①

Άσκηση 1: Να γίνει <u>διερεύνηση</u> και <u>κατασκευή</u> σε κάθε ένα από τα παρακάτω γεωμετρικά ζητήματα.

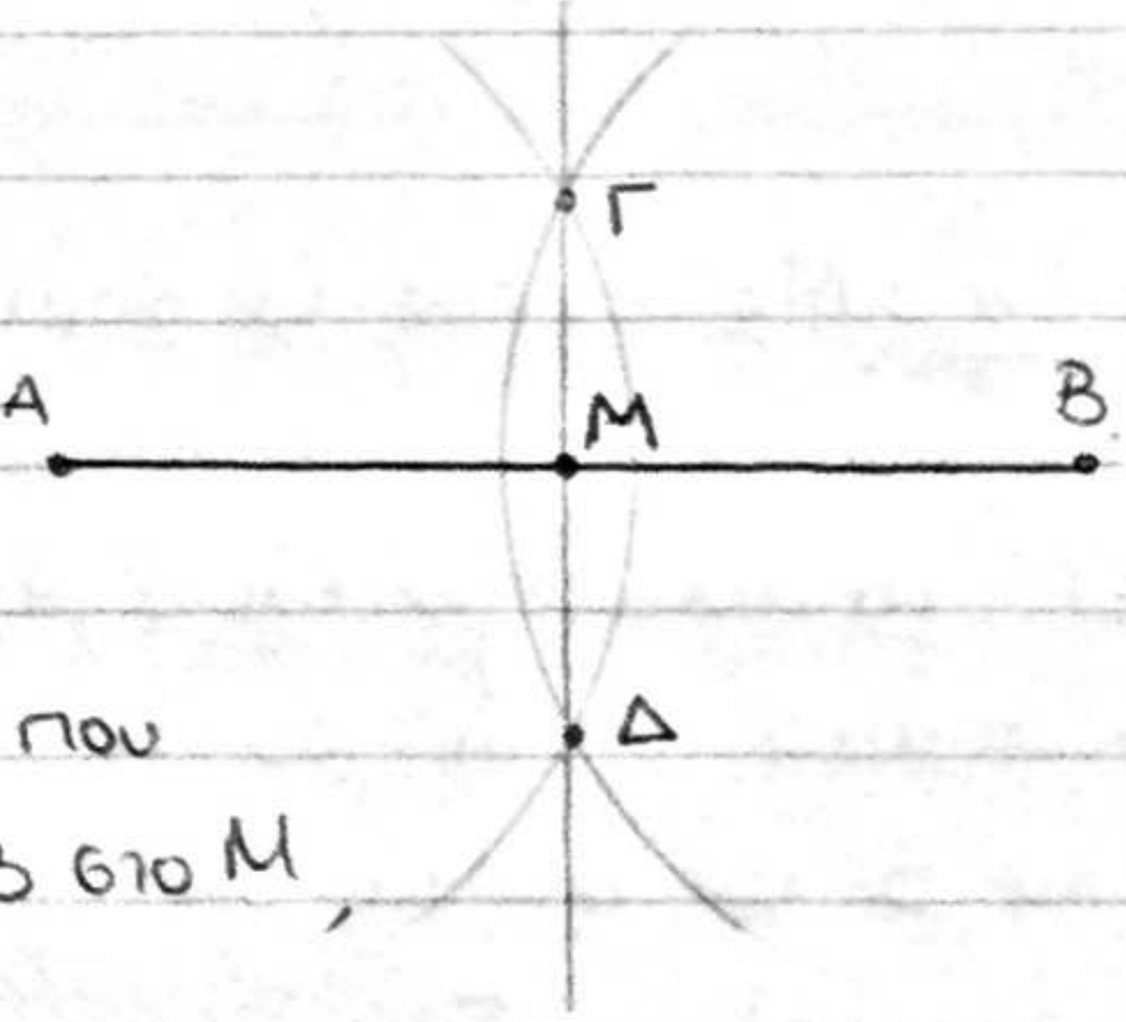
1. Μέσο δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος.
2. Ορθή γωνία
3. Παράλληλη προς τη δοθείσα ευθεία, που να διέρχεται από γνωστό σημείο.

<u>Λύση:</u>

Υπενθύμιση: <u>Κατασκευή</u> → Οι ενέργειες που οδηγούν στη σχεδίαση του σχήματος, με χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη

<u>Διερεύνηση</u> → Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε το πρόβλημα να έχει λύση.

1.1) <u>Κατασκευή</u>: Έστω τμήμα AB.
Με κέντρα τα A, B και ακτίνα $\rho > \frac{AB}{2}$, γράφω δύο ίσους κύκλους όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν Γ, Δ τα κοινά σημεία των κύκλων αυτών, τότε η ευθεία που ορίζουν τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα AB στο M, που είναι το μέσο του.

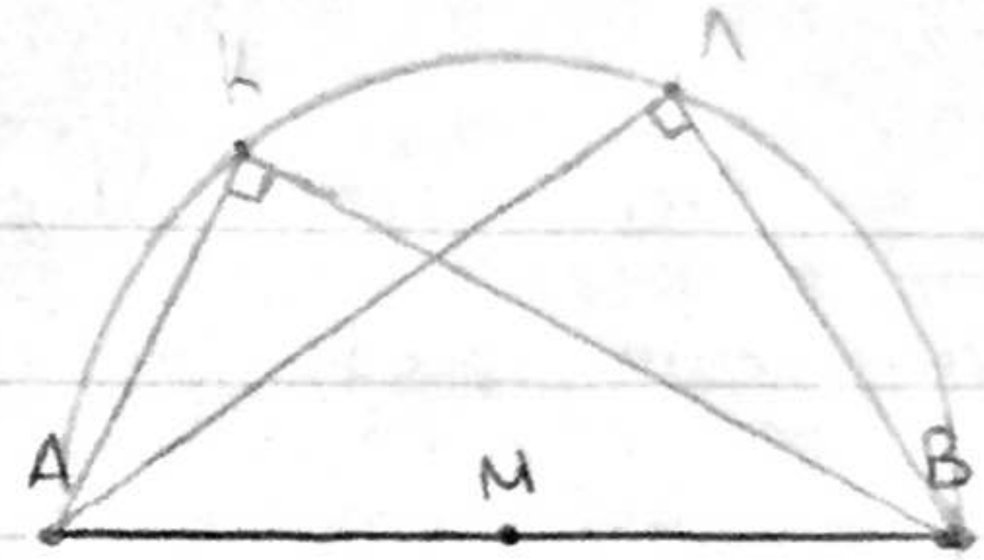


<u>Διερεύνηση</u>: Για να έχει το πρόβλημα λύση θα πρέπει οι κύκλοι (A, ρ) και (B, ρ) να τέμνονται. Ισχύει, γιατί η διάκεντρος AB ικανοποιεί τη σχέση: $\rho-\rho < AB < \rho+\rho$.

<u>Σημείωση</u>: Έστω δύο κύκλοι με ακτίνες R και ρ αντίστοιχα. Αυτοί οι κύκλοι τέμνονται - έχουν 2 κοινά σημεία - όταν για τη διάκεντρό τους, δηλαδή το ευθ τμήμα που ενώνει τα κέντρα τους, έστω δ, ισχύει:

$$R-\rho < \delta < R+\rho.$$

1.2) $1^{ος}$ τρόπος: Με βάση την κατασκευή 1.1. Η ευθεία που ορίζεται από το ΓΔ είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος AB, ~~δ~~ δηλαδή περνάει από το μέσο του και είναι κάθετη σε αυτό. Επομένως οι γωνίες $\hat{ΓMA}$ και $\hat{ΓMB}$ είναι ορθές



2ος τρόπος Κατασκευή:

Έστω ΑΒ ευθύγραμμο τμήμα και Μ το μέσο του. (το κατασκευάζω όπως στο 1.1).

Γράφω ημικύκλιο με κέντρο Μ και ακτίνα ΜΑ.

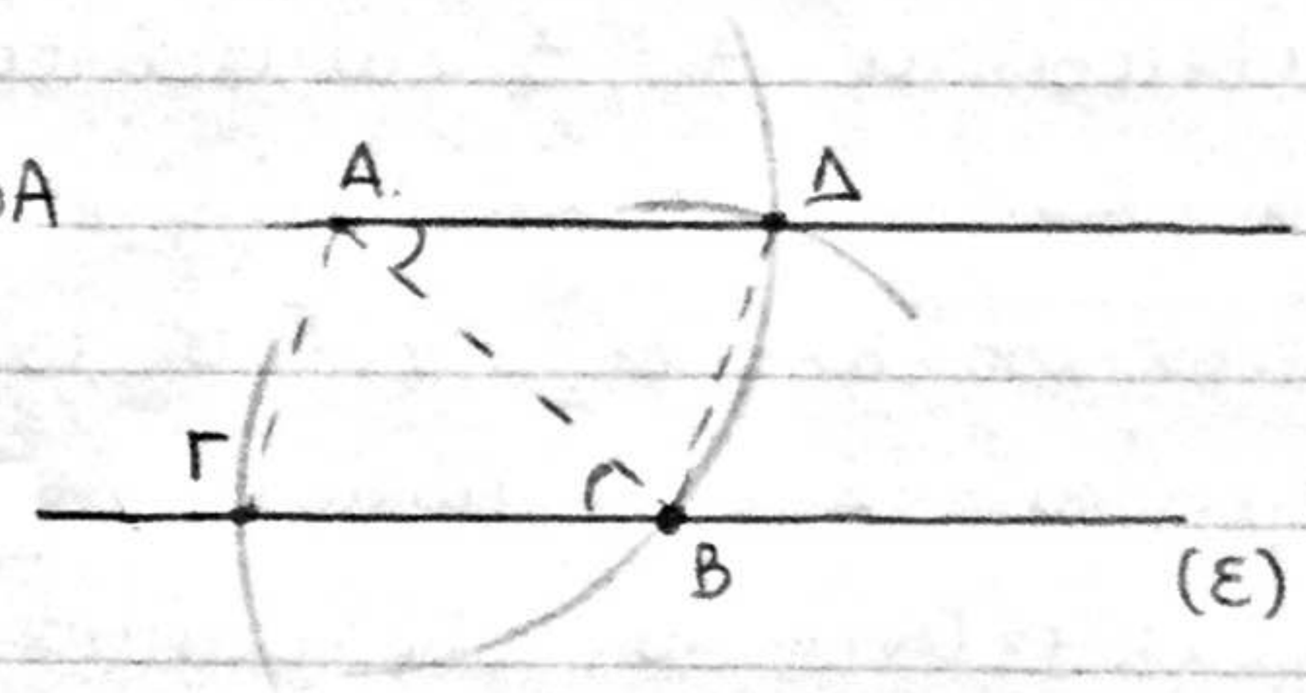
Επιλέγω ένα τυχαίο σημείο του ημικυκλίου (Κ) και το ενώνω με τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Η γωνία $A\hat{K}B$ που σχηματίζεται, είναι ορθή.

Απόδειξη: Γνωρίζουμε πως κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

1.3) Κατασκευή: Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ρ, μεγαλύτερη της απόστασης του σημείου Α από την (ε), κατασκευάζω κύκλο (Α, ρ)

Έστω Β το σημείο τομής του με την (ε).

Με κέντρο το Β και ακτίνα ΒΑ γράφω τόξο που τέμνει την (ε) στο Γ.

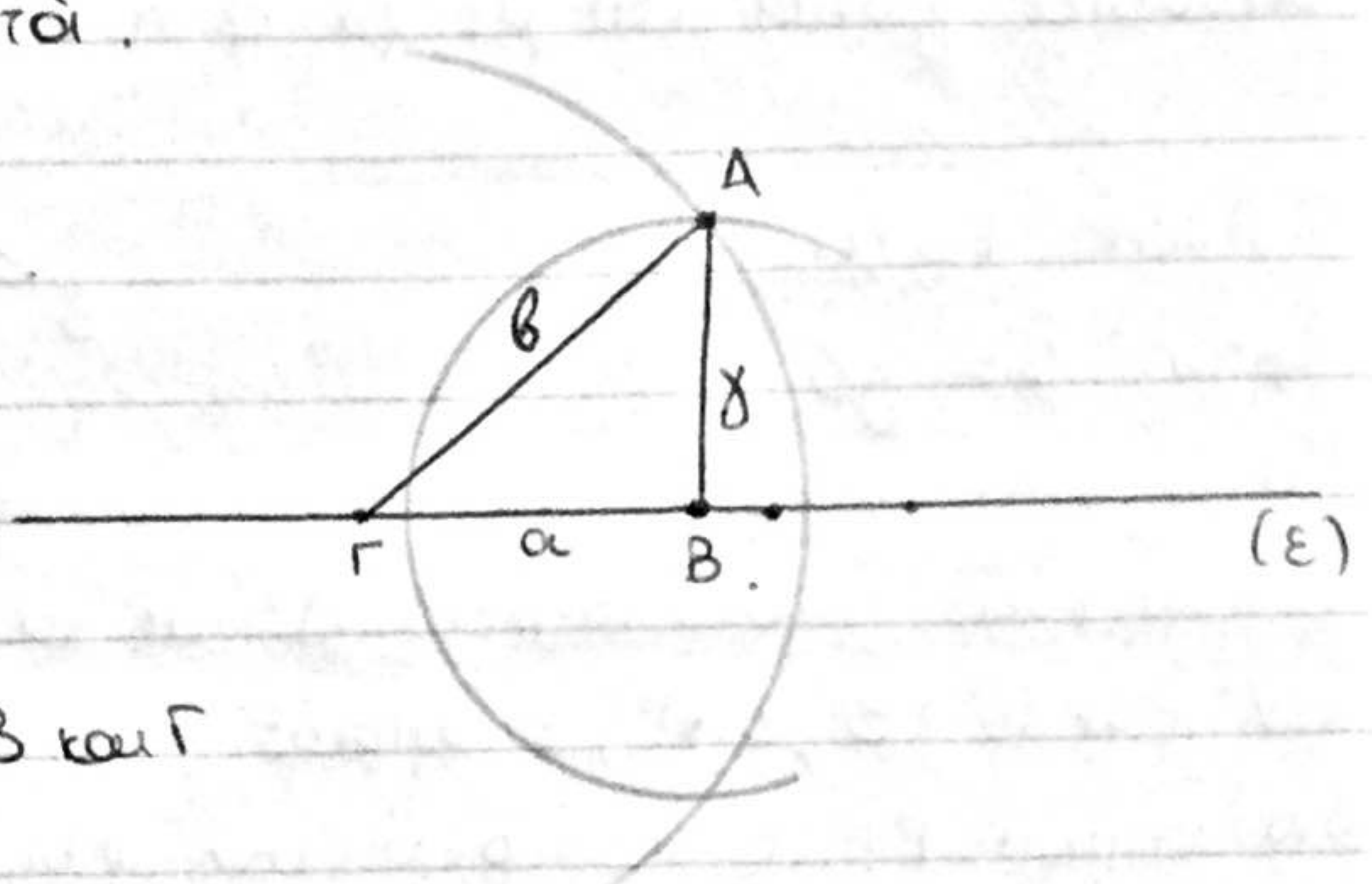


Στη συνέχεια με κέντρο το Β και ακτίνα ΑΓ γράφω τόξο που τέμνει τον κύκλο (Α, ρ) στο σημείο Δ. Η ευθεία που ορίζεται από το ΑΔ είναι παράλληλη στην (ε).

Απόδειξη: Από κατασκευή τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{\Delta}B$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι ίσα, αφού ΑΒ είναι κοινή και στα δύο, και ΑΔ = ΒΓ (ακτίνες κύκλου με κέντρο το Α) και ΑΓ = ΒΔ (ακτίνες κύκλου με κέντρο το Β).

Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους, μια προς μια ίσες. Άρα $\Delta\hat{A}B = A\hat{B}\Gamma$. Επομένως ΑΔ // ΒΓ, αφού οι δύο εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζει η ΑΒ, είναι ίσες.

Άσκηση 2: Δίνονται τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ. Να κατασκευαστεί τρίγωνο με πλευρές τα τμήματα αυτά.



Λύση:

Κατασκευή: Πάνω σε ευθεία (ε), παίρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ ίσο με ένα από τα δοσμένα τμήματα, έστω ΒΓ=α. Γράφουμε δύο κύκλους με κέντρα τα Β και Γ και ακτίνες ίσες με γ και β αντίστοιχα.

Αν οι κύκλοι τέμνονται, το σημείο τομής τους θα είναι η τρίτη κορυφή του τριγώνου.

Διερεύνηση: Για να έχει λύση το πρόβλημα πρέπει οι δύο κύκλοι (Β, γ) και (Γ, β) να τέμνονται. (Σημείωση για το πότε τέμνονται δύο κύκλοι στη σελ 1)

Για να ισχύει αυτό θα πρέπει να ισχύει η τριγωνική ανισότητα:

$$\beta-\gamma<\alpha<\beta+\gamma.$$

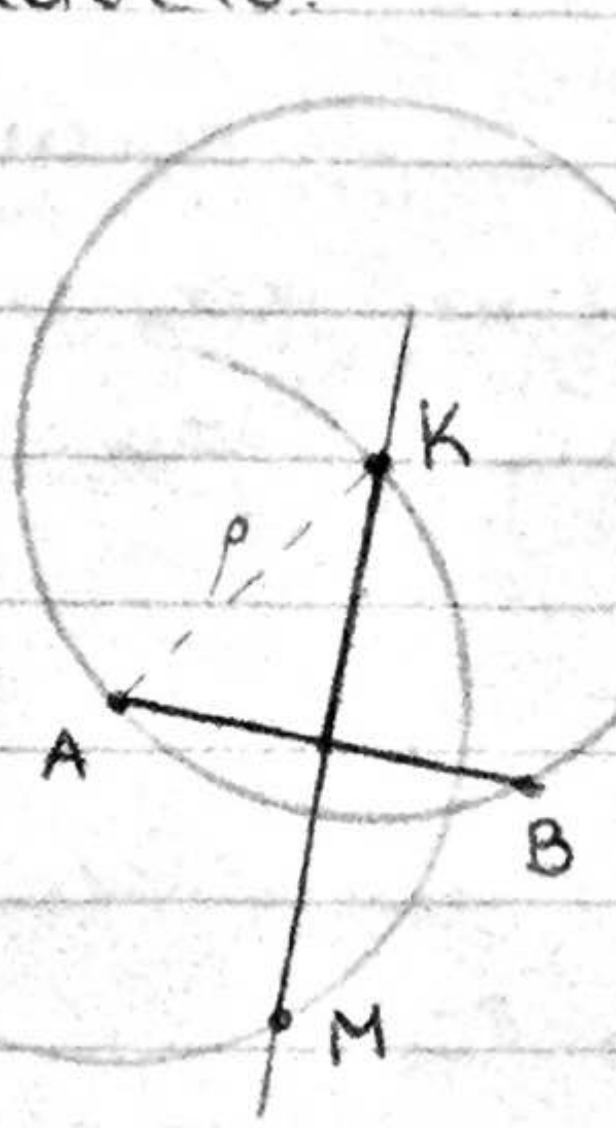
Άσκηση 3: Δίνονται δύο σημεία Α και Β και ένα ευθύγραμμο τμήμα ρ. Να κατασκευαστεί ο κύκλος που διέρχεται από τα Α και Β και έχει ακτίνα ρ.

Λύση:

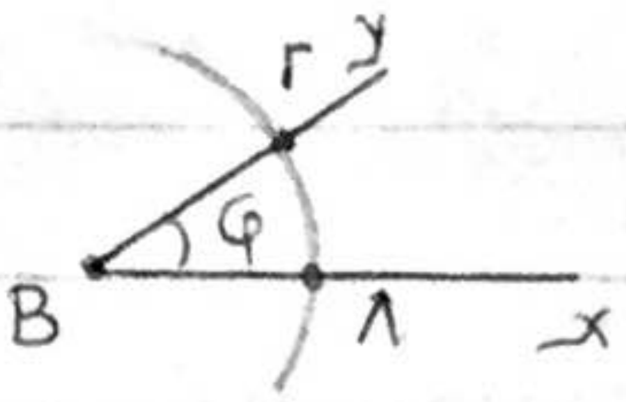
Ιδέα: Όλα τα σημεία της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, ισαπέχουν από τα Α και Β. Επομένως, τα κέντρα όλων των κύκλων που περνούν από τα Α και Β ανήκουν στη μεσοκάθετο.

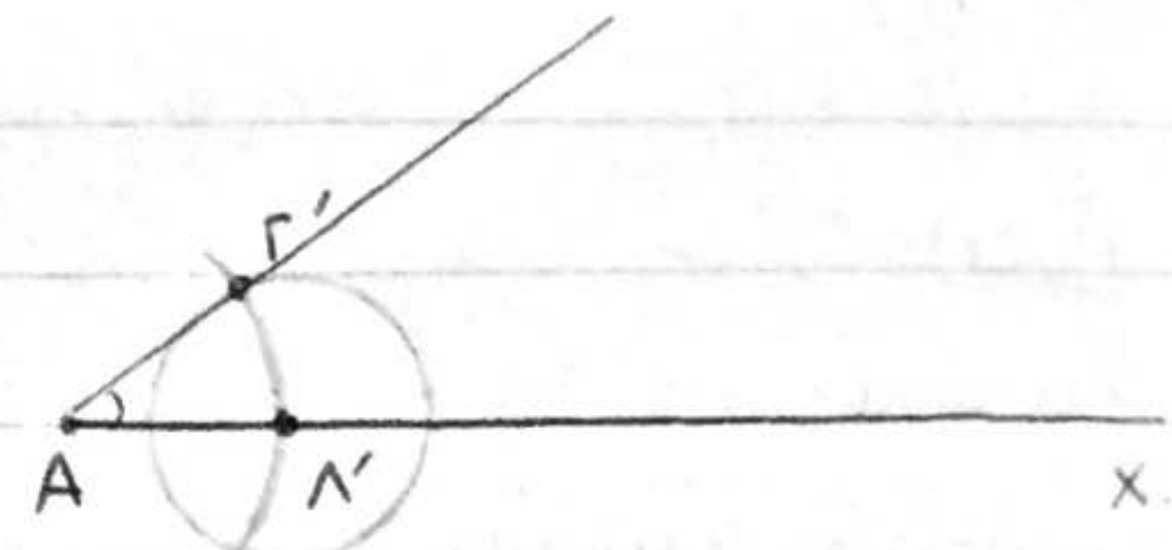
Με κέντρο το Α (ή το Β) σχεδιάζω κύκλο ακτίνας ρ, ο οποίος τέμνει τη μεσοκάθετο σε δύο σημεία Κ και Μ.

Τα σημεία αυτά είναι τα πιθανά κέντρα των κύκλων ακτίνας ρ, που διέρχονται από τα Α και Β.



Άσκηση 4: Δίνεται η γωνία φ και μια ημιευθεία Ax. Να κατασκευαστεί γωνία ίση με τη φ που η μια της πλευρά να είναι η Ax.





Λύση: Κατασκευή:

Έστω $\hat{\varphi} = y\hat{B}x$.

Πάνω στην πλευρά Bx της γωνίας $y\hat{B}x$ παίρνω ένα τυχαίο σημείο Λ και κατασκευάζω τον κύκλο (B, BΛ), ο οποίος τέμνει την πλευρά By στο σημείο Γ. Έτσι κάνω την δεδομένη γωνία επίκεντρη, με το αντίστοιχό της τόξο να είναι $\overset{\frown}{ΛΓ}$. Με κέντρο το A και ακτίνα ίση με BΛ γράφω κύκλο ο οποίος τέμνει την Ax στο σημείο Λ′. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε κύκλο (Λ′, ΛΓ) ο οποίος τέμνει τον κύκλο (A, BΛ) σε δύο σημεία. Έστω το ένα από αυτά Γ′. Τότε φέρουμε την ημιευθεία AΓ′ και η γωνία $Γ'\hat{A}Λ'$ είναι ίση με την $Γ\hat{B}Λ$, δηλαδή τη φ.

Απόδειξη: Οι γωνίες $Γ'\hat{A}Λ'$ και $Γ\hat{B}Λ$ είναι ίσες γιατί είναι επίκεντρες γωνίες των ίσων κύκλων (B, BΛ) και (A, AΛ′) και τα αντίστοιχα τόξα τους ΓΛ και Γ′Λ′ είναι ίσα από κατασκευής.

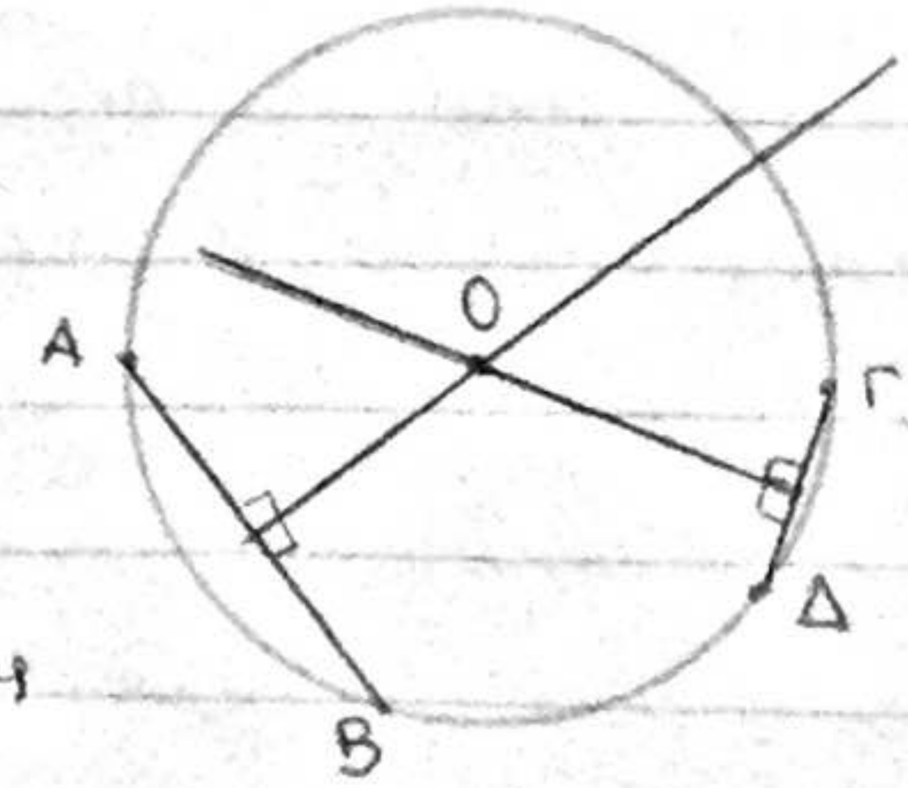
Σημείωση: Σε ίσους κύκλους, οι επίκεντρες γωνίες που αντιστοιχούν σε ίσα τόξα είναι ίσες.

Άσκηση 5. Στον παρακάτω κύκλο έχει σβηστεί το κέντρο του. Να βρείτε τρόπο να προσδιορίσετε το κέντρο (με κανόνα και διαβήτη) και να περιγράψετε τα βήματα της κατασκευής σας.

Λύση.

Φέρνω δύο τυχαίες χορδές του κύκλου, έστω AB και ΓΔ.

Σε αυτές, κατασκευάζω τις μεσοκαθέτους τους. (άσκηση 1.1)



③

Το κέντρο του κύκλου είναι εκεί που τέμνονται οι δύο μεσοκάθετοι, στο σημείο Ο.

Εξήγηση: Για να είναι κύκλος, πρέπει το κέντρο του το Ο να ισαπέχει από όλα τα σημεία του. Αρκεί να αποδείξω ότι ισαπέχει από τα 4 σημεία Α, Β, Γ, Δ που επέλεξα τυχαία στο πρώτο βήμα.

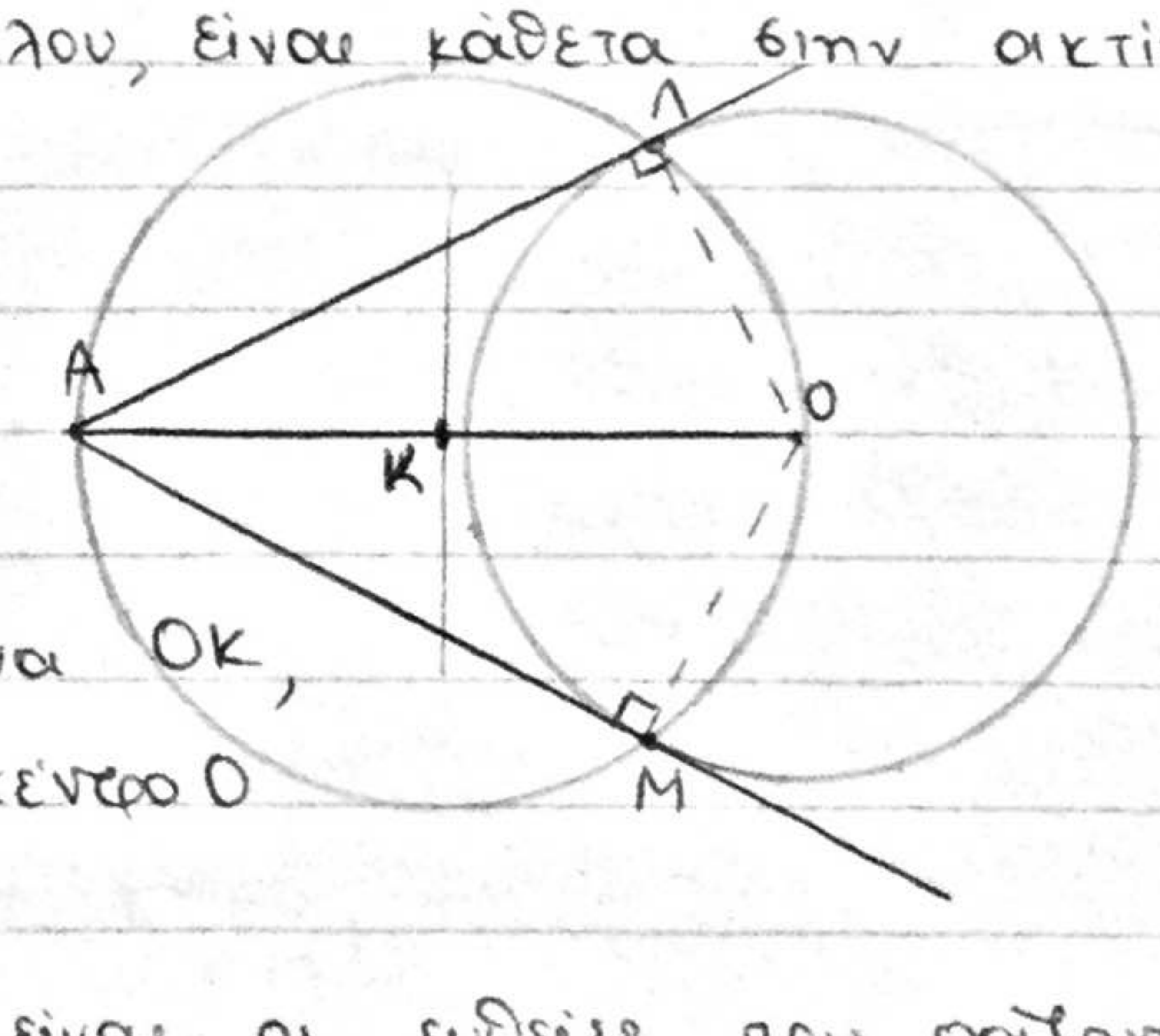
→ Το Ο ισαπέχει από τα Α, Β αφού ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ
→ Το Ο ,, ,, Γ, Δ ,, ,, ΓΔ

Άσκηση 6: Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ένα σημείο Α εκτός αυτού. Να κατασκευαστούν οι εφαπτομένες από το Α στον κύκλο.

Λύση

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και Α εξωτερικό σημείο.

Ιδέα: Από θεωρία είναι γνωστό ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εξωτερικό του κύκλου, είναι κάθετα στην ακτίνα στο σημείο επαφής.



Κατασκευή:

Κατασκευάζω τη μεσοκάθετο το ΟΑ, και έστω Κ το μέσο του ΟΑ.

Φτιάχνω κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΚ, ο οποίος τέμνει τον αρχικό κύκλο με κέντρο Ο σε δύο σημεία, Λ και Μ.

Οι εφαπτομένες στον κύκλο από το Α είναι οι ευθείες που ορίζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΛ και ΑΜ.

Απόδειξη. Για να αποδείξω ότι τα ΑΛ και ΑΜ είναι εφαπτομένες του κύκλου, αρκεί να δείξω ότι στα σημεία επαφής Λ και Μ τα ΑΛ και ΑΜ είναι κάθετα στις ακτίνες ΟΛ και ΟΜ.

Αυτό ισχύει γιατί οι γωνίες $A\hat{Λ}O$ και $A\hat{M}O$ είναι εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο, άρα είναι ορθές.

Επομένως $A\Lambda \perp \Lambda O$ και $AM \perp MO$, δηλαδή $A\Lambda$, AM εφαπτομένες.