- Αναλυτική και συνθετική μέθοδος στις γεωμετρικές κατασκευές

Ιστορικό Σημείωμα: Η αναλυτική-συνθετική μέθοδος

- Η αναλυτική-συνθετική μέθοδος στη Γεωμετρία συνδέεται στενά με την Πλατωνική φιλοσοφία. Για τον φιλόσοφο Πλάτωνα η Γεωμετρία και γενικά τα Μαθηματικά ήταν ο ασφαλέστερος δρόμος, για να προσεγγίσει κάποιος τον Κόσμο των Ιδεών.
- Αργότερα ο Αριστοτέλης, που υπήρξε μαθητής της Ακαδημίας του Πλάτωνα, επηρεάστηκε από τη Γεωμετρία και τα Μαθηματικά της εποχής του, χρησιμοποίησε τη μέθοδο της ανάλυσης για την εξαγωγή συμπερασμάτων στις δικές του φιλοσοφικές θεωρίες.
- Ο Αριστοτέλης, στο έργο του «Ηθικά Νικομάχεια» (1112b. 12-26), παραθέτει ένα απόσπασμα στο οποίο φαίνεται να θεωρεί την **ανάλυση** ως τη μέθοδο σκέψης και απόφασης πάνω σε κάποιο ζήτημα και συνδέει τη διαλεκτική μέθοδο με την ανάλυση ενός σχήματος στη Γεωμετρία.
- Ο πρώτος ορισμός της μεθόδου ανάλυσης – σύνθεσης εντοπίζεται σε αναφορά κάποιου από τους σχολιαστές του έργου «Στοιχεία» του Ευκλείδη.
- Ο **Αρχιμήδης** χρησιμοποιεί την Αναλυτική-Συνθετική μέθοδο στο έργο του «Περί σφαίρας και κυλίνδρου», ενώ ο μέγας Γεωμέτρης **Απολλώνιος ο Περγαίος** στο έργο του «Κωνικά».
- Ο **Πάππος ο Αλεξανδρεύς**, που έζησε τον 3ο αιώνα μ.Χ, στο έργο του «Συναγωγή», που αποτελείται από οκτώ βιβλία και περιλαμβάνει δύσκολα προβλήματα και θεωρήματα, χρησιμοποιεί την Αναλυτική-Συνθετική μέθοδο. Από τον ίδιο τον Πάππο το VII βιβλίο αναφέρεται ως «ο θησαυρός της Ανάλυσης» και περιλαμβάνει ένα δεύτερο πληρέστερο ορισμό της μεθόδου.

Ο πρώτος ορισμός της μεθόδου ανάλυσης – σύνθεσης εντοπίζεται σε αναφορά κάποιου από τους σχολιαστές του έργου «Στοιχεία» του Ευκλείδη.

«Τί ἐστιν ἀνάλυσις καὶ τί ἐστι σύνθεσις.

Ἀνάλυσις μὲν οὖν ἐστι λῆψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου <και το πέρασμα> διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθές ὁμολογούμενον.

Σύνθεσις δὲ λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου <και το πέρασμα> διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθές ὁμολογούμενον»

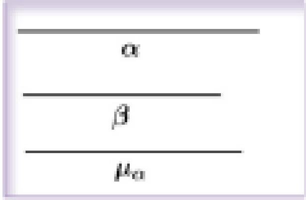
Σύγχρονοι ορισμοί

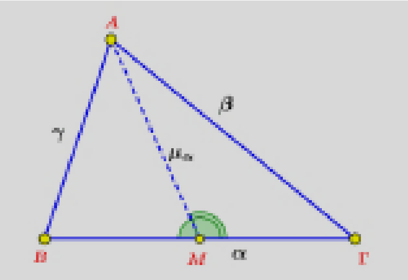
- **Ανάλυση** είναι η διαδικασία που **ξεκινά με την υπόθεση ότι το ζητούμενο είναι αληθές και προχωρά** με ακολουθία λογικών αληθών προτάσεων, μέχρι να **φτάσουμε σε μια πρόταση που είναι γνωστό εκ των προτέρων ότι είναι αληθής και ανεξάρτητη από το ζητούμενο.**
- **Σύνθεση** είναι η διαδικασία που ξεκινά από μια αληθή πρόταση και προχωρά με ακολουθία λογικών αληθών προτάσεων, μέχρι να φτάσουμε στην απόδειξη της ζητούμενης πρότασης.
  - Πιο συγκεκριμένα, ή σύνθεση **ξεκινά από το τελευταίο βήμα της ανάλυσης** και με αντίστροφα βήματα φτάνουμε στο ζητούμενο.

Την Αναλυτική- Συνθετική μέθοδο χρησιμοποιούμε και για να αντιμετωπίσουμε σύνθετες Γεωμετρικές κατασκευές, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

1. **Ανάλυση**
   Στο στάδιο της ανάλυσης αρχικά υποθέτουμε ότι το πρόβλημα που μας δίνεται έχει λυθεί και θεωρούμε ένα σχήμα που ικανοποιεί όλα τα δεδομένα του προβλήματος. Κατόπιν με διάφορες παρατηρήσεις , χρησιμοποιώντας τα δεδομένα και φέροντας κατάλληλες γραμμές (ευθείες και κύκλους) προσπαθούμε να δημιουργήσουμε ένα άλλο σχήμα που κατασκευάζεται με γνωστές απλές γεωμετρικές κατασκευές.
   Τέλος, **συνδυάζοντας τις διάφορες απλές γεωμετρικές κατασκευές που συναντούμε,** διαδοχικά, προσπαθούμε να φτάσουμε στο ζητούμενο σχήμα.
   Σκοπός της Ανάλυσης είναι να μας υποδείξει τον δρόμο για να ξεκινήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα.
2. **Σύνθεση (Κατασκευή)**
   Είναι η αντίστροφη πορεία της Ανάλυσης και ουσιαστικά η λύση του προβλήματος. Στη διαδικασία της σύνθεσης κατασκευάζουμε σταδιακά τα σχήματα που συναντούμε στην Ανάλυση και βήμα –βήμα οδηγούμαστε στο ζητούμενο σχήμα.
3. **Απόδειξη**
   Αποδεικνύουμε ότι το σχήμα που κατασκευάσαμε έχει όλα τα δεδομένα που μας δόθηκαν και άρα είναι το ζητούμενο.
4. **Διερεύνηση**
   Στο στάδιο αυτό αναζητούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα, για να υπάρχει λύση και αναζητούμε όλες τις δυνατές λύσεις του προβλήματος. Με τα δεδομένα του προβλήματος
   μπορεί να κατασκευάζονται περισσότερα από ένα σχήματα ή να μην κατασκευάζεται κανένα σχήμα.

Πρόβλημα 1	Να κατασκευαστεί τρίγωνο $ΔΑΒΓ$ όταν δίνονται οι πλευρές του $α = ΒΓ$, $β = ΑΓ$ και η διάμεσος του $ΑΜ = μ_α$





Σχήμα 23

- **Ανάλυση**

Υποθέτουμε ότι το τρίγωνο $ΔΑΒΓ$ έχει κατασκευαστεί με τα δεδομένα του προβλήματος **(Σχήμα23)**. Παρατηρώντας το σχήμα που σχεδιάσαμε προσπαθούμε να αναζητήσουμε σε αυτό γεωμετρικά σχήματα που μπορούν να κατασκευαστούν με απλές γεωμετρικές κατασκευές.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι το τρίγωνο $ΔΑΓΜ$ μπορεί να κατασκευαστεί γιατί γνωρίζουμε τις τρείς πλευρές του: $ΑΓ = β,\ ΑΜ = μ_α$ και $ΓΜ = \frac{α}{2}$

- **Σύνθεση-κατασκευή**

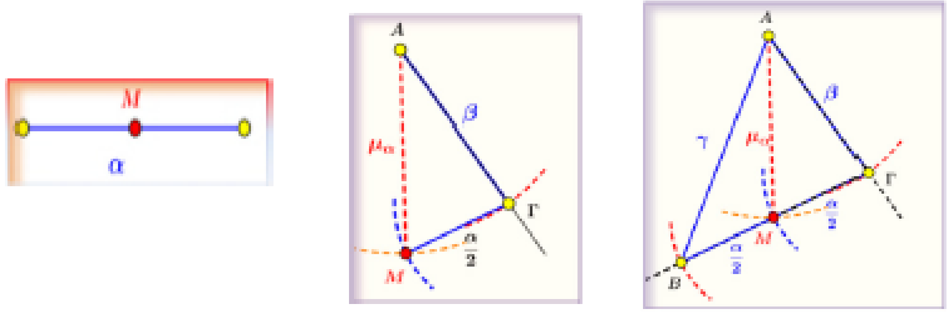
Η κατασκευή του τριγώνου φαίνεται βήμα-βήμα στο επόμενο **(Σχήμα 24)**.

Βήμα 1° : Κατασκευάζουμε το μέσον του δεδομένου τμήματος $ΒΓ = α$.

Βήμα 2° : Με πλευρές $\frac{ΒΓ}{2} = \frac{α}{2}$, $ΑΓ = β$ και $ΑΜ = μ_α$ κατασκευάζουμε το τρίγωνο $ΔΑΓΜ$.

Βήμα 3°: Προεκτείνουμε την ημιευθεία $ΓΜ$ και παίρνουμε σημείο $Β$ στην προέκταση της τέτοιο ώστε $ΜΒ = ΓΜ = \frac{α}{2}$

Το τρίγωνο $ΔΑΒΓ$ είναι το ζητούμενο.



- **Απόδειξη**

Το τρίγωνο $ΔΑΒΓ$ έχει $ΑΓ = β$ από την κατασκευή που κάναμε.

Η πλευρά $ΒΓ = ΓΜ + ΜΒ = \frac{α}{2} + \frac{α}{2} = α$ και $ΑΜ = μ_α$ από την κατασκευή. Επίσης η $ΑΜ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΔΑΒΓ$ αφού το σημείο $Μ$ είναι το μέσον της πλευράς $ΒΓ$.

- **Διερεύνηση**

Για να είναι δυνατή η κατασκευή του τριγώνου $ΔΑΓΜ$ θα πρέπει για τις πλευρές του να ισχύει η τριγωνική ανισότητα δηλαδή πρέπει για τα μήκη των δεδομένων τμημάτων να ισχύει:

$$|β - μ_α| < \frac{α}{2} < β + μ_α$$

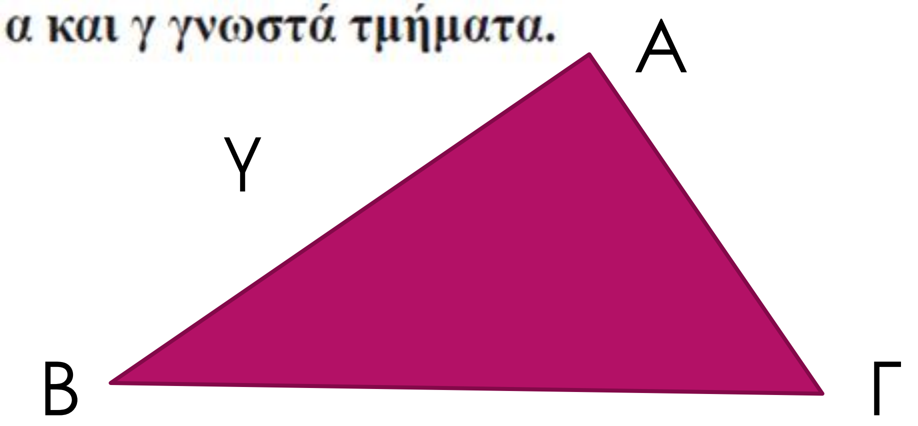
Προφανώς το πρόβλημα έχει μια λύση, δηλαδή δεν μπορεί να κατασκευαστεί άλλο τρίγωνο με αυτά τα δεδομένα.

Πρόβλημα 2

Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίνονται η υποτείνουσα ΒΓ = α και μία κάθετη πλευρά του ΑΒ = γ, όπου α και γ γνωστά τμήματα.

- Ανάλυση: θεωρήστε ότι υπάρχει αυτό το ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφή το σημείο Α.

Μπορείτε να σκεφτείτε που θα βρίσκεται το σημείο Α; Αιτιολογείστε τη θέση του.



- Υπάρχουν δυο κύκλοι στους οποίους ανήκει το Β.
- Πως θα ορίζαμε αυτούς τους δύο κύκλους;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

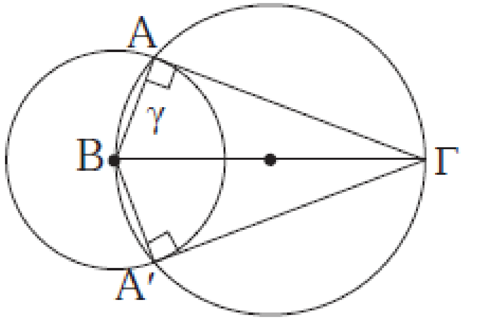
Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίνονται η υποτείνουσα ΒΓ = α και μία κάθετη πλευρά του ΑΒ = γ, όπου α και γ γνωστά τμήματα.

Λύση

Ανάλυση. Ας υποθέσουμε ότι ΑΒΓ είναι το ζητούμενο τρίγωνο με $\hat{A} = 1\llcorner$, ΒΓ = α και ΑΒ = γ (σχ.28). Ας θεωρήσουμε γνωστή την πλευρά ΒΓ. Το σημείο Α:

i) απέχει απόσταση γ από το Β, άρα ανήκει στον κύκλο (Β, γ), και

ii) βλέπει το ΒΓ υπό ορθή γωνία, άρα ανήκει στον κύκλο διαμέτρου ΒΓ.



Σχήμα 28

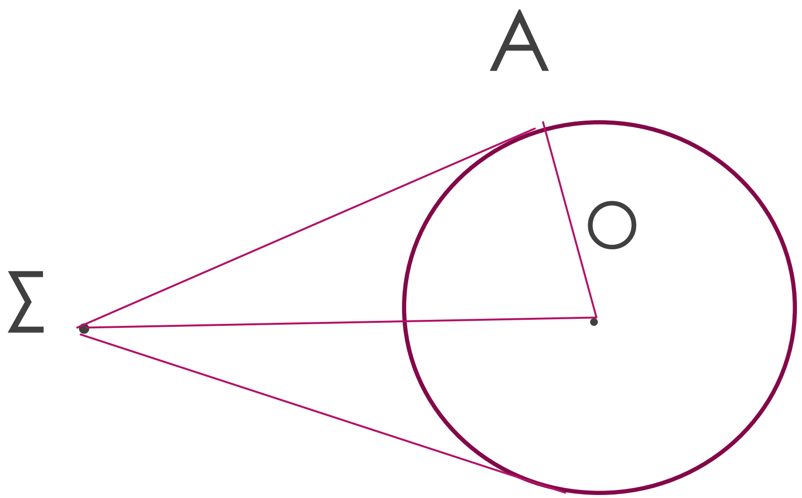
Σύνθεση. Κατασκευάζουμε τους δύο κύκλους (σχ.28) οι οποίοι τέμνονται στα Α και Α′. Σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′ΒΓ που είναι λύσεις του προβλήματος σε διαφορετικές θέσεις.

Απόδειξη. Το τρίγωνο που κατασκευάσαμε έχει $\hat{A} = 1\llcorner$, επειδή βαίνει σε ημικύκλιο, και ΑΒ = γ ως ακτίνα του κύκλου (Β, γ).

Διερεύνηση. Για να υπάρχει λύση πρέπει οι δύο κύκλοι να τέμνονται, το οποίο συμβαίνει όταν α > γ. Όταν α ≤ γ, είναι φανερό ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση.

Πρόβλημα 3

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και σημείο Σ εκτός αυτού. Να κατασκευασθεί εφαπτομένη του κύκλου η οποία να διέρχεται από το Σ.



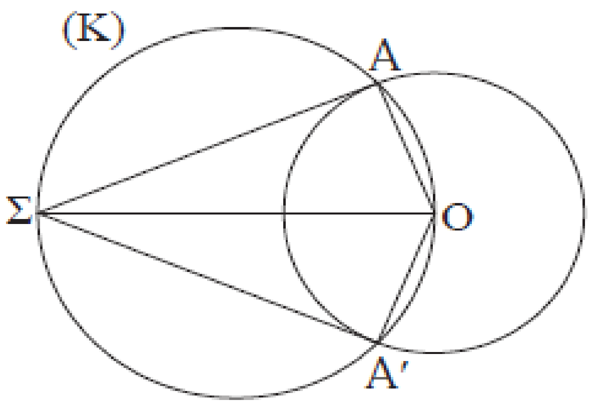
- Έστω ότι υπάρχει η εφαπτομένη από το σημείο Σ στον κύκλο (Ο, R)
- Πώς θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε το σημείο Α?
- Τι είναι η γωνία ΣΑΟ;
- Σε ποιο ημικύκλιο βαίνει; Το συγκεκριμένο ημικύκλιο μπορεί να κατασκευαστεί;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και σημείο Σ εκτός αυτού. Να κατασκευασθεί εφαπτομένη του κύκλου η οποία να διέρχεται από το Σ.

Λύση

Ανάλυση. Ας υποθέσουμε ότι ΣΑ είναι μία εφαπτομένη του κύκλου από το Σ, όπου Α το σημείο επαφής (σχ.29). Φέρουμε την ακτίνα ΟΑ, οπότε η γωνία $\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Sigma$ είναι ορθή και επομένως το Α είναι σημείο του γνωστού κύκλου (Κ) με διάμετρο το γνωστό τμήμα ΟΣ. Άρα το Α είναι κοινό σημείο του (Ο, R) και του (Κ). Επομένως το Α προσδιορίζεται, οπότε προσδιορίζεται και η ΣΑ.



Σχήμα 29

Σύνθεση. Με διάμετρο ΟΣ γράφουμε κύκλο (Κ), ο οποίος τέμνει τον (Ο, R) στα σημεία Α και Α′. Φέρουμε τις ευθείες ΣΑ και ΣΑ′ οι οποίες είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες.

Απόδειξη. Είναι $\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Sigma = \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}'\Sigma = 1\llcorner$, ως εγγεγραμμένες στον κύκλο (Κ) οι οποίες βαίνουν σε ημικύκλια. Άρα οι ακτίνες ΟΑ και ΟΑ′ είναι κάθετες αντίστοιχα στις ΣΑ και ΣΑ′ και επομένως οι ΣΑ και ΣΑ′ είναι εφαπτόμενες του κύκλου (Ο, R).

Διερεύνηση. Το πρόβλημα έχει πάντοτε δύο λύσεις, γιατί οι κύκλοι (Κ) και (Ο, R) τέμνονται αφού ο (Κ) διέρχεται από το εσωτερικό σημείο Ο και από το εξωτερικό σημείο Σ του (Ο, R).

ΥΛΙΚΟ ΜΕΛΕΤΗΣ

- ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΕΥΚΛΕΙΔΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ (ΥΛΗ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ)
- ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΕΥΚΛΕΙΔΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ (ΚΕΦ. 11: Μέτρηση κύκλου)
- ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΥΠΡΟΥ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ (ΕΝΟΤΗΤΕΣ 7.1 - 7.6)