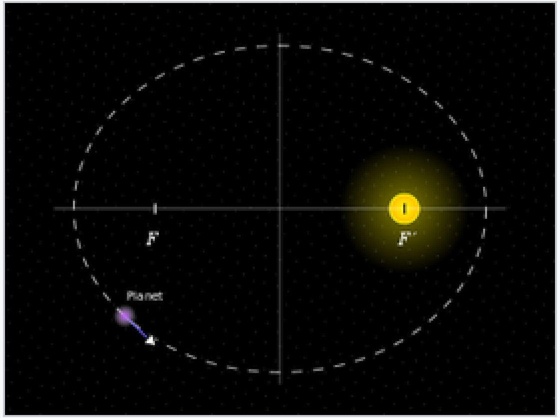
Μαθηματικά: Γεωμετρικοί τόποι

Γεωμετρικός τόπος (γ.τ.)

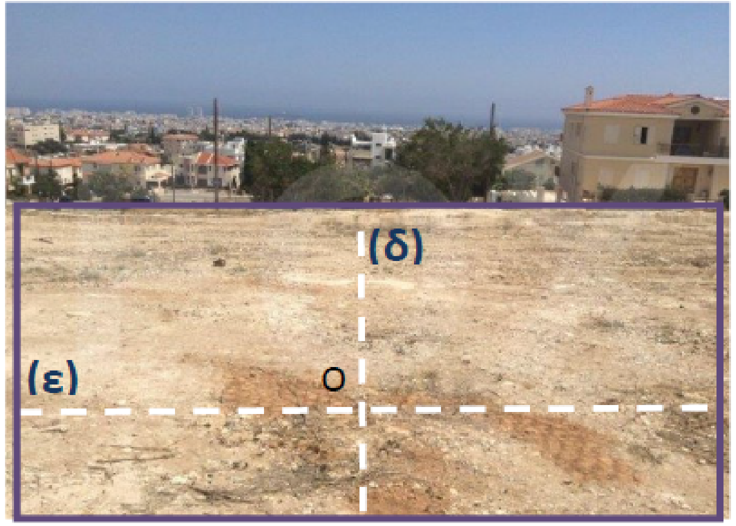
- Γεωμετρικός τόπος: αγγλική ονομασία locus/loci (plural)
- Προέρχεται από την λατινική λέξη locus που σημαίνει περιοχή.
- **Γεωμετρικός τόπος** είναι ένα γεωμετρικό σχήμα του οποίου τα σημεία, *και μόνον αυτά*, ικανοποιούν μία κοινή γεωμετρική ιδιότητα Ρ.



Η τροχιά ενός σώματος γύρω από ένα άλλο στο διάστημα είναι ένας γεωμετρικός τόπος, το οποίο προκύπτει από τη δύναμη της βαρύτητας.

https://el.wikiversity.org/wiki/%CE%93%CE%B5%CF%89%CE%BC%CE%B5%CF%84%CF%81%CE%B9%CE%BA%CE%BF%CE%AF_%CF%84%CF%8C%CF%80%CE%BF%CE%B9

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα



Στη διπλανή εικόνα φαίνεται ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $28m \times 15m$, στο οποίο πρόκειται να ανεγερθεί οικοδομή. Οι μεσοκάθετοι (ε) και (δ) των πλευρών του τέμνονται στο σημείο O.

Οι τέσσερις βάσεις για τις γωνιακές δοκούς της οικοδομής θα πρέπει να τοποθετηθούν στα σημεία του οικοπέδου που απέχουν από την ευθεία (ε) $5m$ και από το κέντρο O του οικοπέδου $7m$

α) Να βρείτε ένα πρακτικό τρόπο με τον οποίο ο εργολάβος της οικοδομής μπορεί να προσδιορίσει τις τέσσερις θέσεις για τις βάσεις των δοκών.

β) Να διερευνήσετε αν τα σημεία αυτά που ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες είναι μοναδικά και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- Να περιγράψετε και να εξηγήσετε τη λύση του προβλήματος
- Σε ποιες γεωμετρικές έννοιες στηριχθήκατε για την εύρεση της θέσης των γωνιακών δοκών;

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην Ευκλείδεια Γεωμετρία παρουσιάζουν προβλήματα του τύπου: « Να προσδιορίσετε ένα σύνολο σημείων (σημειοσύνολο) του οποίου κάθε στοιχείο (σημείο) ικανοποιεί μια δεδομένη συνθήκη (ιδιότητα) Ι ή και περισσότερες.» Η επίλυση αυτών των προβλημάτων συνίσταται στον προσδιορισμό της μορφής αυτού του σημειοσυνόλου *G* στο επίπεδο ή στο χώρο, με την βοήθεια άλλων γνωστών σχημάτων ή γραμμών των οποίων γνωρίζουμε τις ιδιότητες και μπορούμε να τα κατασκευάσουμε. Αυτά τα προβλήματα λέμε, ότι είναι προβλήματα **γεωμετρικών τόπων** και με αυτά θα ασχοληθούμε στην ενότητα αυτή.

Ιστορικό Σημείωμα

Στην Ακαδημία του Πλάτωνα στην Αρχαία Αθήνα (430 – 347 π.Χ) αναπτύχθηκαν κατ' αρχάς οι γεωμετρικοί τόποι, σε συνδυασμό με την αναλυτική-συνθετική μέθοδο απόδειξης γεωμετρικών και όχι μόνο προβλημάτων.

Αργότερα, όμως, ο «μέγας Γεωμέτρης» Απολλώνιος ο Περγαίος ασχολήθηκε με τους Γεωμετρικούς τόπους πιο συστηματικά. Ο Απολλώνιος έγραψε δύο βιβλία με τίτλο «Επίπεδοι τόποι», τα οποία δυστυχώς δεν σώζονται. Στα βιβλία αυτά ο Απολλώνιος αναφέρεται στην εύρεση του γεωμετρικού τόπου ενός σημείου στο επίπεδο, σε πολλές περιπτώσεις, αν ο τόπος είναι ευθεία γραμμή ή περιφέρεια.

- Αναφέρετε παραδείγματα γεωμετρικών τόπων που γνωρίζετε

Τι σημαίνει γεωμετρικός τόπος;

Γεωμετρικός τόπος ονομάζεται κάθε σημειοσύνολο G του οποίου **όλα τα σημεία και μόνο αυτά** έχουν μια δεδομένη ιδιότητα I.

- Η φράση «όλα τα σημεία του συνόλου και μόνο αυτά» έχει διπλή σημασία:
- I. **Όλα τα σημεία του γεωμετρικού τόπου ικανοποιούν την δεδομένη ιδιότητα.**
- **II. Όλα τα σημεία που ικανοποιούν την δεδομένη ιδιότητα βρίσκονται πάνω στο γεωμετρικό τόπο**

Από το σχολικό βιβλίο του Σπ. Κανέλου (1976)

17. Γεωμετρικὸς τόπος.—α΄) Καλεῖται «γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἐχόντων μίαν δεδομένην ἰδιότητα (Α)» *(ἢ πληρούντων μίαν συνθήκην (Α))* **τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ τὸ $\boxed{\text{σύνολον}}$ τῶν σημείων τῶν ἐχόντων τὴν δεδομένην ἰδιότητα (Α).**

Κατὰ κανόνα ὑπάρχουν ἄπειρα τὸ πλῆθος σημεῖα κατέχοντα τὴν ἰδιότητα (Α) καὶ ταῦτα συνιστοῦν σχῆμά τι Ε, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ γεωμετρικός των τόπος. (Συντόμως γ.τ. ἢ «τόπος»).

— Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ F εἶναι ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν ἐχόντων τὴν ἰδιότητα (Α), ἂν δείξωμεν ὅτι:

1ον) πᾶν σημεῖον τοῦ F ἔχει τὴν ἰδιότητα Α καὶ

2ον) πᾶν σημεῖον μὴ ἀνῆκον εἰς τὸ F δὲν ἔχει τὴν ἰδιότητα (Α).

Διότι τὸ 1ον) ἐξασφαλίζει ὅτι $F \subseteq E$ καὶ τοῦτο συνεπάγεται:

(3) $$F' \supseteq E'$$

ὅπου F', E' τὰ συμπληρωματικὰ τῶν F, E ὡς πρὸς τὸ ὅλον ἐπίπεδον.

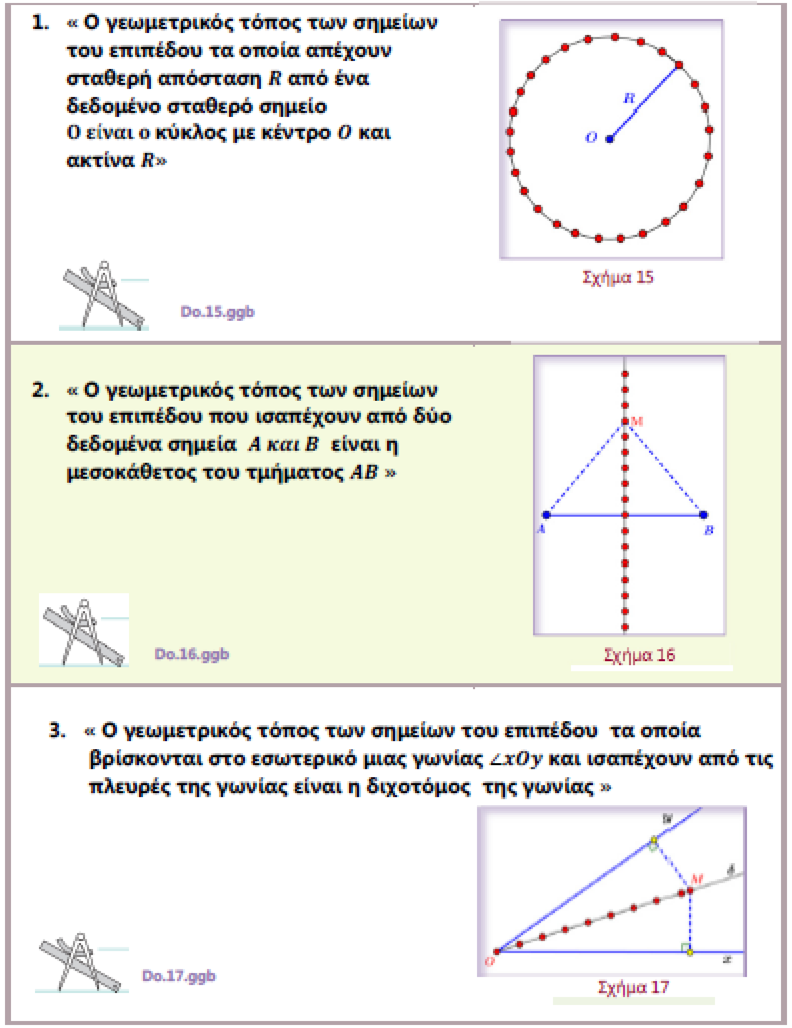
Τὸ 2ον) σημαίνει:

(4) $$F' \subseteq E'$$

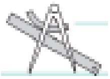
Ἐκ τῶν (3) $\wedge$ (4) $\Rightarrow F' \equiv E' \Rightarrow F \equiv E$.

Στοιχειώδεις γεωμετρικοί τόποι

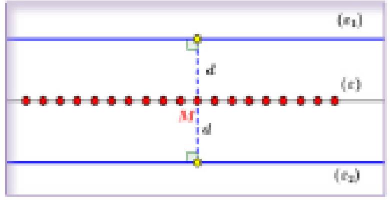
- Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων **που απέχουν από ένα σταθερό σημείο ίση απόσταση είναι κύκλος** με κέντρο το σταθερό σημείο και ακτίνα την απόσταση αυτή.
- **Η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος** είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος (ευθύ και αντίστροφο)
- **Η διχοτόμος της γωνίας είναι ο γεωμετρικός** τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της (ευθύ και αντίστροφο)



4. « Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες (ε_1) *και* (ε_2) είναι η μεσοπαράλληλος (ε) των δύο ευθειών»

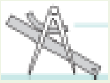


Do.18.ggb

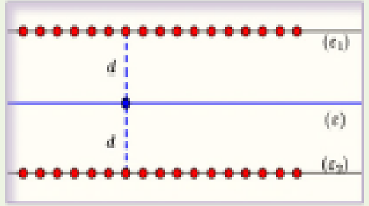


Σχήμα 18

5. « Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία απέχουν απόσταση d από μια ευθεία (ε) του επιπέδου είναι δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) παράλληλες προς την (ε) και σε απόσταση d από αυτήν.»



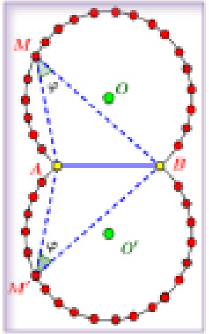
Do.19.ggb



Σχήμα 19

6. «Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου από τα οποία φαίνεται το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ υπό γνωστή γωνία ∠φ, είναι δύο τόξα συμμετρικά ως προς την *ΑΒ* που δέχονται γωνία ίση με ∠φ»

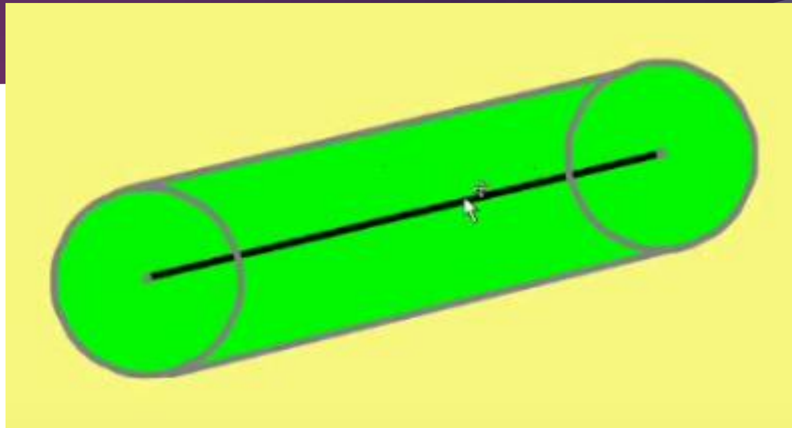
Αν $\overset{\frown}{AMB}$ είναι ένα τόξο κύκλου που έχει χορδή την ΑΒ και διέρχεται από το Μ, τότε λέμε ότι το τόξο $\overset{\frown}{AMB}$ δέχεται γωνία ∠φ.



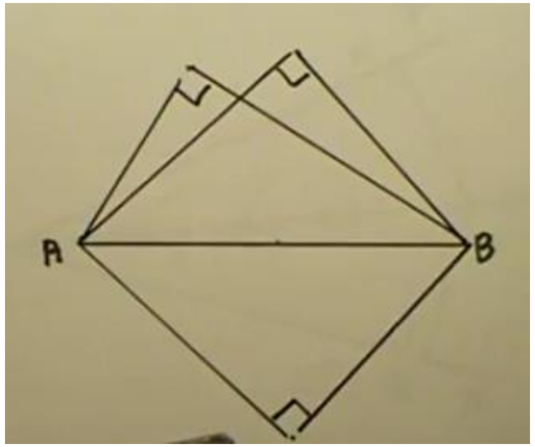
Σχήμα 20

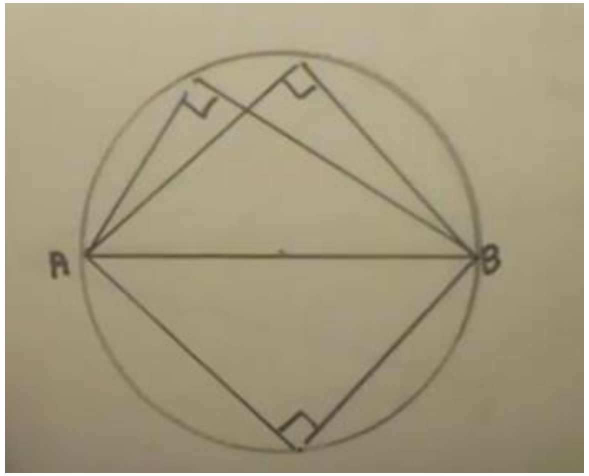
Απλά προβλήματα γ.τ.

- Ποιος είναι ο γ.τ. των σημείων που απέχουν το πολύ 2m από σταθερό ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.



- Ποιος είναι ο γ.τ. των σημείων που βλέπουν δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα υπό γωνία 90 μοιρών.





ΕΥΡΕΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΠΟΥ (γ.τ.)

- **Βασικά βήματα**
- **Α) Αναζήτηση/πιθανολόγηση του γεωμετρικού τόπου**
- **Β) Εύρεση του γ.τ.**

- **ΣΧΟΛΙΟ**
- Σε κάθε πρόβλημα εύρεσης γ.τ. δίνονται πάνω στο επίπεδο ένα ή περισσότερα **σταθερά στοιχεία** (*σημεία, γωνίες, ευθύγραμμα τμήματα, κτλ*) στα οποία πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη σημασία και να διακρίνονται στο σχήμα.

Τα προβλήματα των γεωμετρικών τόπων στην Ευκλείδεια Γεωμετρία έχουν την εξής δομή:

- Δίνεται μια χαρακτηριστική **ιδιότητα** I
- Ζητείται, να προσδιορισθεί το **σημειοσύνολο** που δημιουργεί το **μεταβλητό σημείο** M, καθώς κινείται πάνω στο επίπεδο, κάτω από τη δεδομένη ιδιότητα I , δηλαδή ικανοποιώντας σε κάθε θέση του την ιδιότητα-συνθήκη I.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΠΟΥ

α) Πιθανολόγηση του Γεωμετρικού τόπου

Για την εύρεση του γεωμετρικού τόπου, διευκολύνει πολύ να γνωρίζουμε αν ο γεωμετρικός τόπος θα βρίσκεται πάνω σε ευθεία ή σε κύκλο ή σε οποιοδήποτε άλλο γεωμετρικό σχήμα.

Για να ¨πιθανολογήσουμε¨ το σχήμα του γεωμετρικού τόπου παίρνουμε μερικά **σημεία του επιπέδου,** που ικανοποιούν την ιδιότητα I.

Οι διαδοχικές θέσεις των σημείων αυτών θα μας υποδείξουν το είδος της γραμμής πάνω στην οποία θα βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος (ευθεία, περιφέρεια, κτλ.)

Η διαδικασία αυτή δεν αποτελεί απόδειξη, αλλά απλά μας βοήθα στην εύρεση του γεωμετρικού τόπου. Συνήθως στην επιπεδομετρία οι γεωμετρικοί τόποι είναι ευθείες (ή τμήματα ευθειών) ή κύκλοι (ή τόξα κύκλων).

Β) Εύρεση του γεωμετρικού τόπου

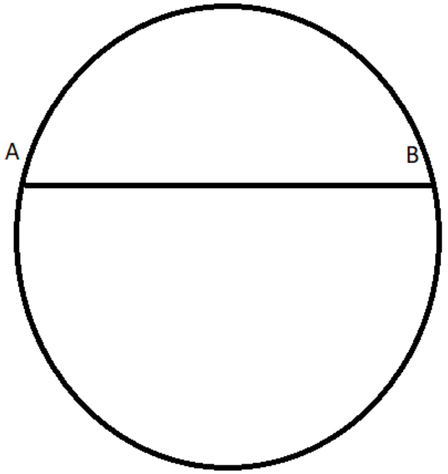
- Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Μ του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου και με βάση την ιδιότητα Ι που έχει, προσδιορίζουμε τη γραμμή G πάνω στην οποία βρίσκεται το σημείο αυτό.
- Κατασκευάζουμε με κανόνα και διαβήτη τη γραμμή G.
- Αποδεικνύουμε το αντίστροφο, δηλαδή παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο της γραμμής G και εξετάζουμε αν αυτό ικανοποιεί τη δεδομένη ιδιότητα Ι του γεωμετρικού τόπου.
- Διερεύνηση: Το αντίστροφο μπορεί να μην ισχύει γενικά, δηλαδή μπορεί να υπάρχουν σημεία του σημειοσυνόλου G που δεν επαληθεύουν την ιδιότητα Ι. Τότε, ο γεωμετρικός τόπος δεν θα είναι ολόκληρη η γραμμή, αλλά ένα μέρος της, το οποίο πρέπει να προσδιορίσουμε.

Πρόβλημα 1

- **Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.**

- Σταθερά στοιχεία του προβλήματος

- Σχεδιάζουμε πρόχειρα σχήματα ....



- Που πιθανολογείτε ότι θα βρίσκονται τα κέντρα Των κύκλων;

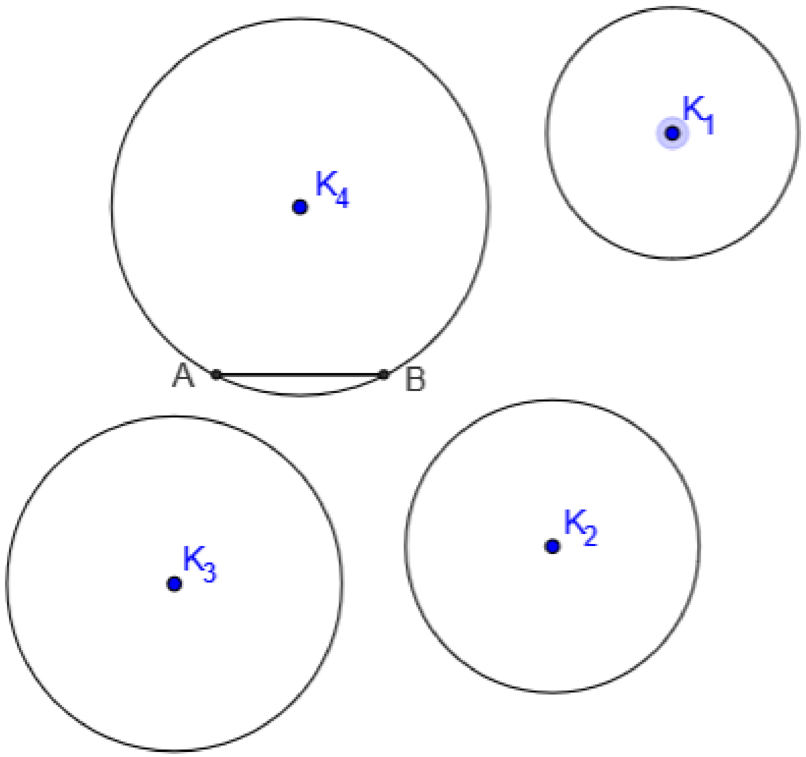
Εργασία στην τάξη:

Α) Πειραματιστείτε με το geobebra στην εύρεση γ.τ. στην παρακάτω ιστοσελίδα *(πειραματιστείτε, κάνετε εικασίες για τον ζητούμενο γ.τ.).*

http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-2295

Β) Στη συνέχεια προσπαθήστε να αποδείξετε αυτές τις εικασίες κάνοντας και την αντίστοιχη γεωμετρική κατασκευή.

Γ) ανεβάστε στο αρχείο στην eclass



Στο διπλανό σχήμα υπάρχουν 4 άνισοι κύκλοι και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μήκος 4.
Μετακινήστε τους κύκλους από τα κέντρα τους, ώστε να διέρχονται από τα Α και Β (όπως ο κύκλος με κέντρο K_4).
Αν θέλετε, μπορείτε με το δεύτερο εικονίδιο πάνω αριστερά να κατασκευάσετε και άλλους τέτοιους κύκλους. (Προσοχή! Για να διέρχεται ένας κύκλος από τα Α και Β, πρέπει η ακτίνα του να είναι τουλάχιστον το μισό του ΑΒ.)

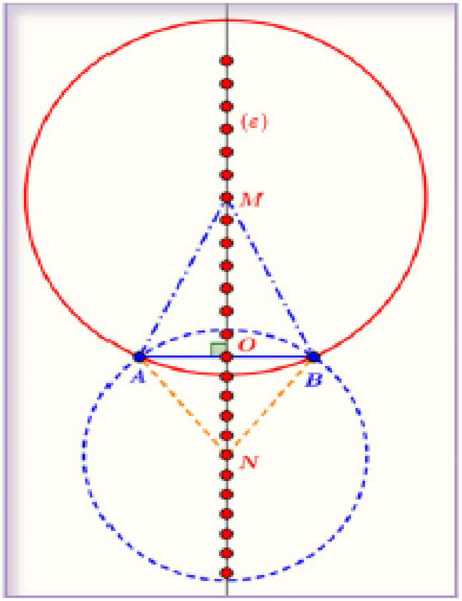
1) Τί μπορείτε να εικάσετε για το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων;
2) Επαληθεύστε τις εικασίες σας με τα άλλα εικονίδια και αιτιολογήστε τη απάντησή σας.
3) Με ποιον από τους γεωμετρικούς τόπους των ερωτήσεων κατανόησης ταυτίζεται;

☐ Βοήθεια

Πιθανολόγηση του Γεωμετρικού τόπου

Τα σταθερά στοιχεία του προβλήματος είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB και επομένως και το μέσον του. Ο κύκλος $(O,\frac{AB}{2})$ περνά από τα $A\ και\ B$. Άρα το σημείο O είναι σημείο του τόπου. Παίρνοντας μερικά σημεία του τόπου, πιθανολογούμε ότι τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται πάνω σε ευθεία που διέρχεται από το σημείο O.

Έστω M ένα σημείο του ζητούμενου τόπου, δηλαδή το M είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A\ και\ B$ **(Σχήμα 21)**.



Τότε, $MA = MB$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα, το σημείο M ανήκει στην **μεσοκάθετη** $(\boldsymbol{\varepsilon})$ του τμήματος AB.

Αντίστροφα, έστω N σημείο της μεσοκαθέτου (ε) του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Θα εξετάσουμε αν το σημείο $N \in (\varepsilon)$ έχει την ιδιότητα του γεωμετρικού τόπου.

Το N είναι σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος AB άρα $\boldsymbol{NA = NB}$.

Διερεύνηση

Το τυχαίο σημείο $N \in (\varepsilon)$ έχει την ιδιότητα του γεωμετρικού τόπου, συνεπώς όλα τα σημεία της (ε) ικανοποιούν την ιδιότητα αυτή.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο ζητούμενος **γεωμετρικός τόπος** είναι η **μεσοκάθετη** (ε) **του τμήματος** AB.

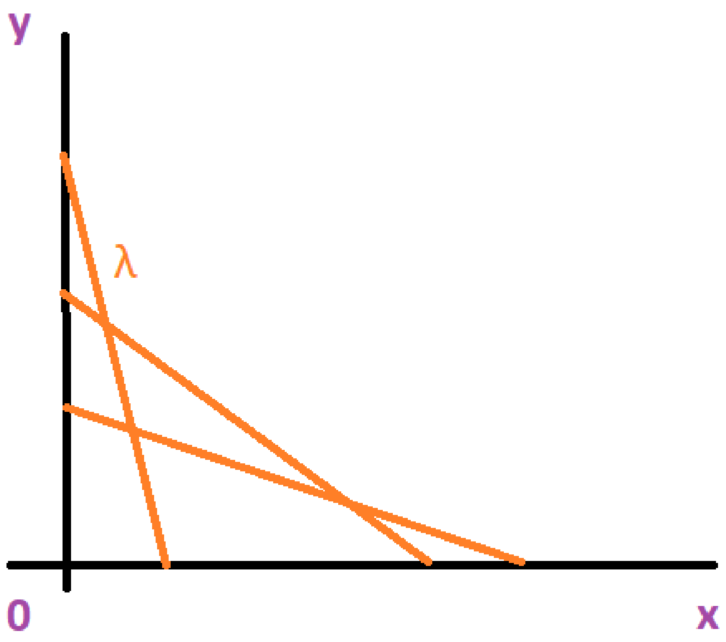
Do.21.ggb και show.21.ggb

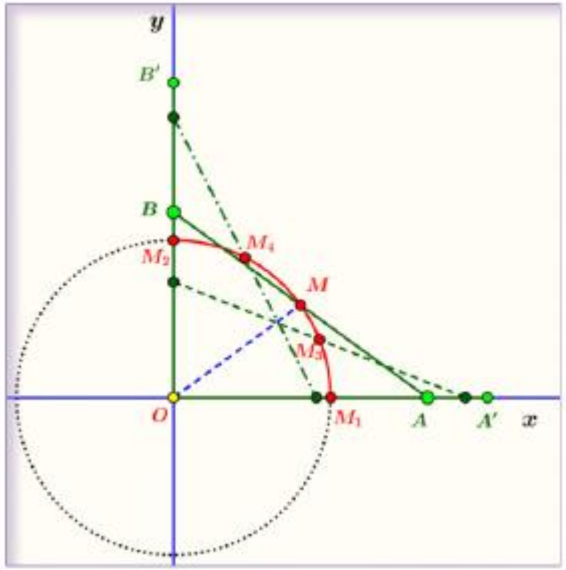
Πρόβλημα 2

- **Πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy παίρνουμε μεταβλητά σημεία A, B αντίστοιχα, έτσι ώστε AB = λ *σταθερό*. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου του AB.**

- Προσπαθήστε, κάνοντας διάφορα σχέδια

Να πιθανολογήσετε τον ζητούμενο γ.τ.





Πιθανολόγηση του Γεωμετρικού τόπου

Τα σταθερά στοιχεία του προβλήματος είναι το μήκος $AB = \lambda$ και το σημείο O. Παρατηρούμε ότι στο πρόβλημα αυτό έχουμε οριακές θέσεις για το ευθύγραμμο τμήμα AB.

- Αν $B \equiv O$ τότε το $A \equiv A'$ έτσι ώστε $OA' = \lambda$, **(Σχήμα 22)**. Τότε, το μέσον M_1 του OA' είναι σημείο του ζητούμενου τόπου.
- Αν $A \equiv O$ τότε το $B \equiv B'$ έτσι ώστε $OB' = \lambda$. Τότε, το μέσο M_2 του OB' είναι σημείο του ζητούμενου τόπου.

Παίρνοντας μερικές θέσεις ακόμη για το AB παρατηρούμε ότι τα μέσα του ανήκουν σε κύκλο.

Κατασκευή

Έστω ένα σημείο M του γεωμετρικού τόπου. Τότε $MA = MB$

Άρα το σημείο M είναι το μέσον της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου ΔAOB. Όμως ξέρουμε ότι

$$OM = \frac{AB}{2} = \frac{\lambda}{2} := \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$

Επομένως, το σημείο M βρίσκεται πάνω στον κύκλο $\left(O, \frac{\lambda}{2}\right)$.

Αντίστροφα

Παίρνουμε σημείο $M \in \left(O, \frac{\lambda}{2}\right)$. Θα δείξουμε ότι το σημείο αυτό είναι το μέσον ενός ευθυγράμμου τμήματος AB με μήκος λ με τα σημεία $A \; και \; B$ να ανήκουν αντίστοιχα στους ημιάξονες $Ox \; και \; Oy$.

Πράγματι, πάνω στην Ox παίρνουμε σημείο A τέτοιο ώστε $MO = MA = \frac{\lambda}{2}$.

(το σημείο A κατασκευάζεται ως εξής: φέρουμε από το M ευθεία (ε_1) κάθετη στην Ox. Το συμμετρικό του O ως προς την (ε_1) είναι το σημείο A)

Προεκτείνουμε την AM και έστω B το σημείο τομής της με την Oy. Τότε, θα έχουμε:

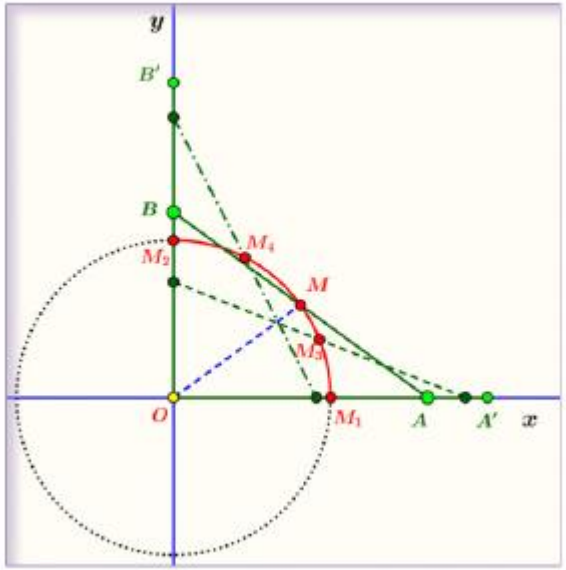
$\angle MOA = \angle MAO$ (αφού MO = MA το τρίγωνο ΔMOA είναι ισοσκελές)

Επομένως, $\angle MBO = \angle MOB$ (Συμπληρωματικές ίσων γωνιών)

Άρα, από το ισοσκελές τρίγωνο $\triangle MOB$ έχουμε

$$MB = MO \Longrightarrow \textit{το } M \textit{ είναι το μέσο του } AB \Longrightarrow AB = 2OM = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} \Longrightarrow AB = \lambda.$$

Επομένως, το ***M* είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου.**



Διερεύνηση

Ο γεωμετρικός τόπος ανήκει σε κύκλο $\left(O, \frac{\lambda}{2}\right)$ αλλά όπως είδαμε υπάρχουν οριακές θέσεις στο πρόβλημα, τα σημεία $M_1 \; και \; M_2$. Άρα ο **γεωμετρικός τόπος είναι το τόξο του κύκλου** με επίκεντρη γωνία 90° και ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο του ορθογωνίου συστήματος αξόνων.

Επίλυση προβλήματος με τη βοήθεια γ.τ.

- Η εταιρεία ‘Pizzamania’ στο Περιστέρι προσφέρει όλες της ποικιλίες Πίτσας με το ελάχιστο κόστος (delivery low cost zone) σε ακτίνα το πολύ 4χμ από το κατάστημά της στην περιοχή του Περιστερίου.

- Πώς θα ονομάζαμε μαθηματικά αυτό το ‘delivery low cost zone’ της εταιρείας ‘Pizzamania’;

Απ. Το σύνολο των σημείων της περιοχής Περιστερίου

που απέχουν το πολύ 4χμ από το κατάστημα.

Πώς θα βρίσκαμε αυτό το delivery low cost zone;

ΥΛΙΚΟ ΜΕΛΕΤΗΣ

- ΒΙΒΛΙΟ ΕΥΚΛΕΙΔΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ (ΥΛΗ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ)
- ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΥΠΡΟΥ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ, 7.3-7.6