1$ είναι περιττός.

Λύση. Θα πάρω περιπτώσεις για το α.

- Όταν ο α είναι άρτιος, δηλαδή $\alpha = 2\kappa, \kappa \in Z$

$$A = \alpha^2 + \alpha + 1 = (2\kappa)^2 + 2\kappa + 1$$
$$= 4\kappa^2 + 2\kappa + 1$$
$$= 2\cdot(2\kappa^2 + \kappa) + 1. \quad \text{Θέτω } 2\kappa^2 + \kappa = \lambda \in Z.$$
$$= 2\lambda + 1, \text{ άρα } A \text{ περιττός.}$$

- Όταν ο α είναι περιττός, δηλαδή $\alpha = 2\kappa + 1$, $\kappa \in Z$.

$$A = \alpha^2 + \alpha + 1 = (2\kappa + 1)^2 + (2\kappa + 1) + 1$$
$$= 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 + 2\kappa + 1 + 1$$
$$= 4\kappa^2 + 6\kappa + 2 + 1$$
$$= 2\cdot(2\kappa^2 + 3\kappa + 1) + 1. \quad \text{Θέτω } 2\kappa^2 + 3\kappa + 1 = \lambda \in Z.$$
$$= 2\lambda + 1, \text{ άρα ο } A \text{ περιττός.}$$

Άσκηση 3: Δείξτε ότι ο αριθμός $\lambda(\lambda^2+2), \lambda \in \mathbb{Z}$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση:

Θα είναι $\lambda = 3\kappa$ ή $\lambda = 3\kappa+1$ ή $\lambda = 3\kappa+2$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

• Όταν $\lambda = 3\kappa$:

$\lambda(\lambda^2+2) = 3\kappa \cdot [(3\kappa)^2+2] =$

$= 3\kappa \cdot (9\kappa^2+2)$. Θέτω $\kappa(9\kappa^2+2) = \mu$, $\mu \in \mathbb{Z}$

$= 3\mu$, άρα πολλαπλάσιο του 3.

• Όταν $\lambda = 3\kappa+1$:

$\lambda(\lambda^2+2) = (3\kappa+1) \cdot [(3\kappa+1)^2+2] =$

$= (3\kappa+1) \cdot (9\kappa^2+6\kappa+1+2) =$

$= 3 \cdot (3\kappa+1) \cdot (3\kappa^2+2\kappa+1)$.

$= 3\rho$, $\rho \in \mathbb{Z}$, άρα πολλαπλάσιο του 3.

• Όταν $\lambda = 3\kappa+2$.

$\lambda(\lambda^2+2) = (3\kappa+2) \cdot [(3\kappa+2)^2+2]$

$= (3\kappa+2)[9\kappa^2+6\kappa+4+2]$

$= (3\kappa+2)(9\kappa^2+6\kappa+6)$

$= 3 \cdot (3\kappa+2)(3\kappa^2+2\kappa+2)$

$= 3\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$, άρα πολ/σιο του 3.

Άσκηση 4: Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \kappa-1$ και $\beta = 5\kappa+6$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Να δείξετε ότι:

i) Αν ο α είναι άρτιος, τότε ο β είναι περιττός.

ii) $11 \mid (3\beta - 4\alpha)$.

Λύση

(i) Έστω $\alpha = 2\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Τότε: από εκφώνηση $\alpha = \kappa-1$, αντικαθιστώ:

$2\lambda = \kappa - 1 \Leftrightarrow \kappa = 2\lambda+1$ (1)

Αντικαθιστώ την σχέση (1) στην $\beta = 5\kappa+6$, $\Rightarrow$

$\beta = 5 \cdot (2\lambda+1)+6 =$

$= 10\lambda+5+6$

$= 10\lambda+10+1$

$= 2 \cdot (5\lambda+5)+1$. Θέτω $\mu = 5\lambda+5$, $\in \mathbb{Z}$.

$= 2\mu+1$, περιττός.

③

ii) Πρέπει να δείξω ότι $11|(3\beta-4\alpha)$ ή αλλιώς, ότι το $3\beta-4\alpha$ είναι πολλαπλάσιο του 11, ή ότι $3\beta-4\alpha=11\lambda,\ \lambda\in\mathbb{Z}$.

$$
\begin{aligned}
3\beta-4\alpha &= 3\cdot(5\kappa+6)-4(\kappa-1)\\
&=15\kappa+18-4\kappa+4\\
&=11\kappa+22.\\
&=11(\kappa+2)=11\lambda. \quad (\text{όπου } \lambda=\kappa+2,\ \lambda\in\mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

Άσκηση 5: Αν οι ακέραιοι $\alpha+3$ και $30-\beta$ διαιρούνται με το 9, να αποδείξετε ότι και ο $\alpha+\beta$ διαιρείται με το 9.

Λύση:

Από εκφώνηση ξέρω ότι $9|\alpha+3$ και $9|30-\beta$, και πρέπει να αποδείξω ότι $9|\alpha+\beta$.

- $9|\alpha+3 \Rightarrow \alpha+3=9\kappa,\ \kappa\in\mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{\alpha=9\kappa-3.}\ (1)$

- $9|30-\beta \Rightarrow 30-\beta=9\lambda,\ \lambda\in\mathbb{Z}.\ \boxed{\beta=30-9\lambda}\ (2).$

Από (1) και (2):
$$
\begin{aligned}
\alpha+\beta &= 9\kappa-3+30-9\lambda\\
&=9\kappa-9\lambda+27\\
&=9\cdot(\kappa-\lambda+3) \rightarrow \text{Θέτω } \mu=\kappa-\lambda+3,\ \mu\in\mathbb{Z}.\\
\alpha+\beta &= 9\mu. \Rightarrow \boxed{9|(\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

Παραδείγματα ανάλυσης σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

α)

2520	2
1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Άρα $2520=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$

1512	2
756	2
378	2
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

Άρα $1512=2^3\cdot3^3\cdot7$

1980	2
990	2
495	3
165	3
55	5
11	11
1	

Άρα $1980=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot11$

β)

228	2
114	2
57	3
19	19
1	

Άρα: $228 = 2^2 \cdot 3 \cdot 19$.

189	3
63	3
21	3
7	7
1	

Άρα: $189 = 3^3 \cdot 7$.

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

Άρα $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

Άσκηση: Με βάση την προηγούμενη ανάλυση, να υπολογίσετε:
i) ΕΚΠ (2520, 1512, 1980) και ΜΚΔ (2520, 1512, 1980)
ii) ΕΚΠ (228, 189, 300) και ΜΚΔ (228, 189, 300)

Λύση:

Αφού έχει γίνει η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, για να βρω το ΜΚΔ: παίρνω μόνο κοινούς παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη και για το ΕΚΠ παίρνω κοινούς και μη κοινούς με το μεγαλύτερο εκθέτη

i) άρα $ΜΚΔ(2520, 1512, 1980) = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$.
και $ΕΚΠ(2520, 1512, 1980) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 83.160$.

ii) $ΜΚΔ(228, 189, 300) = 3$
$ΕΚΠ(228, 189, 300) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 19 \cdot 7 \cdot 5^2 = 359.100$